

• 수학 영역 •

정답

1	③	2	①	3	④	4	③	5	②
6	②	7	①	8	①	9	⑤	10	④
11	②	12	③	13	②	14	③	15	⑤
16	⑤	17	④	18	⑤	19	①	20	③
21	④	22	12	23	2	24	28	25	106
26	503	27	13	28	60	29	50	30	150

해설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$z = 2 + 3i$ 이면 $\bar{z} = 2 - 3i$ 이므로 $z + \bar{z} = 4$ 이다.

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$A = x^2 + 2x - 1$, $B = x^2 - x + 3$ 에 대하여
 $2A = 2x^2 + 4x - 2$ 이므로
 $2A - B = x^2 + 5x - 5$ 이다.

3. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ 라 하면
 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 $f(1)$ 이므로
 $f(1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ 이다.
 따라서 나머지는 15 이다.

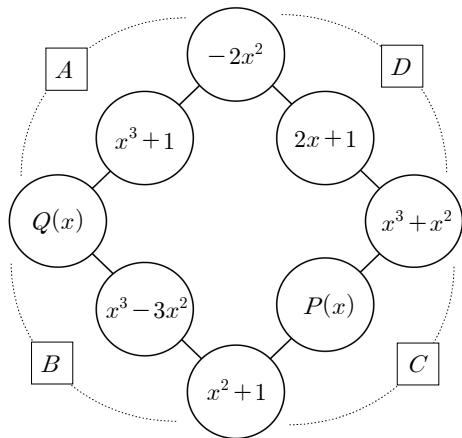
4. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2 + ax - 2 = 0$ 의 두 근의 곱이 -2 이므로 $b = -2$ 이다.
 두 근이 1과 -2 이므로 두 근의 합은 -1 이다.
 따라서 $a = 1$ 이므로 $a - b = 3$ 이다.

5. [출제의도] 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 추론하기

이차함수의 그래프와 x축이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2 - 6x + a = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 9 - a < 0$ 이므로 $a > 9$ 이다.
 따라서 정수 a 의 최솟값은 10 이다.

6. [출제의도] 다항식의 계산과 항등식 문제 해결하기



각 변의 3개의 식의 합은 $x^3 - x^2 + 2x + 1$ 이므로
 $P(x) + x^3 + x^2 + x^2 + 1 = x^3 - x^2 + 2x + 1$ 과
 $Q(x) + x^3 - 3x^2 + x^2 + 1 = x^3 - x^2 + 2x + 1$ 에서
 $P(x) = -3x^2 + 2x$, $Q(x) = x^2 + 2x$ 이다.
 따라서 $P(x) + Q(x) = -2x^2 + 4x$ 이다.

7. [출제의도] 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

$f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x + 1$ 이므로

$f(x) = (x^2 + 1)Q(x) + x + 1$ 로 나타낼 수 있고,
 $\{f(x)\}^2$
 $= (x^2 + 1)^2 \{Q(x)\}^2 + 2(x^2 + 1)(x + 1)Q(x) + (x + 1)^2$
 $= (x^2 + 1)[(x^2 + 1)\{Q(x)\}^2 + 2(x + 1)Q(x) + 1] + 2x$
 이다.

따라서 $\{f(x)\}^2$ 을 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지는 $R(x) = 2x$ 이고 $R(3) = 6$ 이다.

8. [출제의도] 복소수 계산하기

방정식 $2x^2 - 2x + 1 = 0$ 의 근은 $x = \frac{1 \pm i}{2}$ 이다.

이때, $\alpha = \frac{1+i}{2}$ 라 하면 $\alpha^2 = \frac{1+i}{2}$ 이다.

$$\alpha^4 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\alpha^4 - \alpha^2 + \alpha = -\frac{1}{4} - \frac{1+i}{2} + \frac{1+i}{2} = \frac{1}{4}$$

$\alpha = \frac{1-i}{2}$ 인 경우도 마찬가지로 성립한다.

따라서 $\alpha^4 - \alpha^2 + \alpha = \frac{1}{4}$ 이다.

[다른 풀이]

$$\alpha^2 = \alpha - \frac{1}{2} \text{ 이므로 } \alpha^4 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4}$$

$$\alpha^4 - \alpha^2 + \alpha = \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

9. [출제의도] 복소수의 성질 이해하기

$z = x^2 - (5-i)x + 4 - 2i$
 $= (x^2 - 5x + 4) + (x-2)i$ 이고
 $\bar{z} = -z$ 가 성립하려면 z 의 실수부분이 0 이어야 한다.

z 의 실수부분이 $x^2 - 5x + 4$ 이므로
 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 의 근은 $x = 1, 4$ 이다.
 따라서 모든 실수 x 값의 합은 5 이다.

10. [출제의도] 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

조립제법을 이용하면

$\frac{1}{3}$	3	-7	5	1
		1	-2	1
	3	-6	3	2

위의 조립제법에 의하여
 $3x^3 - 7x^2 + 5x + 1 = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 - 6x + 3) + 2$
 $= (3x - 1)(x^2 - 2x + 1) + 2$

이다.
 $\boxed{\text{가}} = 3x^2 - 6x + 3$
 $\boxed{\text{나}} = x^2 - 2x + 1$ 이므로

$f(x) = 3x^2 - 6x + 3$
 $g(x) = x^2 - 2x + 1$ 이다.
 따라서 $f(2) + g(2) = 4$ 이다.

11. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 식의 값 추론하기

$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$ 이므로
 $x - y = 2$, $x^3 - y^3 = 12$ 를 대입하면,
 $12 = 2^3 + 3xy \cdot 2$
 $6xy = 4$ 이다.
 따라서 $xy = \frac{2}{3}$ 이다.

12. [출제의도] 이차함수 이해하기

직선 $y = -x + a$ 가 이차함수 $y = x^2 + bx + 3$ 의 그래프에 접하므로
 이차방정식 $x^2 + (b+1)x + 3 - a = 0$ 이 중근을 갖는다.
 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D = (b+1)^2 - 4(3-a) = 0$ 이고
 a 를 b 에 대하여 정리하면
 $a = -\frac{1}{4}(b+1)^2 + 3$ 이므로
 실수 a 의 최댓값은 3 이다.

13. [출제의도] 다항식의 성질을 이용하여 실생활 문제 해결하기

실린더의 개수가 M 인 두 자동차 A, B 의 보어를 각각 R_A, R_B 라 하고,
 스트로크를 각각 H_A, H_B 라 하자.

$$R_A = \frac{2}{3}R_B, H_A = \frac{9}{8}H_B \text{ 이므로}$$

$$W_A = \pi \left(\frac{R_A}{2}\right)^2 H_A M = \pi \left(\frac{\frac{2}{3}R_B}{2}\right)^2 \frac{9}{8}H_B M = \frac{1}{2}W_B$$

따라서 $\frac{W_A}{W_B} = \frac{1}{2}$ 이다.

14. [출제의도] 이차함수의 최솟값 문제 해결하기

i) $p = -1$ 일 때, $f(x) = x^2 + 4x$ 이므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서 최솟값은 0 이다. $g(-1) = 0$

ii) $p = \frac{1}{2}$ 일 때, $f(x) = x^2 - 2x$ 이므로 $0 \leq x \leq 2$

에서 최솟값은 -1 이다. $g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

따라서 $g(-1) + g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

15. [출제의도] 항등식 문제 해결하기

(가), (나)에 의하여,
 $4x(x+1)f(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b$ 이다.
 i) 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $b=0$
 ii) 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $a=3$
 따라서 $4x(x+1)f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$
 $= x(x+1)(x+2)$

항등식의 성질에 의하여 $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ 이다.

조건 (가)에 의해 $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ 이다.

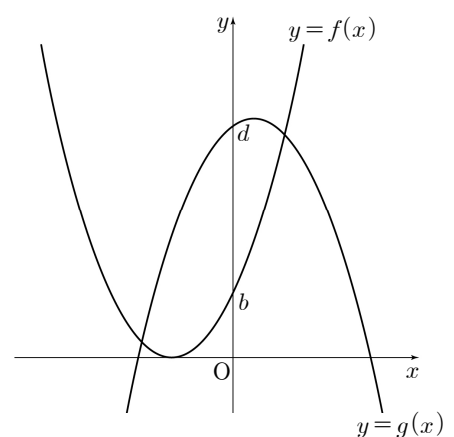
따라서 $g(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는 $g(4) = 24$ 이다.

[다른 풀이]

(가), (나)에 의하여,
 $4x(x+1)f(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b$ 이다.
 i) 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $b=0$
 ii) 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $a=3$
 따라서 $4x(x+1)f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$
 $= x(x+1)(x+2)$

양변에 $x=4$ 를 대입하면
 $80f(4) = 120$ 이므로
 $f(4) = \frac{3}{2}$ 이고, $g(4) = 16f(4) = 24$ 이다.

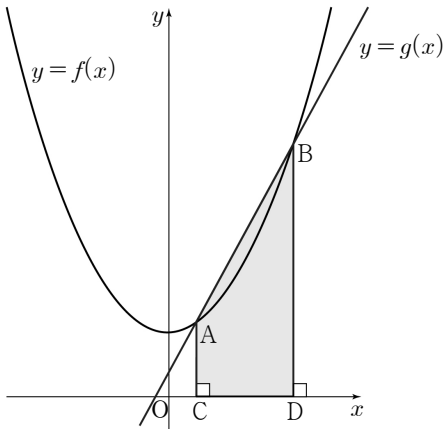
16. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계 추론하기



ㄱ. $y = f(x)$ 의 그래프가 x축에 접하므로
 방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 $D = a^2 - 4b = 0$ 이다.

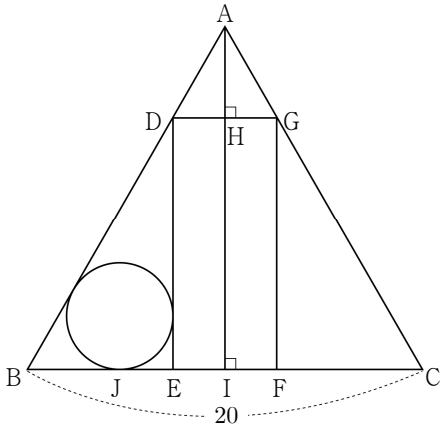
ㄴ. ㄱ에 의하여 $b = \frac{a^2}{4}$ 이므로 $a^2 - 4d = 4b - 4d$ 이다.
 $b - d < 0$ 이므로 $a^2 - 4d < 0$ 이다.
 ㄷ. 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $f(x) = g(x)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 $x^2 + ax + b = -x^2 + cx + d$
 $2x^2 + (a-c)x + b-d = 0$ 의 판별식
 $D = (a-c)^2 - 8(b-d) > 0$ 이다.
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 교점 이해하기



두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표를 구하면
 $x^2 + n^2 = 2nx + 1, x^2 - 2nx + n^2 - 1 = 0$ 이고
 $x = n-1$ 또는 $x = n+1$ 이다.
 따라서
 점 $A(n-1, 2n^2-2n+1), B(n+1, 2n^2+2n+1)$
 라 하면 $C(n-1, 0), D(n+1, 0)$ 이다.
 사각형 ACDB의 넓이는
 $\frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD}) \times \overline{CD} = \frac{1}{2}(4n^2+2) \times 2 = 4n^2+2$ 이다.
 따라서 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n 은
 $4n^2+2 = 66, n^2 = 16$ 이므로 $n = 4$ 이다.

18. [출제의도] 이차함수의 최댓값 이해하기



점 A에서 선분 DG, 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 원과 선분 BC와의 교점을 J라 하자.
 선분 DH의 길이를 a ($0 < a < 10$)라 하면 선분 AH의 길이는 $\sqrt{3}a$ 이고 선분 DE의 길이는 $10\sqrt{3} - \sqrt{3}a$ 이다.
 직사각형 DEFG의 넓이를 S 라 하면
 $S = 2a(10\sqrt{3} - \sqrt{3}a) = -2\sqrt{3}(a-5)^2 + 50\sqrt{3}$
 따라서 $a = 5$ 일 때 직사각형 DEFG의 넓이는 최대이다.
 원의 반지름의 길이를 b 라 하면
 $\overline{EI} = a, \overline{JE} = b, \overline{BJ} = \sqrt{3}b$ 이므로
 $a + (1 + \sqrt{3})b = 10$ 이다.
 $a = 5$ 일 때 $b = \frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$ 이므로 원의 둘레는

$5(\sqrt{3}-1)\pi$ 이다.
 p, q 는 유리수이므로 $p = 5, q = -5$ 이고
 $p^2 + q^2 = 50$ 이다.

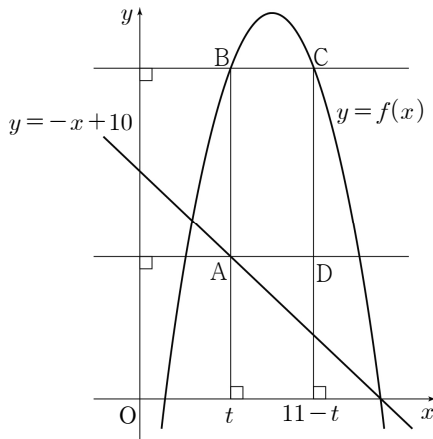
19. [출제의도] 이차함수를 이용한 문제 해결하기

$f(x) = x^2 - x + k$ 라 하면
 방정식 $f(x) = x+1$ 의 두 실근이 $x = \alpha, \beta$ 이므로
 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x+1$ 은
 $A(\alpha, f(\alpha)), C(\beta, f(\beta))$ 에서 만난다.
 직선 $y = x+1$ 의 기울기는 1이므로 삼각형 ABC는
 직각 이등변삼각형이며 $f(\alpha) = \alpha+1, f(\beta) = \beta+1$
 이다.

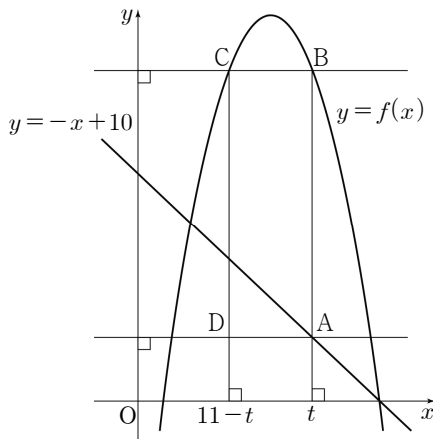
삼각형의 넓이는 $(\beta-\alpha)^2 \times \frac{1}{2} = 8$ 이고, $\alpha < \beta$ 이므로
 $\beta - \alpha = 4$ 이다.
 한편, 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 2$ 이므로
 $\alpha = -1, \beta = 3$ 이다.
 따라서 $k = -2$ 이므로 $f(x) = x^2 - x - 2$,
 $f(6) = 6^2 - 6 - 2 = 28$ 이다.

20. [출제의도] 이차함수의 최댓값, 최솟값 추론하기

이차방정식 $-x^2 + 11x - 10 = -x + 10$ 의 근은
 $x = 2, 10$ 이므로 두 점 $(2, 8)$ 과 $(10, 0)$ 에서 두 그래프가 만난다.
 $A(t, -t+10), B(t, -t^2+11t-10)$
 라 하면 선분 AB의 길이는
 $-t^2 + 11t - 10 - (-t + 10) = -t^2 + 12t - 20$ 이다.
 i) $2 < t < \frac{11}{2}$ 인 경우



선분 BC의 길이는 $2 \times (\frac{11}{2} - t) = 11 - 2t$ 이다.
 직사각형 BADC의 둘레의 길이는
 $2(-t^2 + 10t - 9) = -2(t-5)^2 + 32$ 이다.
 $2 < t < \frac{11}{2}$ 에서 직사각형 BADC의 둘레의 길이의
 최댓값은 32 이다.
 ii) $\frac{11}{2} < t < 10$ 인 경우



선분 BC의 길이는 $2 \times (t - \frac{11}{2}) = 2t - 11$ 이다.
 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(-t^2 + 14t - 31) = -2(t-7)^2 + 36$ 이다.
 $\frac{11}{2} < t < 10$ 에서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의
 최댓값은 36 이다.
 따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은
 36 이다.

21. [출제의도] 나머지정리 이해하기

(가)에 의하여 $f(x)$ 를 $x+2, x^2+4$ 로 나누었을 때
 의 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라고 하면 나머지가
 $3p^2$ 으로 같으므로
 $f(x) = (x+2)Q_1(x) + 3p^2$
 $= (x^2+4)Q_2(x) + 3p^2$ 이다.
 사차항의 계수가 1인 $f(x)$ 에서는 $Q_1(x)$ 는 x^2+4 를
 인수로 갖고 $Q_2(x)$ 는 $x+2$ 를 인수로 가져야 하므로
 $Q_1(x)$ 와 $Q_2(x)$ 의 공통인수를 $x+a$ 라 하면
 $f(x) = (x+2)(x^2+4)(x+a) + 3p^2$ 이다.
 (나)에 의하여 $f(1) = f(-1)$ 이므로 $a = -2$ 이고
 $f(x) = x^4 - 16 + 3p^2$ 이다.
 (다)에 의하여 $f(\sqrt{p}) = 0$ 이므로
 $p^2 + 3p^2 - 16 = 0, p^2 = 4$ 이다.
 따라서 p 는 양수이므로 $p = 2$ 이다.

22. [출제의도] 복소수 계산하기

$i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 = i - 2 - 3i + 4 + 5i = 2 + 3i$
 따라서 $a = 2, b = 3$ 이므로 $3a + 2b = 12$ 이다.

23. [출제의도] 다항식 계산하기

$(3x+ay)^3 = 27x^3 + 27ax^2y + 9a^2xy^2 + a^3y^3$ 에서
 x^2y 의 계수는 $27a$ 이다.
 따라서 $a = 2$ 이다.

24. [출제의도] 인수분해를 이용하여 문제 해결하기

x^3+1 을 $x-3$ 으로 나누었을 때 몫과 나머지를 각
 각 $Q(x), R$ 라 하면
 $x^3+1 = (x-3)Q(x) + R$ 이다.
 $x = 3$ 을 대입하면 $R = 27+1 = 28$ 이다.
 $x = 2020$ 를 대입하면
 $2020^3+1 = 2017Q(2020) + 28$ 이다.
 $(2020+1)(2020^2-2020+1) = 2020^3+1$ 이므로
 $(2020+1)(2020^2-2020+1)$ 를 2017로 나누었을 때
 나머지는 28 이다.

25. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$f(x)+2$ 는 $x+2$ 로 나누어떨어지므로
 $f(x)+2 = (x+2)(x+k)$ (k 는 상수) ㉠
 라 할 수 있다.
 $f(x)-2$ 는 $x-2$ 로 나누어떨어지므로 $f(2) = 2$ 이다.
 ㉠의 식에 $x = 2$ 를 대입하면
 $f(2)+2 = 4(2+k)$ 이므로 $k = -1$ 이다.
 $f(x) = (x+2)(x-1) - 2$ 이므로
 $f(10) = 106$ 이다.

26. [출제의도] 이차방정식 이해하기

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,
 $\alpha + \beta = 16$ 이다.
 $f(2020-8x) = 0$ 의 두 근을 α', β' 이라 하면
 $2020 - 8\alpha' = \alpha, 2020 - 8\beta' = \beta$
 $\alpha' = \frac{2020-\alpha}{8}, \beta' = \frac{2020-\beta}{8}$
 $f(2020-8x) = 0$ 의 두 근의 합 $\alpha' + \beta'$ 은
 $\alpha' + \beta' = 505 - \frac{1}{8}(\alpha + \beta) = 505 - 2 = 503$

27. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제 해결하기

A의 x 좌표를 α , B의 x 좌표를 β 라고 하자.

α, β 는 $x^2 - x - k = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -k$ 이다.

$\alpha > 0, \beta < 0$ 이므로

$$S_1 = \frac{1}{2}\alpha^3, S_2 = -\frac{1}{2}\beta^3 \text{이다.}$$

$$S_1 - S_2 = \frac{1}{2}(\alpha^3 + \beta^3) = 20 \text{이고}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 40 \text{이다.}$$

$$\alpha + \beta = 1 \text{에서 } \alpha\beta = -13 \text{이므로 } k = 13$$

28. [출제의도] 이차함수 추론하기

$$f(x) = -x^2 + px - q = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4} - q$$

(가)에 의하여 함수 $f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 $\frac{p^2}{4} - q = 0$ 이다.

$$\text{따라서 } q = \frac{p^2}{4}, f(x) = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

$f(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표가 $\frac{p}{2}$ 이므로

(나)에 의하여 $-p \leq x \leq p$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(-p)$ 이다.

$$f(-p) = -\frac{9p^2}{4} = -54 \text{이고 } p^2 = 24 \text{이다.}$$

$$q = \frac{p^2}{4} \text{이므로 } q = 6 \text{이고, 따라서 } p^2 + q^2 = 60 \text{이다.}$$

29. [출제의도] 이차방정식의 근 이해하기

꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고 $\overline{JL} = x (x > 0)$ 라 하자.

$\triangle EJI$ 는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EL} = x$ 이고

$\triangle EJI$ 의 넓이는 x^2 이다.

$\overline{AJ} = 1 - x$ 이므로 $\triangle AKJ$ 의 넓이는 $\frac{(1-x)^2}{2}$ 이다.

$\triangle AKJ$ 의 넓이가 $\triangle EJI$ 의 넓이의 $\frac{3}{2}$ 배이므로

$$\frac{(1-x)^2}{2} = \frac{3}{2}x^2, 2x^2 + 2x - 1 = 0 \text{이고,}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} (x > 0) \text{이다.}$$

$\overline{OE} = \sqrt{2}k$ 이고,

$$\overline{OE} = \overline{OL} + \overline{EL} = 1 + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

이므로 $\sqrt{2}k = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ 이다.

$$k = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{이므로 } p = q = \frac{1}{4} \text{이고}$$

$$100(p+q) = 50 \text{이다.}$$

30. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$$\left\{i^n + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m = \{i^n + (-i)^{2n}\}^m = \{i^n + (-1)^n\}^m$$

$f(n) = i^n + (-1)^n$ 이라 하자.

i) $n = 4k - 3 (k \text{는 자연수})$ 일 때

$$f(n) = i - 1 \text{이고}$$

$$\{f(n)\}^4 = -2^2, \{f(n)\}^{12} = -2^6, \{f(n)\}^{20} = -2^{10},$$

...

이므로 순서쌍 (m, n) 은

$(4, n), (12, n), (20, n), (28, n), (36, n), (44, n)$
6개이다.

이때 50 이하의 자연수 $n = 1, 5, 9, \dots, 45, 49$ 는 13개이므로 만족하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는 78개이다.

ii) $n = 4k - 1 (k \text{는 자연수})$ 일 때

$$f(n) = -i - 1 \text{이고}$$

$$\{f(n)\}^4 = -2^2, \{f(n)\}^{12} = -2^6, \{f(n)\}^{20} = -2^{10},$$

...

이므로 순서쌍 (m, n) 은

$(4, n), (12, n), (20, n), (28, n), (36, n), (44, n)$
6개이다.

이때 50 이하의 자연수 $n = 3, 7, 11, \dots, 47$ 은 12개이므로 만족하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는 72개이다.

iii) $n = 4k - 2, n = 4k (k \text{는 자연수})$ 일 때

$f(n)$ 은 0 또는 2이므로 $\{f(n)\}^m \geq 0$ 이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 순서쌍 (m, n) 은 존재하지 않는다.

따라서 50 이하의 자연수 m, n 에 대하여

$\left\{i^n + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m$ 이 음의 실수인 순서쌍 (m, n) 의 개수는 150이다.