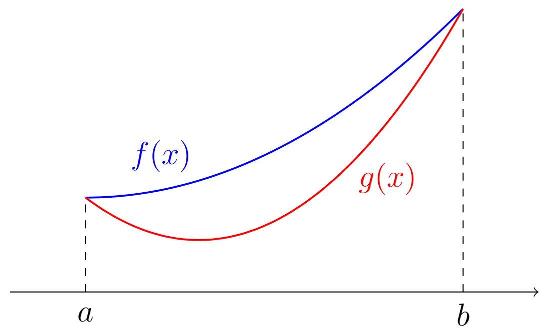
곡선의 길이와 볼록성

Sungchan Yi

July 25th, 2020

닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 아래로 볼록한 두 곡선 $f(x)$, $g(x)$ 를 생각하자. 만약 구간의 양 끝점에서 함숫값이 같으며, $f(x)$ 가 항상 $g(x)$ 보다 위에 존재한다면, 대략 이런 상황이 될 것이다.



누가 봐도 아래 쪽에 있는 곡선 $g(x)$ 가 더 길어보인다. 이 사실을 직접 수학적으로 증명해 보자.

정리. 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능한 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 다음 조건을 만족시킨다.

(i) $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$

(ii) $f(x) \geq g(x)$

(iii) $f''(x) \geq 0$, $g''(x) \geq 0$

닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 길이를 각각 l_1, l_2 라고 할 때, $l_1 \leq l_2$ 이다.

증명. 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 길이 l은 다음과 같이 주어짐을 알고 있다.

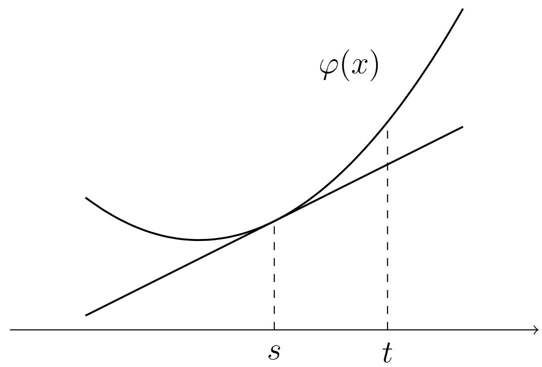
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

위 형태를 참고하여, 함수 $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}$ 을 생각하자. 직접 미분하여 확인해 보면, $\varphi''(x) = (1 + x^2)^{-3/2} \geq 0$ 이므로 $\varphi(x)$ 는 아래로 볼록인 함수임을 알 수 있다.

아래로 볼록인 곡선의 특징은, 곡선 위의 한 점에서 접선을 고려하면, 접선이 항상 곡선보다 아래에 있다는 점이다. 따라서 임의의 실수 s, t 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\varphi(t) \geq \varphi(s) + (t - s)\varphi'(s) \tag{1}$$

이를 그림으로 이해하면 대략 다음과 같다.



$x = s$ 에서 $\varphi(x)$ 에 대한 접선의 방정식이 $y = \varphi(s) + (x - s)\varphi'(s)$ 이므로, $x = t$ 에서 비교하면 곡선에서의 함숫값이 접선에서의 함숫값보다 크거나 같을 것이다.[1]

위 부등식을 (1)을 이용하면, 구간 $[a, b]$ 에서 다음이 성립함을 안다.

$$\varphi(g'(x)) \geq \varphi(f'(x)) + \big(g'(x) - f'(x)\big)\varphi'(f'(x))$$

양변을 구간 $[a, b]$ 에서 정적분 하면,

$$\int_a^b \varphi(g'(x))\,dx \geq \int_a^b \varphi(f'(x))\,dx + \int_a^b \big(g'(x) - f'(x)\big)\varphi'(f'(x))\,dx$$

임을 알고, $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}$ 이었으므로, 위 식을 다시 적어보면

$$\int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2}\,dx \geq \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx + \int_a^b \big(g'(x) - f'(x)\big)\varphi'(f'(x))\,dx$$

가 되고, 좌변은 l_2, 우변의 첫 항은 l_1 이기 때문에, 우변의 두 번째 항이 항상 0 이상임을 보이면 증명이 끝난다. 부분적분을 이용하자.

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(g'(x) - f'(x)\big)\varphi'(f'(x))\,dx &= \Big[\big(g(x) - f(x)\big)\varphi'(f'(x))\Big]_a^b - \int_a^b (g(x) - f(x))\varphi''(f'(x))f''(x)\,dx \\ &= 0 + \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\varphi''(f'(x))f''(x)\,dx \geq 0\end{aligned}$$

이 된다. 마지막 부등호는 문제의 조건 (ii)와 $f''(x) \geq 0$, $\varphi''(x) \geq 0$ 으로부터 얻는다. □

참고. 위 문제를 풀면서 $g''(x) \geq 0$ 이라는 조건은 사용되지 않았다. 실제로 $g(x)$ 의 경우에는 아래로 볼록한 $f(x)$ 보다 아래에 있기만 하면, 볼록성이 변화하더라도 (진동 등) 곡선의 길이가 $f(x)$ 보다 길어지는 것은 직관적으로 납득이 된다.

[1] 정확한 증명에는 젠센 부등식을 이용하는 방법과, **테일러 정리**를 이용하는 방법이 있다.

완결성을 위해, 부등식 (1)을 증명한다.

도움정리. 두 번 미분가능한 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 이 아래로 볼록하다고 하자. 정의역에 속하는 임의의 실수 x,y 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$f(x)\geq f(y)+(x-y)f'(y)$$

증명 1. (테일러 정리) f가 두 번 미분가능하므로, 테일러 정리에 의해

$$f(x)=f(y)+(x-y)f'(y)+\frac{(x-y)^2}{2}f''(c)$$

를 만족하는 c가 x와 y사이에 존재한다. 이제 f는 아래로 볼록이므로 $f''(c)\geq 0$ 이 되어

$$f(x)=f(y)+(x-y)f'(y)+\frac{(x-y)^2}{2}f''(c)\geq f(y)+(x-y)f'(y)$$

를 얻는다. □

증명 2. (젠센 부등식) $a<y<x<b$ 라고 하자. 젠센 부등식에 의해, 적당한 실수 $\lambda\in(0,1)$ 에 대하여

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\leq(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

가 성립한다. 양변에서 $f(y)$ 를 빼고 정리하면,

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)-f(y)\leq(1-\lambda)(f(x)-f(y))$$

양변을 $(1-\lambda)x+\lambda y-y=(1-\lambda)(x-y)>0$ 으로 나누면,

$$\frac{f((1-\lambda)x+\lambda y)-f(y)}{(1-\lambda)x+\lambda y-y}\leq\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

이 되고, $\lambda\to 1$ 일 때, $(1-\lambda)x+\lambda y\to y$ 이므로, 좌변은 $f'(y)$ 에 수렴한다. $x-y>0$ 이므로 곱한 후 정리하면,

$$f'(y)(x-y)+f(y)\leq f(x)$$

가 되어 원하는 결론을 얻는다. □