미적분 정답

23	③	24	②	25	①	26	④	27	③
28	②	29	12	30	208				

미적분 해설

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)\times\frac{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\{(n^2+4)-(n^2+1)\}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=3$$

24. [출제의도] 합성함수 미분법 이해하기

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-4}{x-2}=12$ 에서 $g(2)=4$, $g'(2)=12$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+2}$$
$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$
$$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(4)g'(2)$$
$$f'(4)=\frac{8-1}{16-4+2}=\frac{1}{2}$$

따라서 $h'(2)=\dfrac{1}{2}\times 12=6$

25. [출제의도] 음함수의 미분법 이해하기

$2e^{x+y-1}=3e^x+x-y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left(2e^{x+y-1}\right)=\frac{d}{dx}\left(3e^x+x-y\right)$$
$$2e^{x+y-1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=3e^x+1-\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3e^x+1-2e^{x+y-1}}{2e^{x+y-1}+1}$$

따라서 점 $(0,\ 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3+1-2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

26. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\left[2(x-1)f\left(\frac{x}{2}\right)\right]_1^2-\int_1^2 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=2f(1)-2\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

$f(1)=4$ 이므로 $\displaystyle\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=3$

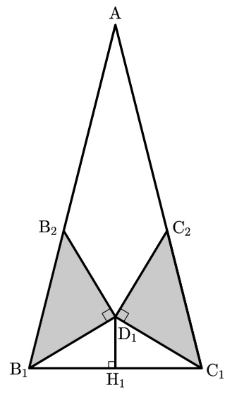
$\dfrac{x}{2}=t$ 라 하면 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$ 일 때 $t=\dfrac{1}{2}$, $x=2$ 일 때 $t=1$

$$\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt=3$$

따라서 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$

27. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기



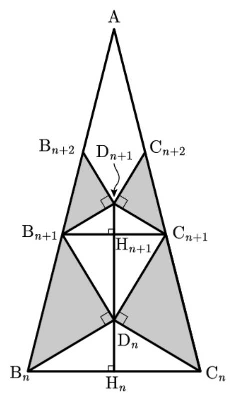
점 D_1 에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 H_1, $\angle AB_1H_1=\alpha$, $\angle D_1B_1H_1=\beta$ 라 하자.

$\overline{AH_1}=\sqrt{17-1}=4$ 이므로 $\tan\alpha=4$

$$\tan\beta=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{3}{5}$$

$\overline{B_1H_1}=1$, $\overline{D_1H_1}=\dfrac{3}{5}$ 이므로

$$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$
$$S_1=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{34}}{5}\right)^2\right\}=\frac{34}{25}$$



점 D_n 에서 선분 B_nC_n 에 내린 수선의 발을 H_n, 점 D_{n+1} 에서 선분 $B_{n+1}C_{n+1}$ 에 내린 수선의 발을 H_{n+1} 이라 하자.

두 삼각형 $D_nB_nH_n$ 과 $B_{n+1}D_nH_{n+1}$ 은 서로 합동이므로

$$\overline{B_{n+1}H_{n+1}}=\overline{D_nH_n}=\overline{B_nH_n}\times\tan\beta=\frac{3}{5}\overline{B_nH_n}$$

두 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$, $C_nD_nC_{n+1}$ 로 만들어진 ⋈ 모양의 도형의 넓이를 T_n 이라 하자.

두 삼각형 $D_nB_nH_n$, $D_{n+1}B_{n+1}H_{n+1}$ 은 서로 닮음이고 닮음비가 $1:\dfrac{3}{5}$ 이므로

넓이의 비는 $1^2:\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$ 이다.

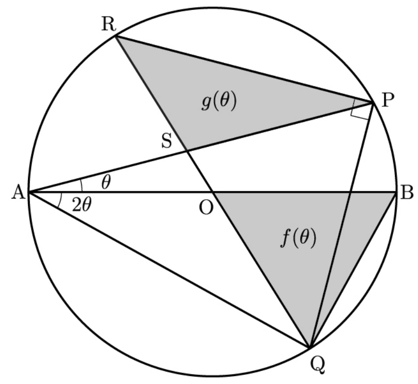
$$T_{n+1}=\frac{9}{25}T_n$$

수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1=S_1=\dfrac{34}{25}$ 이고

공비가 $\dfrac{9}{25}$ 인 등비수열이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{34}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{17}{8}$

28. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기



$\overline{OA}=\overline{OQ}=1$ 이므로

$\angle OQA=2\theta$, $\angle BOQ=4\theta$

삼각형 BOQ 의 넓이는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OQ}\times\sin(\angle BOQ)$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin4\theta=\frac{1}{2}\sin4\theta$$

선분 RQ 는 원의 지름이므로 $\angle RPQ=\dfrac{\pi}{2}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle PRQ=\angle PAQ=3\theta$

$\overline{RP}=\overline{RQ}\cos3\theta=2\cos3\theta$

원주각의 성질에 의하여 $\angle RPA=\angle RQA=2\theta$

삼각형 PRS 에서 $\angle PSR=\pi-5\theta$

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{RS}}{\sin2\theta}=\dfrac{2\cos3\theta}{\sin(\pi-5\theta)}$ 이므로

$$\overline{RS}=\frac{2\cos3\theta\sin2\theta}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{2\cos3\theta\sin2\theta}{\sin5\theta}$$

삼각형 PRS 의 넓이는

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{RP}\times\overline{RS}\times\sin(\angle PRS)$$
$$=\frac{1}{2}\times2\cos3\theta\times\frac{2\cos3\theta\sin2\theta}{\sin5\theta}\times\sin3\theta$$
$$=\frac{2\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times\sin3\theta}{\sin5\theta}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{2\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times\sin3\theta}{\sin5\theta}}{\dfrac{1}{2}\sin4\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times\sin3\theta}{\sin4\theta\times\sin5\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{24\times\cos^2(3\theta)\times\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\times\dfrac{\sin3\theta}{3\theta}}{20\times\dfrac{\sin4\theta}{4\theta}\times\dfrac{\sin5\theta}{5\theta}}$$
$$=\frac{6}{5}$$

29. [출제의도] 치환적분법 이해하기

조건 (가)에 의하여

$x<1$ 일 때

$f(x)=-x^2+4x+C$ (단, C 는 적분상수)

조건 (나)에 의하여

$x>0$ 일 때

$$2xf'(x^2+1)=2ae^{2x}+b$$
$$f'(x^2+1)=\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$
$$f'(1)=\lim_{x\to0+}f'(x^2+1)=\lim_{x\to0+}\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$

$\lim\limits_{x\to0+}2x=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to0+}(2ae^{2x}+b)=0$

$2a+b=0$, $b=-2a$

$f'(x^2+1)=\dfrac{2ae^{2x}+b}{2x}=\dfrac{2ae^{2x}-2a}{2x}$

함수 $f'(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f'(x)=\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=f'(1)$

$\lim\limits_{x\to1-}f'(x)=-2+4=2$

$\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=\lim\limits_{s\to0+}f'(s^2+1)$

$=\lim\limits_{s\to0+}\dfrac{2a(e^{2s}-1)}{2s}=2a$

$f'(1)=2$

$2=2a$, $a=1$, $b=-2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-1^2+4\times1+C=C+3$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{s\to0+}f(s^2+1)$

$=\lim\limits_{s\to0+}(e^{2s}-2s)=1$

$f(1)=1$

$C+3=1$이므로 $C=-2$

그러므로

$x<1$일 때, $f(x)=-x^2+4x-2$

$x\ge0$일 때, $f(x^2+1)=e^{2x}-2x$

$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-x^2+4x-2)dx=-\dfrac{1}{3}$

$\int_1^5 f(x)dx$에서

$x=t^2+1\ (t\ge0)$이라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=2t$

$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x)dx&=\int_0^2 f(t^2+1)2t\,dt\\&=\int_0^2 2t(e^{2t}-2t)\,dt\\&=\int_0^2(2te^{2t}-4t^2)\,dt\\&=\left[te^{2t}\right]_0^2-\int_0^2 e^{2t}dt-\int_0^2 4t^2dt\\&=\left[te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{4}{3}t^3\right]_0^2\\&=\frac{3}{2}e^4-\frac{61}{6}\end{aligned}$$

$\int_0^5 f(x)dx=\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{3}{2}e^4-\dfrac{61}{6}\right)=\dfrac{3}{2}e^4-\dfrac{21}{2}$

에서 $p=\dfrac{3}{2}$, $q=\dfrac{21}{2}$

따라서 $p+q=12$

30. [출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 추론하기

모든 자연수 n에 대하여

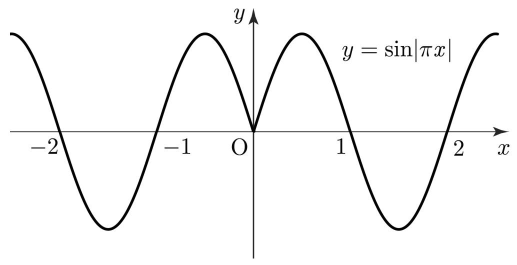
$g(a_n)=\sin|\pi f(a_n)|=0$이므로

$f(a_n)$의 값은 정수이다.

$$\cos\{\pi f(a_n)\}=\begin{cases}1 & (f(a_n)=2p)\\ -1 & (f(a_n)=2p-1)\end{cases}\quad\cdots\ ㉠$$

(단, p는 정수)

함수 $y=\sin|\pi x|$의 그래프는 그림과 같다.



$-1<x<0$ 또는 $0<x<1$일 때

$\sin|\pi x|>0$

$f(a_4)=0$이면 $g(a_4)=\sin|\pi f(a_4)|=0$이고,

$f(a_3)$과 $f(a_5)$의 값은 각각 -1 또는 0 또는 1

$a_3<x<a_4$ 또는 $a_4<x<a_5$일 때

$0<|f(x)|<1$이므로 $g(x)=\sin|\pi f(x)|>0$

함수 $g(x)$는 $x=a_4$에서 극대가 아니므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(a_4)\ne0$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 미분가능하고

조건 (가)에 의하여 $g'(a_4)=0$

$$g(x)=\begin{cases}\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)\ge0)\\ -\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases}\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\}-\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\}+\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

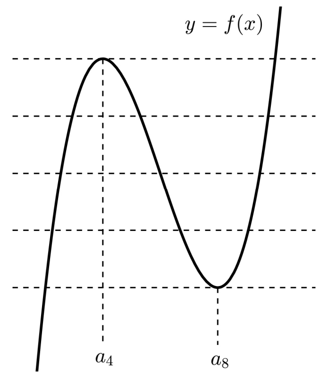
에서 $f'(a_4)=0$

위와 같은 방법으로 $f(a_8)\ne0$이고 $f'(a_8)=0$

그러므로 $f'(x)=3(x-a_4)(x-a_8)$

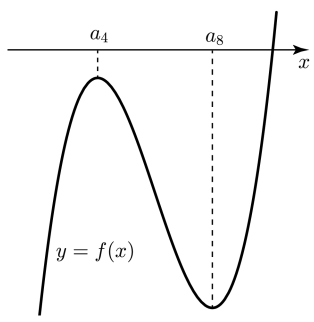
$f''(a_4)<0$, $f''(a_8)>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 $f(a_8)=f(a_4)-4$이다.

(i) $f(a_4)<0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4)<0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=-1$

$f(a_4)=2q+1$ (단, q는 음의 정수)

$f(a_8)=f(a_4)-4=2q-3$에서

$\cos\{\pi f(a_8)\}=-1$이고

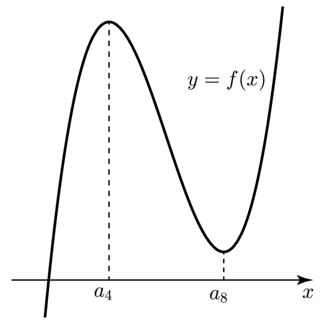
$f''(a_8)>0$이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

함수 $g(x)$가 $x=a_8$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(a_8)>0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x=a_8$에서 극대이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}<0$

$f''(a_8)>0$이므로 $\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_8)\}=1$

$f(a_8)=2r$ (단, r는 자연수)

$f(a_4)=f(a_8)+4=2r+4$에서

$\cos\{\pi f(a_4)\}=1$이고

$f''(a_4)<0$이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}>0$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(a_8)<0<f(a_4)$인 경우

$f(a_4)-4=f(a_8)<0<f(a_4)$이므로

$0<f(a_4)<4$

$f(a_4)=1$ 또는 $f(a_4)=2$ 또는 $f(a_4)=3$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4)<0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}>0$

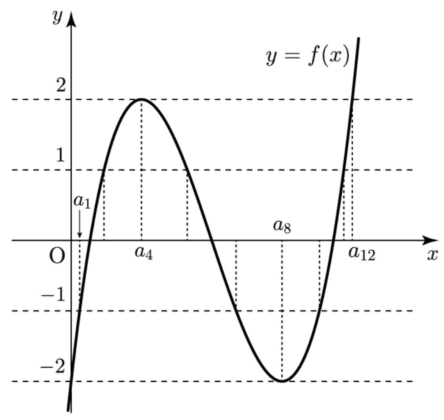
㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=1$

$f(a_4)=2s$ (단, s는 자연수)

그러므로 $f(a_4)=2$이고 $f(a_8)=-2$

조건 (나)에 의하여 $f(a_8)=f(0)=-2$

$m=8$



$f(x)=x(x-a_8)^2-2$

$f'(x)=(x-a_8)^2+2x(x-a_8)=3(x-a_8)\left(x-\dfrac{a_8}{3}\right)$

$f'(a_4)=0$에서 $a_4=\dfrac{a_8}{3}$

$f(a_4)=a_4(a_4-a_8)^2-2=2$이므로

$\dfrac{a_8}{3}\left(-\dfrac{2a_8}{3}\right)^2-2=2$, $a_8=3$

$f(x)=x(x-3)^2-2$

$f(m)=f(8)=8\times5^2-2=198$이고

$k\ge8$일 때 $f(a_k)=k-10$이므로

따라서 $f(a_k)\le f(8)$인 k의 최댓값은 208