2020학년도 신입학 수시모집
논술고사 문제지 (자연계열-오전)

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색 볼펜**"으로 정확히 기재 및 마킹(진하게)바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색 볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 삼각형 ABC 에서 두 변의 길이 b, c 와 그 끼인각인 $\angle$A 의 크기를 알 때, 삼각형 ABC 의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ 이다.

2. $a>0, b>0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이다. (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.)

3. 좌표평면 위의 두 점 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 사이의 거리 $\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다.

4. 좌표평면 위의 두 직선 $y=mx+n,\ y=m'x+n'$ 이 서로 수직이면 $mm'=-1$ 이다.

[1] 삼각형 ABC 가 다음을 만족한다. (단, $x>0$)

$$\angle ABC=60^\circ,\quad \overline{AB}=\frac{2}{x}+1,\quad \overline{BC}=x+1$$

삼각형 ABC 의 넓이의 최솟값을 구하고, 그 때 x 의 값을 구하시오. [10점]

[2] 자연수 n 에 대하여 $x+2y=3^n$ 을 만족시키는 두 자연수의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 a_n 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) a_1, a_2, a_3 을 구하시오. [6점]

(2) a_n 을 구하시오. [8점]

(3) $\sum_{n=1}^{99}\log_3(6a_n+3)$ 을 구하시오. [8점]

[3] 함수 $y=2^{x+2}+4$ 의 그래프 위의 두 점 A, B 와 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 두 점 C, D 를 꼭지점으로 하는 사각형 ABCD 는 정사각형이다. 점 A, B, C, D 의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $b<a$ 이고 $c<d$ 이다.)

(1) b를 c로 나타내고, 이를 이용하여 정사각형 ABCD 의 한 변의 길이를 구하시오. [8점]

(2) d를 c로 나타내고, 이를 이용하여 c를 구하시오. [10점]

<끝>

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여
   ㉠ $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
   ㉡ $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

2. 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (\text{단, } a<x<b\ )$$

3. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

4. 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여, 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$ 이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

[1] 다항식 $P(x)=\sum_{k=1}^{2020}[\log k](-x)^k$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

(1) $\int_1^{2020}[\log t]\,dt$ 를 구하시오. [6점]

(2) 다항식 $P(x)$의 모든 항의 계수의 합을 구하시오. [6점]

(3) $x<0$ 에서 두 곡선 $y=P(x)$ 와 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 의 교점의 개수를 구하시오. [8점]

[2] 이차곡선 $y=f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$가 다음 식을 만족할 때, 물음에 답하시오.

$$f(x) = -\frac{1}{4}\int_0^x \frac{t}{f(t)}\,dt + 1$$

(1) 이차곡선 위의 점 $\left(\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식을 구하시오. [4점]

(2) 이차곡선의 방정식을 구하시오. [8점]

<다음 장 계속>

[3] 다음 두 조건을 모두 만족하는 미분가능한 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(단, $t>0$)

(가) $f(x)=f(-x)$
(나) $g'(x)=g'(-x)$, $g(0)=1$

(1) $\displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)g(x)\,dx = 2\int_{0}^{t} f(x)\,dx$ 임을 증명하시오. [10점]

(2) $\displaystyle\int_{-t}^{t} \frac{2x\sin x}{e^x+1}\,dx$ 를 구하시오. [8점]

<끝>

2020학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-오전1번]

▣ 출제의도

[1] 삼각함수를 사용한 삼각형의 넓이 공식을 이해하고, 조건을 만족하는 넓이 방정식을 구하여 문제를 해결하는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

[2] 주어진 조건을 만족하는 수열을 이해하고 이를 통해 일반항을 구하여 문제를 해결하는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

[3] 정사각형의 구성 원리를 이해하고 지수법칙을 이용하여 주어진 문제를 해결하는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

▣ 문항별 배점

[1] 10점
[2] (1) 6점 (2) 8점 (3) 8점
[3] (1) 8점 (2) 10점

▣ 참고자료

[1] 기초수학, 고호경 외, 교학사, 2014
[2] 수학 I, 정상권 외, 금성출판사, 2014
[3] 수학 I, 신항균 외, 지학사, 2014
[3] 수학 II, 이준열 외, 천재교육, 2014
[4] 수학 II, 김원경 외, 비상교육, 2014

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	삼각형의 넓이 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3+x+\frac{2}{x}\right)$ 를 구했으면	3
	부등식 $S\geq\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4}$ 과 넓이의 최솟값을 $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4}$ 을 구했으면	4
	조건 $x=\frac{2}{x}$ 과 $x=\sqrt{2}$ 를 구했으면	3
2-1	첫째항 $a_1=1$ 을 구했으면	2
	둘째항 $a_2=4$ 를 구했으면	2
	셋째항 $a_3=13$ 을 구했으면	2
2-2	x 가 홀수임을 유도했으면	2
	x 는 1 부터 3^n-2 까지의 홀수임 또는 y 는 $1\leq y\leq\frac{3^n-1}{2}$ 인 자연수임을 유도했으면	4
	일반항 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$ 을 구했으면	2
2-3	$\log_3(6a_n+3)=n+1$ 을 구했으면	4
	$\sum_{n=1}^{99}\log_3(6a_n+3)=5049$	4
3-1	$a-b=d-c$ 와 $2^{a+2}-2^{b+2}=2^d-2^c$ 를 유도했으면	2
	$b=c-2$ 를 구했으면	4
	정사각형 ABCD 의 한 변의 길이 $=2\sqrt{5}$ 를 구했으면	2
3-2	직선 CD 의 기울기 $=\frac{1}{2}$ 를 구했으면	2
	$2^d-2^c=\frac{d-c}{2}$ 를 유도했으면	2
	$d=c+4$ 를 구했으면	3
	$c=\log_2\frac{2}{15}=1-\log_2 15$ 를 구했으면	3

▣ 모범답안

[1] 삼각형의 넓이 공식(제시문 1)으로부터 다음을 얻는다.

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+1\right)(x+1)\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3+x+\frac{2}{x}\right)$$

이때 $x>0$ 이므로 제시문 2로부터 $x+\frac{2}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$ 가 성립하므로

$$S\ge\frac{\sqrt{3}}{4}(3+2\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4}$$

따라서 넓이의 최솟값은 $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4}$ 이다.

이때 x 의 값은 제시문 2로부터 $x=\frac{2}{x}$ 을 만족한다. $x^2=2$ 이고, $x>0$ 이므로 $x=\sqrt{2}$ 이다.

[2] (1) $x+2y=3$ 에서 $x=1$ 일 때 $y=1$ 이므로 $a_1=1$,
$x+2y=9$ 에서 $x=1,3,5,7$ 일 때 $y=4,3,2,1$ 이므로 $a_2=4$,
$x+2y=27$ 에서 $x=1,3,5,\cdots,25$ 일 때 $y=13,12,\cdots,1$ 이므로 $a_3=13$ 이다.

(2) 3^n 이 홀수이고 $2y$ 가 짝수이므로 $x+2y=3^n$ 에서 x 는 홀수이다.
그러므로 x 는 1 부터 3^n-2 까지의 홀수이다. $y=\frac{3^n-x}{2}$ 이고 $1\le y\le\frac{3^n-1}{2}$ 인 자연수이다.
따라서 자연수 y 의 개수는 $\frac{3^n-1}{2}$ 이므로 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$ 이다.

(3) $\log_3(6a_n+3)$ 에 일반항 a_n 을 대입하면

$$\log_3(6a_n+3)=\log_3\left(\frac{6(3^n-1)}{2}+3\right)=\log_3 3^{n+1}=n+1$$

따라서 구하고자 하는 값은

$$\sum_{n=1}^{99}\log_3(6a_n+3)=\sum_{n=1}^{99}(n+1)=\sum_{n=1}^{100}n\ -1=\frac{100\cdot 101}{2}-1=5049$$

[3] (1) $\mathrm{A}(a,2^{a+2}+4)$, $\mathrm{B}(b,2^{b+2}+4)$, $\mathrm{C}(c,2^c)$, $\mathrm{D}(d,2^d)$ 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 이므로 다음이 성립한다.

$$(a-b,\ 2^{a+2}-2^{b+2})=(d-c,\ 2^d-2^c)$$

$$a-b=d-c \quad \cdots\cdots ①$$

$$2^{a+2}-2^{b+2}=2^d-2^c \quad \cdots\cdots ②$$

지수법칙을 사용하여 식 ②를 인수분해하면

$$2^{b+2}(2^{a-b}-1)=2^c(2^{d-c}-1)$$

식 ①에서 $a-b=d-c\ne 0$ 이므로 $2^{a-b}-1=2^{d-c}-1\ne 0$ 이다.
따라서 $2^{b+2}=2^c$, $b+2=c$ 이다. 즉 $b=c-2$ 이다.
위 결과를 이용하여 정사각형 ABCD 의 한 변의 길이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 를 구하면 다음과 같다.(제시문 3)

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(b-c)^2+(2^{b+2}+4-2^c)^2}=\sqrt{(c-2-c)^2+(2^c+4-2^c)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$$

(2) 직선 BC 의 기울기는 $\dfrac{2^c-2^{b+2}-4}{c-b}=\dfrac{2^c-2^c-4}{2}=-2$ 이다.

그리고 직선 BC 와 직선 CD 는 서로 수직이므로 직선 CD 의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$ 이다.(제시문 4를 이용)

따라서

$$2^d-2^c=\frac{d-c}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

한편 $\overline{\mathrm{BC}}$ = $\overline{\mathrm{CD}}$ 이므로

$$(d-c)^2+\left(\frac{d-c}{2}\right)^2=20$$

$$(d-c)^2=16$$

여기서 $d-c>0$ 이므로 $d-c=4$ 이다. 따라서 $d=c+4$ 이다.

식 ③ 에 $d=c+4$ 를 대입하면 $2^{c+4}-2^c=2^c(2^4-1)=2$ 이다.

이 식으로부터 $2^c=\dfrac{2}{15}$ 이므로

양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면 $c=\log_2\dfrac{2}{15}=1-\log_2 15$ 이다.

2020학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-오전2번]

▣ 출제의도

[1] (1) 함수 $[\log x]$에 대한 이해와 적분 계산 능력을 평가한다.
(2) 다항함수의 모든 계수를 구하는 계산 능력을 평가한다.
(3) 함수 그래프의 개형에 대한 이해력 및 계산능력을 평가한다.

[2] (1) 접선의 방정식에 대한 계산능력을 평가한다.
(2) 미분과 적분의 관계식의 활용능력을 평가한다.

[3] (1) y축 대칭인 함수의 성질의 활용능력을 평가한다.
(2) 부분적분법의 계산능력을 평가한다.

▣ 문항별 배점

[1] (1) 6점 (2) 6점 (3) 8점

[2] (1) 4점 (2) 8점

[3] (1) 10점 (2) 8점

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]-(1)	구간을 나누어 $[\log t]$ 의 값을 구했으면	3
	나눈 구간으로 적분을 계산하여 4950을 구했으면	3
[1]-(2)	다항함수 $P(x)$ 을 구했으면	4
	$P(1)=0+2\cdot 0+3\cdot 1=3$ 을 구했으면	2
[1]-(3)	$x<0$ 에서 함수 $P(x)$ 가 감소함을 보였으면	3
	$x<0$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가함을 보였으면	3
	$g(-1)=\dfrac{1}{2}<P(-1)$, $g(0)=1>P(0)$ 임을 보였으면	2
[2]-(1)	조건식을 미분하여 $f'(x)=-\dfrac{1}{4}\dfrac{x}{f(x)}$ 을 구했으면	2
	접선의 기울기 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 을 구했으면.	1
	접선의 방정식 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3})+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+2$ 을 구했으면	1
[2]-(2)	$\int_0^x f(t)f'(t)\,dt=\int_0^x -\dfrac{t}{4}\,dt$ 으로 표현했으면	2
	$\int_0^x f(t)f'(t)\,dt=\dfrac{\{f(x)\}^2}{2}-\dfrac{1}{2}$, $\int_0^x\left(-\dfrac{t}{4}\right)dt=-\dfrac{x^2}{8}$ 을 구했으면	4
	$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 또는 $y=\pm\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$ 을 구했으면	2
[3]-(1)	$\int_{-t}^{t} f(x)g(x)\,dx=\int_{-t}^{0} f(x)g(x)\,dx+\int_0^t f(x)g(x)\,dx$	2
	$\int_{-t}^{0} f(x)g(x)\,dx=\int_0^t f(x)g(-x)\,dx$ 을 보였으면	3
	$g'(x)=g'(-x)$ 로부터 $g(x)+g(-x)=2$ 을 얻으면	3
	$\int_{-t}^{t} f(x)g(x)\,dx=2\int_0^t f(x)\,dx$ 을 구했으면	2
[3]-(2)	$f(x)=x\sin x=(-x)\sin(-x)=f(-x)$ 임을 보였으면	3
	$g'(x)=\dfrac{-2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{-2e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}=g'(-x)$, $g(0)=1$ 임을 보였으면	3
	$2\int_0^t x\sin x\,dx=-2t\cos t+2\sin t$ 임을 보였으면	2

▣ 모범답안

[1] (1) $[\log t] = \begin{cases} 0, & 1 \le t < 10 \\ 1, & 10 \le t < 10^2 \\ 2, & 10^2 \le t < 10^3 \\ 3, & 10^3 \le t \le 2020 \end{cases}$ 이므로 다음을 얻는다. (3점)

$\int_1^{2020} [\log t]\, dt = \int_1^{10} 0\, dx + \int_{10}^{10^2} 1\, dx + \int_{10^2}^{10^3} 2\, dt + \int_{10^3}^{2020} 3\, dt$ (1점)

$= 1(10^2 - 10) + 2(10^3 - 10^2) + 3(2020 - 10^3)$ (1점)

$= 90 + 2 \cdot 900 + 3(2020 - 10^3) = 90 + 1800 + 3060 = 4950$ (1점)

(2) (1)의 풀이에서 $[\log k]$ 에 대한 설명을 이용하면 $P(x)$ 는 다음과 같다.

$P(x) = (x^{10} - x^{11} + \cdots - x^{99}) + 2(x^{100} - x^{101} + \cdots - x^{999}) \quad + 3(x^{1000} - x^{1001} + \cdots - x^{2019} + x^{2020})$

(4점)

그러므로 모든 항의 계수의 합은 $P(1) = 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$ 이다. (2점)

(3) $P(x)$는 연속함수이다. $x < 0$ 에서 $-x > 0$ 이므로

$P'(x) = \sum_{k=1}^{2020} [\log k](-k)(-x)^{k-1} < 0$ 이다. (2점)

따라서 제시문1에 의해 $x < 0$ 에서 함수 $P(x)$ 는 감소한다. (1점)

그리고 $P(-1) = \sum_{k=1}^{2020} [\log k] = 90 + 2 \cdot 900 + 3 \cdot 1021 = 4953$, $P(0) = 0$ 이다.

$g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ 라 하자. $g(x)$는 연속함수이다. $x < 0$ 에서

$g'(x) = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} > 0$ 이므로 (1점)

제시문 1에 의해 $g(x)$는.증가한다. (2점)

그리고 $g(-1) = \dfrac{1}{2} < P(-1)$, $g(0) = 1 > P(0)$ 이다. (1점)

따라서 오직 하나의 교점을 가지므로 교점의 개수는 한 개다. (1점)

(별해)

$g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ 에 대하여 $h(x) = P(x) - g(x)$ 라 하자.

$x < 0$ 에서 $h'(x) = P'(x) - g'(x) = \sum_{k=1}^{2020} [\log k](-k)(-x)^{k-1} + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$ 이므로 $h(x)$ 는 감소한다.

(5점)

그리고 $h(-1) > 0$, $h(0) = -1$ 이다. (2점)

$h(x)$ 의 감소성과 사이값 정리에 의해 $h(x) = 0$ 은 $x < 0$ 에서 유일한 해를 가진다.

따라서 $P(x)$ 와 $g(x)$ 는 오직 하나의 교점을 가지므로 교점의 개수는 한 개다.(1점)

[2] (1) 조건식을 미분하면 $f'(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{x}{f(x)}$ 이다. (2점)

$\left(\sqrt{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. (1점)

따라서 접선의 방정식은 $y= -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3})+\frac{1}{2}= -\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$ 이다. (1점)

(2) 제시문 2에 의해 $f(x)f'(x)= -\frac{x}{4}$ ……①

조건식으로부터 $f(0)=1$ 이고 ①식의 좌변을 제시문 3에 의해 부분적분하면 (2점)

$\int_0^x f(t)f'(t)\,dt=\left[\{f(t)\}^2\right]_0^x-\int_0^x f'(t)f(t)\,dt=\{f(x)\}^2-1-\int_0^x f'(t)f(t)\,dt$ 이므로

$\int_0^x f(t)f'(t)\,dt=\frac{\{f(x)\}^2}{2}-\frac{1}{2}$ 이다. (3점)

한편 ①식의 우변을 적분하면 $\int_0^x\left(-\frac{t}{4}\right)dt= -\frac{x^2}{8}$ 이다. (2점)

따라서 ①식의 양변의 적분 결과가 같으므로

$\frac{\{f(x)\}^2}{2}-\frac{1}{2}= -\frac{x^2}{8}$. 그러므로 $\frac{y^2}{2}= -\frac{x^2}{8}+\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 이차곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $\left(\text{또는 } y= \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)$ 이다. (1점)

(별해)

조건식을 미분하면 $f'(x)= -\frac{1}{4}\frac{x}{f(x)}$, 즉 $f(x)f'(x)= -\frac{x}{4}$ 이다.

이것을 $\left\{[f(x)]^2\right\}'=2f(x)f'(t)= -\frac{x}{2}$ 로 고쳐서 양변을 적분하면 다음과 같다.(4점)

$\{f(x)\}^2=\int_0^x\frac{\{[f(t)]\}^2}{2}\,dt=\int_0^x -\frac{x}{2}\,dx= -\frac{x^2}{4}+C$ (2점)

$x=0$ 을 조건식과 위 식에 대입하면 $f(0)=1$ 과 $C=1$ 이다. (1점)

따라서 곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 또는 $y= \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ 이다. (1점)

[3] (1) $\int_{-t}^t f(x)g(x)\,dx=\int_{-t}^0 f(x)g(x)\,dx+\int_0^t f(x)g(x)\,dx$ 이다. (2점)

위 식의 우변 중 $\int_{-t}^0 f(x)g(x)\,dx$ 에 대하여 구간 $[-t,\ 0]$ 에서의 적분을 $x= -s$ 로 치환하면 $dx= -ds$ 이고 구간 $[0,\ t]$ 에서의 적분으로 바뀐다.(제시문 4) 조건 (가)를 이용하면

$\int_{-t}^0 f(x)g(x)\,dx= -\int_t^0 f(-s)g(-s)\,ds=\int_0^t f(s)g(-s)\,ds=\int_0^t f(x)g(-x)\,dx$ (3점)

이다. 따라서

$\int_{-t}^t f(x)g(x)\,dx=\int_0^t f(x)g(-x)\,dx+\int_0^t f(x)g(x)\,dx=\int_0^t f(x)\{g(-x)+g(x)\}\,dx$ (2점)

이다.

조건 (나)에서 $g'(x)=g'(-x)$ 을 부정적분하면 $g(x)= -g(-x)+C$ 이다.(C는 상수)

또한 조건 (나)의 $g(0)=1$ 로부터 $C=2$ 이므로 $g(x)+g(-x)=2$ 이다. (3점)

이것을 적용하면 $\int_{-t}^t f(x)g(x)\,dx=2\int_0^t f(x)\,dx$ 이다.

(별해)

조건 (나)에서 $g(0)=1$ 이므로 $g(x)=\int_0^x g'(t)\,dt+1$ 이다. (2점)

위 식의 적분을 $t=-s$ 로 변수변환하면 $dt=-ds$ 이고 구간 $[0,\ -x]$ 에서의 적분으로 바뀐다. 또한 $g'(t)$ 가 우함수임을 이용하면

$$\int_0^x g'(t)\,dt=-\int_0^{-x} g'(-s)\,ds=-\int_0^{-x} g'(-t)\,dt=-\int_0^{-x} g'(t)dt$$ 이다.

따라서 $\int_0^x g'(t)\,dt$ 는 기함수이다. (5점)

$f(x)$ 가 우함수이고 $f(x)\left(\int_0^x g'(s)\,ds\right)$ 는 기함수이므로

$$\int_{-t}^t f(x)g(x)\,dx=\int_{-t}^t f(x)\left(\int_0^x g'(s)\,ds+1\right)dx=\int_{-t}^t f(x)\left(\int_0^x g'(s)\,ds\right)dx+\int_{-t}^t f(x)\,dx$$

$=2\int_0^t f(x)\,dx$ 이다. (3점)

(2) $\int_{-t}^t \frac{2x\sin x}{e^x+1}\,dx=\int_{-t}^t (x\sin x)\left(\frac{2}{e^x+1}\right)dx$ 이다.

위 식의 우변의 적분에서 $f(x)=x\sin x$, $g(x)=\frac{2}{e^x+1}$ 라 하자.

$f(x)=x\sin x=(-x)\sin(-x)=f(-x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 조건 (가)를 만족시킨다. (3점)

$g'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-2e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}=g'(-x)$ 이고 $g(0)=1$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 조건 (나)를 만족시킨다. (3점)

(1)의 결과와 제시문 4를 적용하면

$$\int_{-t}^t \frac{2x\sin x}{e^x+1}\,dx=\int_{-t}^t (x\sin x)\left(\frac{2}{e^x+1}\right)dx=2\int_0^t x\sin x\,dx=[-2x\cos x]_0^t+2\int_0^t \cos x\,dx$$

$=-2t\cos t+2\sin t$ (2점)