• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	⑤	**3**	①	**4**	⑤	**5**	①
6	①	**7**	④	**8**	②	**9**	③	**10**	②
11	③	**12**	③	**13**	⑤	**14**	④	**15**	⑤
16	8	**17**	32	**18**	9	**19**	11	**20**	240
21	170	**22**	30						

1. [출제의도] 지수법칙 이용하여 계산하기

$(27\times\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}=\left(3^3\times 2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=3^2\times 2=18$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2+7$에서 $f'(1)=10$

3. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=1$$

4. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_2=1$이므로 $a\neq 0$이고 $r\neq 0$

$a_5=2(a_3)^2$에서 $ar^4=2a^2r^4$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{1}{2}r=1$에서 $r=2$

따라서 $a_6=\frac{1}{2}\times 2^5=16$

5. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

x, $x-6$은 로그의 진수이므로 $x>0$, $x-6>0$에서

$x>6$ ⋯ ㉠

$\log_2 x\leq 4-\log_2(x-6)$

$\log_2 x(x-6)\leq \log_2 16$

$x^2-6x-16\leq 0$에서 $-2\leq x\leq 8$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $6<x\leq 8$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $7+8=15$

6. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

에서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$(2\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+2\cos\theta)$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+5\sin\theta\cos\theta=2-\frac{15}{8}=\frac{1}{8}$

7. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$이고 $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 3}\{f(x)-g(x)\}=0$

$f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이므로 $f(3)=g(3)$이고

$f(3)=2$이므로 $g(3)=2$

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$$
$$=f'(3)-g'(3)=1$$

$f'(3)=1$이므로 $g'(3)=0$

$g(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=2x+a$

$g(3)=9+3a+b=2$, $g'(3)=6+a=0$

에서 $a=-6$, $b=11$

따라서 $g(1)=1-6+11=6$

8. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}+b_{2n}=0$이고

$a_{2n+1}+b_{2n+1}=3(a_{2n-1}+b_{2n-1})$이다.

$$\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=1}^{8}b_n=\sum_{n=1}^{8}(a_n+b_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{4}(a_{2n-1}+b_{2n-1})$$
$$=\frac{(a_1+b_1)(3^4-1)}{3-1}$$
$$=80a_1=160$$

에서 $a_1=2$

따라서 $a_3+b_3=3(a_1+b_1)=12$

9. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

점 B의 좌표가 $\mathrm{B}(0,\ 2^a)$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=2^a$

$\overline{\mathrm{OB}}=3\times\overline{\mathrm{OH}}$에서 $\overline{\mathrm{OH}}=\frac{2^a}{3}$

점 A의 x좌표를 k라 하면 $\mathrm{A}\left(k,\ \frac{2^a}{3}\right)$

점 A는 곡선 $y=2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$2^{-k+a}=\frac{2^a}{3}$에서 $2^{-k}=\frac{1}{3}$, $2^k=3$

또한 점 A는 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로

$\frac{2^a}{3}=2^k-1=3-1=2$에서 $2^a=6$

따라서 $a=\log_2 6$

10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 위치를 $x(t)$라 하면

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이므로 $x(0)=0$

$$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$$
$$=\int_0^t 3(t-2)(t-a)dt$$
$$=\int_0^t\{3t^2-3(a+2)t+6a\}dt$$
$$=t^3-\frac{3}{2}(a+2)t^2+6at$$

점 P가 $0<t<2$, $t>a$에서 양의 방향으로,

$2<t<a$에서 음의 방향으로 움직이고

$t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이

한 번뿐이므로 $x(a)=0$

$a^3-\frac{3}{2}(a+2)a^2+6a^2=0$에서 $a>2$이므로 $a=6$

따라서 $v(8)=3\times 6\times 2=36$

11. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $y=\sin kx$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$

$0\leq x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin kx=\frac{1}{3}$의

서로 다른 실근의 개수는

$0\leq x<2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\frac{1}{3}$이

만나는 점의 개수와 같다.

$1\leq l\leq k$인 자연수 l에 대하여

$\frac{2(l-1)}{k}\pi\leq x<\frac{2l}{k}\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와

직선 $y=\frac{1}{3}$이 만나는 점의 개수는 2이고

$0\leq x<2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\frac{1}{3}$이

만나는 점의 개수가 8이므로

$2k=8$에서 $k=4$

$0\leq x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x=\frac{1}{3}$의 서로 다른

실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

α_1, α_2, α_3, ⋯ , α_8이라 하자.

함수 $y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

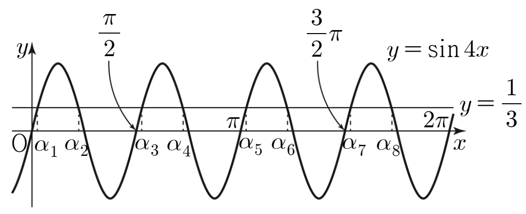
$\alpha_2=\frac{\pi}{4}-\alpha_1$, $\alpha_3=\frac{\pi}{2}+\alpha_1$, $\alpha_4=\frac{3}{4}\pi-\alpha_1$,

$\alpha_5=\pi+\alpha_1$, $\alpha_6=\frac{5}{4}\pi-\alpha_1$, $\alpha_7=\frac{3}{2}\pi+\alpha_1$,

$\alpha_8=\frac{7}{4}\pi-\alpha_1$

따라서 구하는 모든 해의 합은 7π

<참고>



12. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=(a_1+a_5)+(a_2+a_6)+(a_3+a_7)+(a_4+a_8)$$
$$=15\times 4=60$$

$\sum\limits_{n=1}^{4}a_n=6$이므로 $\sum\limits_{n=5}^{8}a_n=54$

조건 (나)에 의하여

$a_6=a_5+5$,

$a_7=a_6+6=a_5+11$,

$a_8=a_7+7=a_5+18$

따라서 $\sum\limits_{n=5}^{8}a_n=4a_5+34=54$에서 $a_5=5$

13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$G(x)=\int_1^x(x-t)f(t)dt$라 하자.

함수 $G(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_1^x(x-t)f(t)dt=\lim\limits_{x\to 2}\frac{G(x)}{x-2}=3$에서

$G(2)=0$, $G'(2)=3$

$G(x)=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$에서

$G'(x)=\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_1^x f(t)dt$

$G'(2)=\int_1^2 f(t)dt=3$

$G(2)=2\int_1^2 f(t)dt-\int_1^2 tf(t)dt=0$에서

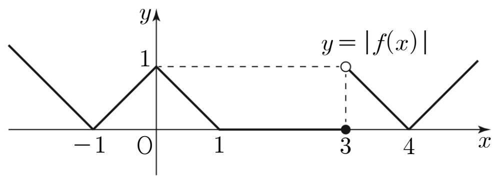
$\int_1^2 tf(t)dt=2\int_1^2 f(t)dt=6$

따라서

$$\int_1^2 (4x+1)f(x)dx = 4\int_1^2 xf(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$
$$= 4\times 6+3=27$$

14. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0-}|f(x+3)|=0$,

$g(0)=|f(0+3)|=0$에서 $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=g(0)$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1$, $f(0)=-1$에서 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)\neq f(0)$

$k\neq -3$일 때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

$k=-3$일 때 $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

그러므로 모든 정수 k에 대하여

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0-} g(x)$,

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)g(x)=-\lim\limits_{x\to 0+} g(x)$,

$f(0)g(0)=-g(0)$

에서 $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=-\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=-g(0)$

모든 정수 k에 대하여 $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k의 값은 -4, -2, -1, 1

(ⅰ) $k=-4$ 또는 $k=1$일 때

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)x}{x}=-1$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅱ) $k=-2$일 때

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅲ) $k=-1$일 때

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 정수 k의 값의 합은 $-4+(-2)+1=-5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

15. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

$\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACB)=\frac{10^2+\overline{BC}^2-k^2}{2\times 10\times\overline{BC}}=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{BC}}\right),$$

$$\cos(\angle DCA)=\frac{10^2+\overline{CD}^2-k^2}{2\times 10\times\overline{CD}}=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{CD}}\right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.

$$\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{100-k^2}{\overline{BC}}\right)=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{100-k^2}{\overline{CD}}\right)$$

$$\overline{BC}-\overline{CD}=(100-k^2)\times\left(\frac{1}{\overline{CD}}-\frac{1}{\overline{BC}}\right)$$

$$\overline{BC}-\overline{CD}=(100-k^2)\times\frac{\overline{BC}-\overline{CD}}{\overline{BC}\times\overline{CD}}$$

$\overline{AC}=10<2R$이므로 $\overline{BC}\neq\overline{CD}$

그러므로 $\overline{BC}\times\overline{CD}=100-k^2$

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)$$

$$=\frac{1}{2}\{k^2+(100-k^2)\}\sin(\angle BAD)$$

$$=50\sin(\angle BAD)=40$$

에서 $\sin(\angle BAD)=\boxed{\frac{4}{5}}$이다.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}=2R$에서 $\overline{BD}=\dfrac{8}{5}R$이므로

$\overline{BD}:R=\boxed{\frac{8}{5}}:1$

따라서 $f(k)=100-k^2$, $p=\dfrac{4}{5}$, $q=\dfrac{8}{5}$이므로

$$\frac{f(10p)}{q}=(100-8^2)\times\frac{5}{8}=\frac{45}{2}$$

16. [출제의도] 로그의 성질 이용하여 계산하기

$$\log_2 9\times\log_3 16=2\log_2 3\times 4\log_3 2$$
$$=8\times\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}=8$$

17. [출제의도] 정적분 이해하기

곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^2|-x^2+4x-4|dx$$
$$=\int_0^2(x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

따라서 $12S=32$

18. [출제의도] 부정적분을 활용하여 문제해결하기

$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=3x-6$

$$f(x)=\int(3x-6)dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2-6x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

$F(0)=2f(0)=30$에서 $f(0)=15$이므로 $C=15$

따라서 $f(2)=6-12+15=9$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^4-4x^3+16x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x+1)(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-11$	↗	$a+16$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-11$을 갖는다.

모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^4-4x^3+16x+a\geq 0$이 항상 성립하기 위해서는

$a-11\geq 0$, $a\geq 11$

따라서 a의 최솟값은 11

20. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

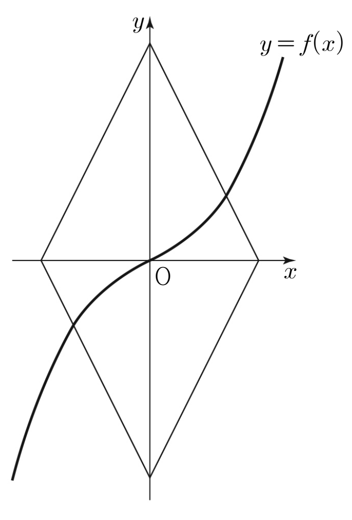
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수는 1 또는 3이다.

(ⅰ) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 1인 경우

모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로

함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



(ⅱ) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 3인 경우

$f(x)=x(x-a)(x+a)\ (a>0)$이라 하자.

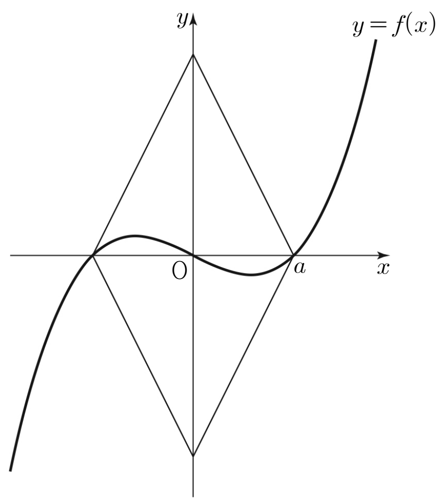
두 점 $(t,0)$, $(0,-2t)$를 지나는 직선의 기울기는 t의 값에 관계없이 2이므로

$f'(a)$의 값에 따라 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되는 k의 개수가 달라진다.

(a) $f'(a)\leq 2$일 때

모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로

함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

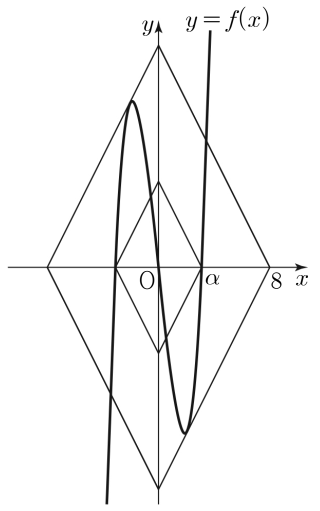


(b) $f'(a)>2$일 때

곡선 $y=f(x)$의 기울기가 2인 두 접선의 x절편을 각각 β, $-\beta(\beta>a)$라 하면

$$g(t)=\begin{cases}2 & (0<t<a \text{ 또는 } t>\beta)\\ 4 & (t=a \text{ 또는 } t=\beta)\\ 6 & (a<t<\beta)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=a$, $t=\beta$에서 불연속이므로 $a=\alpha$, $\beta=8$



함수 $g(t)$가 $t=8$에서 불연속이므로

두 직선 $y=2x+16$과 $y=2x-16$은

곡선 $y=f(x)$에 접한다.

직선 $y=2x-16$이 곡선 $y=f(x)$에 접하는 점의 x좌표를 $p(0<p<\alpha)$라 하면

$p^3-\alpha^2p=2p-16$ ⋯ ㉠

$f'(x)=3x^2-\alpha^2$이므로 $f'(p)=3p^2-\alpha^2=2$

에서 $\alpha^2=3p^2-2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$p^3-(3p^2-2)p=2p-16$, $-2p^3=-16$

에서 $p=2$, $\alpha^2=10$이므로 $f(x)=x^3-10x$

따라서 $\alpha^2\times f(4)=10\times(4^3-10\times4)=240$

21. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

$a_{2m}=-a_m$에서 $a_m+md=-a_m$

$2a_m=-md$이므로

m과 d 중에서 적어도 하나는 짝수이다.

m이 짝수, 즉 $m=2p$(p는 자연수)라 하면

$$\begin{aligned}a_{2m}+a_m&=a_{4p}+a_{2p}\\&=\{a_1+(4p-1)d\}+\{a_1+(2p-1)d\}\\&=2\{a_1+(3p-1)d\}\\&=2a_{3p}=0\end{aligned}$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 m은 홀수이고 d는 짝수이다.

$m=2l-1$(l은 자연수)라 하면

$a_{4l-2}=-a_{2l-1}$에서

$$\begin{aligned}a_{3l-1}&=a_{4l-2}-(l-1)d\\&=-a_{2l-1}-(l-1)d\\&=-a_{3l-2}\end{aligned}$$

이고 $d>0$이므로

$1\le n\le 3l-2$일 때 $a_n<0$,

$n\ge 3l-1$일 때 $a_n>0$이다.

$$\sum_{k=m}^{2m}|a_k|=\sum_{k=2l-1}^{4l-2}|a_k|$$

$=-a_{2l-1}-a_{2l}-a_{2l+1}-\cdots-a_{3l-2}$

$+a_{3l-1}+a_{3l}+a_{3l+1}+\cdots+a_{4l-2}$

$=-a_{2l-1}-(a_{2l-1}+d)-(a_{2l-1}+2d)-\cdots-\{a_{2l-1}+(l-1)d\}$

$+(a_{2l-1}+ld)+\{a_{2l-1}+(l+1)d\}+\cdots+\{a_{2l-1}+(2l-1)d\}$

$=-\{1+2+3+\cdots+(l-1)\}d$

$+\{l+(l+1)+(l+2)+\cdots+(2l-1)\}d$

$=-\dfrac{l(l-1)}{2}d+\dfrac{l\{l+(2l-1)\}}{2}d$

$=l^2d=128$

l은 자연수이고 d는 짝수이므로 모든 순서쌍 (l,d)는

$(1,128)$, $(2,32)$, $(4,8)$, $(8,2)$이다.

따라서 모든 d의 값의 합은 $2+8+32+128=170$

22. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$g(x)=\displaystyle\int_0^x\{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는

0 또는 1 또는 2이다.

(ⅰ) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로

$g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)\ge0$

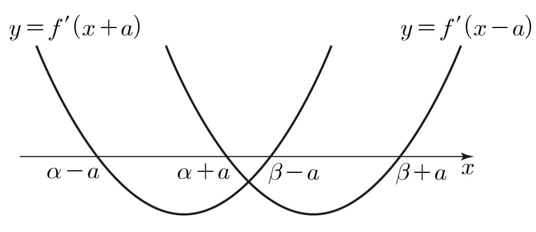
함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)\ (\alpha<\beta)$라 하자.

(a) $\alpha+a<\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	⋯	$\alpha-a$	⋯	$\alpha+a$	⋯	$\beta-a$	⋯	$\beta+a$	⋯
$f'(x+a)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

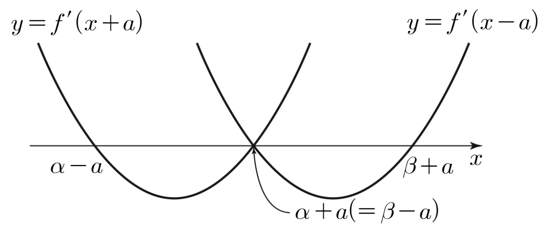
함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta-a$, $x=\beta+a$에서

극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $\alpha+a=\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	⋯	$\alpha-a$	⋯	$\alpha+a$ $(=\beta-a)$	⋯	$\beta+a$	⋯
$f'(x+a)$	+	0	−	0	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	0	−	0	+
$g'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta+a$에서만 극값을 가지므로 조건에 의하여

$(\beta+a)-(\alpha-a)=\dfrac{13}{2}-\dfrac{1}{2}=6$

$\beta-\alpha=2a$이므로

$(\beta+a)-(\alpha-a)=(\beta-\alpha)+2a=4a$

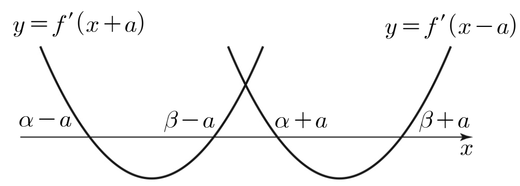
$4a=6$에서 $a=\dfrac{3}{2}$

그러므로 $\alpha-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$에서 $\alpha=2$이고,

$\beta+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}$에서 $\beta=5$이다.

(c) $\beta-a<\alpha+a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	⋯	$\alpha-a$	⋯	$\beta-a$	⋯	$\alpha+a$	⋯	$\beta+a$	⋯
$f'(x+a)$	+	0	−	0	+	+	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	+	+	0	−	0	+
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a$, $x=\beta-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta+a$에서

극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(x)=3(x-2)(x-5)$

$$\begin{aligned}f(x)&=\int(3x^2-21x+30)dx\\&=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $f(x)=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x-\dfrac{1}{2}$

따라서 $a\times f(1)=\dfrac{3}{2}\times\left(1-\dfrac{21}{2}+30-\dfrac{1}{2}\right)=30$

[확률과 통계]

23	④	**24**	②	**25**	③	**26**	⑤	**27**	①
28	④	**29**	115	**30**	720				

23. [출제의도] 중복조합 계산하기

${}_{n}\mathrm{H}_{2}={}_{n+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{9}\mathrm{C}_{2}$에서 $n+1=9$, $n=8$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

다항식 $(x+2)^{n}$의 전개식에서

일반항은 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}x^{r}2^{n-r}$

x^{2}의 계수는 $r=2$일 때이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{2}\times 2^{n-2}$

x^{3}의 계수는 $r=3$일 때이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{3}\times 2^{n-3}$

${}_{n}\mathrm{C}_{2}\times 2^{n-2}={}_{n}\mathrm{C}_{3}\times 2^{n-3}$

$\dfrac{n!}{2!\times(n-2)!}\times 2=\dfrac{n!}{3!\times(n-3)!}$

$6=n-2$, $n=8$

25. [출제의도] 중복순열 이해하기

함수 $f:X\rightarrow Y$의 개수는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같다.

(i) $x\leq 3$일 때

$x\times f(x)\leq 10$을 만족시키는 $f(x)$의 값은 1 또는 2 또는 3이다.

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_{3}\Pi_{3}=3^{3}=27$

(ii) $x\geq 4$일 때

$x\times f(x)\leq 10$을 만족시키는 $f(x)$의 값은 1 또는 2이다.

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_{2}\Pi_{2}=2^{2}=4$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $27\times 4=108$

26. [출제의도] 원순열 이해하기

조건 (가)에서 4명의 1학년 학생과 4명의 2학년 학생은 원 모양의 탁자에 교대로 둘러앉아야 한다.

4명의 1학년 학생이 앉는 경우의 수는 서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=6$

조건 (나)에서 A와 B는 이웃하므로

학생 B가 앉는 경우의 수는 2

학생 B를 제외한 3명의 2학년 학생이 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times 2\times 6=72$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)에서

(i) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 A가 적힌 공인 경우

조건 (나)에서 남은 5개의 공을 상자에 넣는 경우의 수는

3개의 문자 B, B, C를 X, X, X로 놓고 5개의 문자 D, D, X, X, X를 일렬로 나열한 후 X의 자리에 왼쪽부터 순서대로 B, B, C 또는 B, C, B를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!\times 3!}\times 2=20$

(ii) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 B가 적힌 공인 경우

남은 5개의 공을 상자에 넣는 경우의 수는 5개의 문자 A, B, C, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!}=60$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$20+60=80$

28. [출제의도] 중복조합을 이용하여 추론하기

조건 (가)의 $a+b+c+d+e=10$과

조건 (나)의 $-2\leq a-b+c-d+e\leq 2$에서

$8\leq 2a+2c+2e\leq 12$

$4\leq a+c+e\leq 6$

(i) $a+c+e=4$일 때

$b+d=6$이고, 구하는 모든 순서쌍 (a,b,c,d,e)의 개수는

두 방정식 $a+c+e=4$, $b+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_{3}\mathrm{H}_{4}\times{}_{2}\mathrm{H}_{6}={}_{6}\mathrm{C}_{4}\times{}_{7}\mathrm{C}_{6}=15\times 7=105$

(ii) $a+c+e=5$일 때

$b+d=5$이고, 구하는 모든 순서쌍 (a,b,c,d,e)의 개수는

두 방정식 $a+c+e=5$, $b+d=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_{3}\mathrm{H}_{5}\times{}_{2}\mathrm{H}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{5}\times{}_{6}\mathrm{C}_{5}=21\times 6=126$

(iii) $a+c+e=6$일 때

$b+d=4$이고, 구하는 모든 순서쌍 (a,b,c,d,e)의 개수는

두 방정식 $a+c+e=6$, $b+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_{3}\mathrm{H}_{6}\times{}_{2}\mathrm{H}_{4}={}_{8}\mathrm{C}_{6}\times{}_{5}\mathrm{C}_{4}=28\times 5=140$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는 $105+126+140=371$

29. [출제의도] 중복순열을 활용하여 문제해결하기

구하는 모든 자연수의 개수는 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 만든 모든 다섯 자리의 자연수의 개수에서 숫자 0 또는 숫자 1을 선택하지 않고 만든 자연수의 개수를 뺀 것과 같다.

(i) 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 2이므로

만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2 … ㉠

남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_{3}\Pi_{4}=3^{4}=81$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$2\times 81=162$

(ii) 숫자 0을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

1, 2의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_{2}\Pi_{5}=2^{5}=32$

(iii) 숫자 1을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 2이므로

만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 1 … ㉢

남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 0, 2의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{2}\Pi_{4}=2^{4}=16$ … ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$1\times 16=16$

(iv) 숫자 0, 1을 모두 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

자연수 22222의 1개다.

따라서 (i)~(iv)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$162-(32+16-1)=115$

30. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 추론하기

함수 $f:X\rightarrow X$의 개수는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같다.

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 중 홀수의 개수를 n이라 하면 $n=0$ 또는 $n=2$ 또는 $n=4$이다.

(i) $n=0$일 때

치역의 세 원소는 모두 짝수이고 집합 X의 원소 중 짝수는 2개뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2$일 때

조건 (나)에서 홀수인 두 함숫값이 서로 같으면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개이고 홀수인 두 함숫값이 서로 다르면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개다.

(a) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개인 경우

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 1개와 짝수 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{2}\mathrm{C}_{2}=3$ … ㉠

치역의 세 원소 중 홀수를 a, 두 짝수를 b, c라 하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, a, b, c, c 또는 문자 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!\times 2!}+\dfrac{5!}{2!\times 2!}=60$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$3\times 60=180$

(b) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개인 경우

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{C}_{2}\times{}_{2}\mathrm{C}_{1}=6$ … ㉢

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!}=20$ … ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$6\times 20=120$

(a), (b)에 의하여 $180+120=300$

(iii) $n=4$일 때

짝수인 함숫값이 1개이므로 조건 (나)에서 치역의 세 원소 중 홀수인 원소는 2개, 짝수인 원소는 1개다.

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{C}_{2}\times{}_{2}\mathrm{C}_{1}=6$ … ㉤

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, b, b, b, c 또는 문자 a, a, b, b, c 또는 문자 a, a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!}+\dfrac{5!}{2!\times 2!}+\dfrac{5!}{3!}=70$ ⋯ ㉥

㉤, ㉥에 의하여

$6\times 70=420$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

구하는 함수 f의 개수는 $300+420=720$

[미적분]

23	⑤	**24**	①	**25**	③	**26**	④	**27**	②
28	②	**29**	18	**30**	135				

23. [출제의도] 지수함수의 미분 계산하기

$f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$

$f'(2)=(a+3)e^2=8e^2$에서 $a=5$

24. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$에서 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{10}$

25. [출제의도] 로그함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(2x^2+3x)-\ln 3x}{x}$$

$$=\frac{2}{3}\times\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)}{\frac{2x}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\lim_{x\to 0+}\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\ln\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$

$$=\frac{2}{3}\ln e=\frac{2}{3}$$

26. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$|x|>2$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}x-\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}=\frac{\frac{3}{2}x-0}{1+0}=\frac{3}{2}x$$

$x=2$일 때, $f(2)=\dfrac{3-1}{1+1}=1$

$x=-2$일 때, $f(-2)=\dfrac{-3-1}{1+1}=-2$

$|x|<2$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & (|x|>2)\\ 1 & (x=2)\\ -2 & (x=-2)\\ -1 & (|x|<2)\end{cases}$$

$|k|>2$이면 $f(k)=\dfrac{3}{2}k$이므로 $|k|>2$에서

$f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=2$이면 $f(2)=1$이므로 $k=2$에서

$f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=-2$이면 $f(-2)=-2$이므로 $k=-2$에서

$f(k)=k$를 만족시킨다.

$|k|<2$이면 $f(k)=-1$이므로 $k=-1$에서

$f(k)=k$를 만족시킨다.

따라서 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의

합은 $-2+(-1)=-3$

27. [출제의도] 급수를 이용하여 추론하기

직선 $y=x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의

크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$을 대각선으로 하는

정사각형의 각 변은 x축 또는 y축과 평행하다.

점 P_n의 x좌표를 α_n, 점 Q_n의 x좌표를 β_n이라

하면 정사각형의 한 변의 길이는 $|\alpha_n-\beta_n|$이므로

$a_n=(\alpha_n-\beta_n)^2$ ⋯ ㉠

α_n, β_n은 이차방정식

$x^2-2nx-2n=x+1$

$x^2-(2n+1)x-(2n+1)=0$

의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에

의하여 $\alpha_n+\beta_n=2n+1$, $\alpha_n\beta_n=-2n-1$

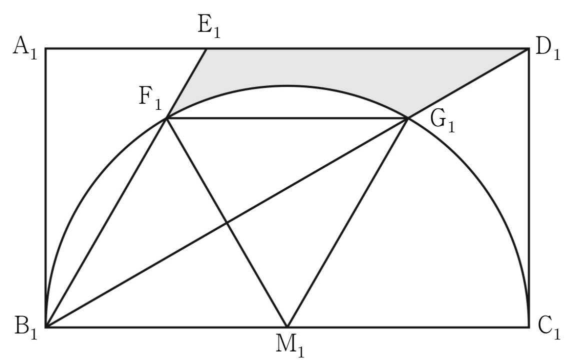
㉠에서

$$\begin{aligned}a_n&=(\alpha_n-\beta_n)^2\\&=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\\&=(2n+1)^2-4(-2n-1)\\&=4n^2+12n+5\\&=(2n+1)(2n+5)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+5)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+5}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{15}\end{aligned}$$

28. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기



선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 중점을 M_1이라 하자.

삼각형 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$에서 $\tan(\angle\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1\mathrm{D}_1)=\dfrac{\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1}}{\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1\mathrm{G}_1=\dfrac{\pi}{6}$이고 $\angle\mathrm{C}_1\mathrm{M}_1\mathrm{G}_1=\dfrac{\pi}{3}$ ⋯ ㉠

점 E_1은 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$을 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{E}_1}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{E}_1$에서 $\tan(\angle\mathrm{E}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1)=\dfrac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{E}_1}}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle\mathrm{E}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle G_1B_1E_1 = \frac{\pi}{2} - \angle C_1B_1G_1 - \angle E_1B_1A_1 = \frac{\pi}{6}$에서

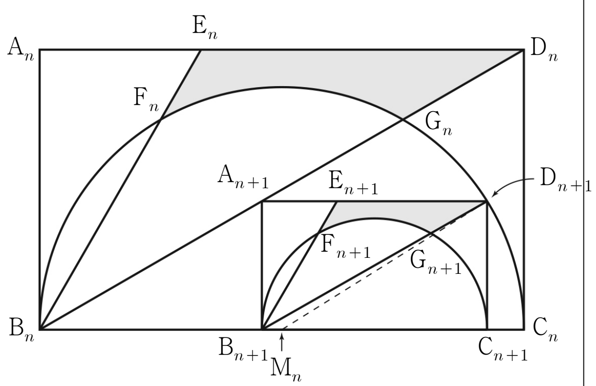
$\angle G_1M_1F_1 = \frac{\pi}{3}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 두 삼각형 $B_1M_1F_1$, $F_1M_1G_1$은 모두 정삼각형이므로 $\angle F_1M_1B_1 = \angle M_1F_1G_1$이 되어 두 선분 F_1G_1, B_1C_1은 서로 평행하다.

삼각형 $B_1G_1F_1$의 넓이는 삼각형 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같고, 두 선분 B_1F_1, B_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같으므로

$$S_1 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2\right) - \left\{\frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3}\right\}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2}$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



선분 B_nC_n의 중점을 M_n이라 하자.

$\overline{A_nB_n} = a_n$, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = a_{n+1}$이라 하면

$\overline{A_nB_n} : \overline{B_nC_n} = 1 : \sqrt{3}$에서 $\overline{B_nC_n} = \sqrt{3}a_n$이고

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} : \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 1 : \sqrt{3}$에서

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \sqrt{3}a_{n+1}$이다.

직각삼각형 $B_nB_{n+1}A_{n+1}$에서

$$\overline{B_nB_{n+1}} = \frac{\overline{A_{n+1}B_{n+1}}}{\tan\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}a_{n+1}\text{이므로}$$

$\overline{B_nC_{n+1}} = \overline{B_nB_{n+1}} + \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 2\sqrt{3}a_{n+1}$

직각삼각형 $M_nC_{n+1}D_{n+1}$에서

$\overline{M_nC_{n+1}}^2 + \overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2 = \overline{M_nD_{n+1}}^2$

이고 $\overline{M_nD_{n+1}} = \frac{1}{2}\overline{B_nC_n} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_n$이므로

$$\left(\overline{B_nC_{n+1}} - \overline{B_nM_n}\right)^2 + \overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2 = \frac{3}{4}a_n^2$$

$$\left(2\sqrt{3}a_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_n\right)^2 + a_{n+1}^2 = \frac{3}{4}a_n^2$$

$13a_{n+1}^2 - 6a_na_{n+1} = 0$

$a_{n+1} = \frac{6}{13}a_n$이므로 두 사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $13 : 6$이고 넓이의 비는 $169 : 36$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2}$이고

공비가 $\frac{36}{169}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2}}{1 - \frac{36}{169}} = \frac{169}{798}(8\sqrt{3} - 3\pi)$$

29. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기

두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$m_1 = \tan\alpha$, $m_2 = \tan\beta$이고

$0 < m_1 < m_2 < 1$에서 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$이다.

직선 l_3은 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선이므로

$\angle CBA = 2\alpha$, $\angle BAC = \beta - \alpha$

$\angle ACB = \pi - 2\alpha - (\beta - \alpha) = \pi - (\alpha + \beta)$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{9}{\sin 2\alpha} = \frac{12}{\sin\{\pi - (\alpha+\beta)\}} = 15 \ \cdots \ ㉠$$

$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$이고 $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$이므로

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},\ \tan 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{3}{4}$$

$3\tan^2\alpha + 8\tan\alpha - 3 = 0$

$(3\tan\alpha - 1)(\tan\alpha + 3) = 0$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이므로 $m_1 = \tan\alpha = \frac{1}{3}$

㉠에서 $\sin\{\pi - (\alpha+\beta)\} = \sin(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}$이고

$0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$이므로

$$\cos(\alpha+\beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},\ \tan(\alpha+\beta) = \frac{4}{3}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{3} + \tan\beta}{1 - \frac{1}{3}\tan\beta} = \frac{4}{3}$$

$1 + 3\tan\beta = 4 - \frac{4}{3}\tan\beta$

$\frac{13}{3}\tan\beta = 3$에서 $m_2 = \tan\beta = \frac{9}{13}$

따라서 $78 \times m_1 \times m_2 = 78 \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{13} = 18$

30. [출제의도] 삼각함수의 극한과 미분을 활용하여 문제해결하기

$f(x) = a\cos x + x\sin x + b$에서

$f'(x) = (1-a)\sin x + x\cos x$

$\cos x = 0$이면 $\sin x \neq 0$이고 $a < 1$이므로 $f'(x) \neq 0$

그러므로 $f'(x) = 0$이면 $\cos x \neq 0$이고

$f'(x) = 0$에서

$x\cos x = (a-1)\sin x$

$\tan x = \frac{x}{a-1}$ ⋯ ㉠

함수 $y = \tan x$의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{a-1}$는 모두 원점에 대하여 대칭이고

$a < 1$에서 직선 $y = \frac{x}{a-1}$의 기울기가 음수이므로

$-\pi < x < \pi$에서 함수 $y = \tan x$의 그래프와

직선 $y = \frac{x}{a-1}$는 원점을 포함한 서로 다른 세 점에서 만난다.

조건 (가)에서 원점을 제외한 두 점의 x좌표는 α, β이고 원점을 제외한 두 점은 원점에 대하여 대칭이므로 $\alpha = -\beta$이다.

조건 (나)에서

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{\tan\beta - \tan(-\beta)}{\beta - (-\beta)} = -\frac{\tan\beta}{\beta}$$

$\tan\beta = -1$

$0 < \beta < \pi$이므로 $\beta = \frac{3}{4}\pi$, $\alpha = -\frac{3}{4}\pi$

㉠에 $x = \frac{3}{4}\pi$를 대입하면

$\tan\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4(a-1)}\pi$, $-4(a-1) = 3\pi$,

$a = 1 - \frac{3}{4}\pi$ ⋯ ㉡

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = c$에서 $\lim_{x\to 0}x^2 = 0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x) = \lim_{x\to 0}(a\cos x + x\sin x + b) = a + b = 0$

$b = -a$이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{a(\cos x - 1) + x\sin x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{a(\cos x - 1)}{x^2} + \frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{a(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{-\frac{a\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$= -\frac{a}{2} + 1 = c$$

㉡에서 $c = -\frac{a}{2} + 1 = -\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{3}{4}\pi\right) + 1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi$

따라서

$$f\left(\frac{\beta - \alpha}{3}\right) + c = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi$$
$$= \frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{3}{4}\pi\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{13}{8}\pi = p + q\pi$$

에서 $p = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{13}{8}$이므로 $120 \times (p+q) = 135$

[기하]

23	③	**24**	②	**25**	①	**26**	⑤	**27**	④
28	③	**29**	21	**30**	13				

23. [출제의도] 벡터의 연산 계산하기

$|\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DE}|$
$=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|$
$=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}|$
$=|\overrightarrow{BE}|=2$

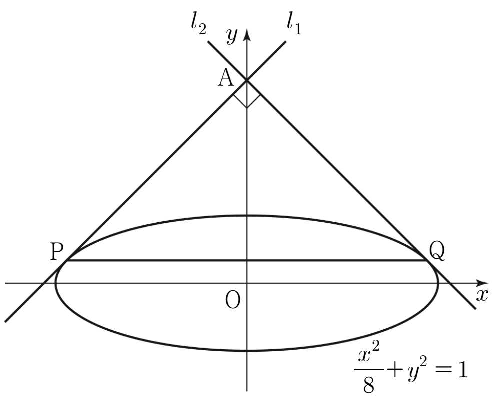
24. [출제의도] 쌍곡선의 정의 이해하기

$c^2=9+16=25$, $c=5$에서 $\overline{FF'}=2c=10$이고
$\overline{FP}=\overline{FF'}=10$
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 주축의 길이가 6이므로
$\overline{F'P}-\overline{FP}=6$, $\overline{F'P}=\overline{FP}+6=16$
따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는
$\overline{F'P}+\overline{FF'}+\overline{FP}=16+10+10=36$

25. [출제의도] 포물선의 정의 이해하기

직선 $x=-c$는 포물선의 준선이므로 $\overline{PQ}=\overline{FP}=8$
삼각형 FPQ의 넓이가 24이고 $\angle F'QP=\dfrac{\pi}{2}$이므로
$\dfrac{1}{2}\times 8\times\overline{F'Q}=24$에서 $\overline{F'Q}=6$
직각삼각형 PQF′에서 $\overline{F'P}=\sqrt{8^2+6^2}=10$
따라서 타원의 장축의 길이는
$\overline{FP}+\overline{F'P}=8+10=18$

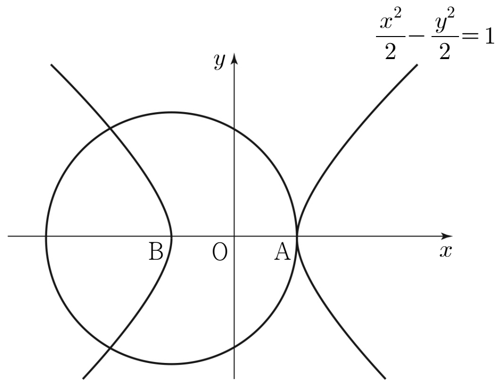
26. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기



두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이므로
삼각형 APQ는 직각이등변삼각형이고
직선 l_1의 기울기는 1이다.
타원 C에 접하고 기울기가 1인
직선 l_1의 방정식은 $y=x+\sqrt{8\times 1^2+1}=x+3$
타원 C와 직선 $y=x+3$이 만나는 점 P의
x좌표를 k라 하면
$\dfrac{k^2}{8}+(k+3)^2=1$
$9k^2+48k+64=(3k+8)^2=0$에서 $k=-\dfrac{8}{3}$
따라서 선분 PQ의 길이는 $\dfrac{8}{3}\times 2=\dfrac{16}{3}$

27. [출제의도] 벡터의 연산을 활용하여 문제해결하기

쌍곡선의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 B라 하자.
$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BP}|$
$|\overrightarrow{BP}|=k$를 만족시키는 점 P는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원과 쌍곡선이 만나는 점이다.



그림과 같이 점 P의 개수가 3이려면
$k=\overline{AB}=2\sqrt{2}$

28. [출제의도] 타원의 정의를 이용하여 추론하기

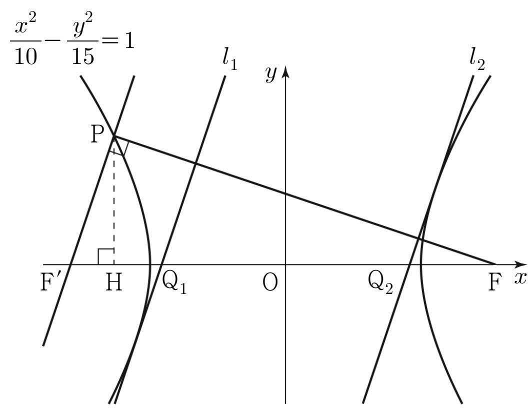
$\overline{OQ}=\overline{OF}$에서 점 Q는 선분 F′F를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle FQF'=\dfrac{\pi}{2}$
$\overline{FQ}=k$라 하면 $\overline{FQ}:\overline{F'Q}=1:4$에서
$\overline{F'Q}=4k$이고 타원의 장축의 길이는 $\overline{FQ}+\overline{F'Q}=5k$
삼각형 PF′Q의 내접원의 반지름의 길이는 2이므로
삼각형 PF′Q의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{F'Q}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times 2\times(\overline{F'P}+\overline{F'Q}+\overline{PQ})$
$\dfrac{1}{2}\times 4k\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\{\overline{F'P}+\overline{F'Q}+(\overline{PF}+\overline{FQ})\}$
$2k\times\overline{PQ}=(\overline{F'P}+\overline{PF})+(\overline{F'Q}+\overline{FQ})=5k+5k=10k$
이므로 $\overline{PQ}=5$
$\overline{PF}=\overline{PQ}-\overline{FQ}=5-k$에서
$\overline{F'P}=5k-(5-k)=6k-5$이므로
직각삼각형 PF′Q에서
$(6k-5)^2=(4k)^2+5^2$
$20k^2-60k=20k(k-3)=0$, $k=3$
따라서 직각삼각형 F′QF에서
$\overline{F'F}^2=\overline{F'Q}^2+\overline{FQ}^2$
$(2c)^2=12^2+3^2=153$이므로
$c^2=\dfrac{153}{4}$, $c=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

29. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식을 이용하여 추론하기

점 P의 x좌표를 k라 하면
점 P의 좌표는 $(k, 2\sqrt{kp})$이다.
직선 QR는 x축과 평행하고 $\angle PRQ=\dfrac{\pi}{2}$에서
직선 PR는 y축과 평행하므로 두 점 P, R의 x좌표는 서로 같고 두 점 Q, R의 y좌표는 서로 같다.
그러므로 두 점 R, Q의 좌표는
$R(k, -2\sqrt{kp})$, $Q(-p, -2\sqrt{kp})$
포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은
$2\sqrt{kp}\,y=2p(x+k)$이고 점 Q를 지나므로
$-4kp=2p(-p+k)$, $p=3k$
$\overline{QR}=p+k=4k$에서 $\overline{RF}=\overline{FP}=4k$이고
$\overline{PR}=4\sqrt{kp}=4\sqrt{3}k$이므로
직각삼각형 PQR에서
$\overline{PQ}^2=(4k)^2+(4\sqrt{3}k)^2=64k^2$
$\overline{PQ}=8k$
사각형 PQRF의 둘레의 길이는
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RF}+\overline{FP}=8k+4k+4k+4k=140$, $k=7$
따라서 $p=3k=21$

30. [출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$의 주축의 길이가 $2\sqrt{10}$이므로
$\overline{PF}=k$라 하면 $\overline{PF'}=k-2\sqrt{10}$
삼각형 F′FP는 넓이가 15인 직각삼각형이므로
$\dfrac{1}{2}\times k\times(k-2\sqrt{10})=15$
$k^2-2\sqrt{10}k-30=(k-3\sqrt{10})(k+\sqrt{10})=0$
$k=3\sqrt{10}$이므로 $\overline{PF}=3\sqrt{10}$, $\overline{PF'}=\sqrt{10}$
직각삼각형 F′FP에서
$\overline{F'F}^2=(\sqrt{10})^2+(3\sqrt{10})^2=100$이므로
$\overline{F'F}=2c=10$, $c=5$
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$에서
$10+a^2=c^2=25$이므로 $a^2=15$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.
삼각형 F′FP와 삼각형 F′PH는 서로 닮음이므로
직선 PF′의 기울기는
$\dfrac{\overline{PH}}{\overline{F'H}}=\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=3$
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{15}=1$에 접하고 기울기가 3인
직선의 방정식은
$y=3x\pm\sqrt{10\times 3^2-15}=3x\pm 5\sqrt{3}$이므로
$l_1: y=3x+5\sqrt{3}$, $l_2: y=3x-5\sqrt{3}$
에서 두 점 Q_1, Q_2의 좌표는 각각
$Q_1\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $Q_2\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$
따라서 $\overline{Q_1Q_2}=\dfrac{10}{3}\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$에서
$p=3$, $q=10$이므로 $p+q=3+10=13$