2016 수시모집 논술전형 자연계열 논술고사

전자공학전공/컴퓨터공학전공/기계공학전공

문제 1

Ⅰ. 문제

문제1 (40%, 글자 수 제한 없음)

[가] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 미분가능하고 그 도함수가 연속이면 구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$ 이다.

[나] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때 자연수 $k=1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 $x_k = a+\frac{k}{n}(b-a)$ 라고 하자. 이때 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n}$ 라고 하면, $n \to \infty$일 때 S_n은 항상 일정한 값으로 수렴함이 알려져 있다. 이 극한값을 a에서 b까지의 함수 $f(x)$ 의 정적분이라 하고, 이것을 기호로 $\int_a^b f(t)dt$ 와 같이 나타낸다. 또한, $a \le x \le b$ 에 대하여 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 로 정의하면 $F(x)$ 는 미분가능하고 $F'(x) = f(x)$ 이다.

[다] 극한값 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 이 존재한다는 것이 알려져 있고, 이 극한값을 e로 나타낸다. e는 무리수이고 그 값은 $e=2.71828182\cdots$이다. 로그의 밑이 e일 때, $\log_e x$ 를 자연로그라고 하고 이것을 간단히 $\ln x$ 로 나타낸다. 또한 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (단, $x>0$) 이고, 함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f(x) \ne 0$ 일 때 로그함수 $y=\ln|f(x)|$ 의 도함수는 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 이다.

제시문 [가], [나], [다]를 참고하여 다음에 답하시오.

[1-1] 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 미분가능하고 $f'(x)$가 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. (단, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \ne -1$ 이고, $f(1)=1$, $f'(1)=\alpha$ 이다.) 임의의 실수 s에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(s, f(s))$ 에서의 접선에 수직이면서 점 P를 지나는 직선이 $y=x$ 와 만나는 점을 (t,t)라고 하자. 이때 극한값 $\lim_{s\to 1}\frac{t-1}{s-1}$ 을 α에 관한 식으로 나타내시오.

[1-2] 문항 [1-1]에서 임의의 실수 s에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$ 에서 점 $(1,1)$ 까지의 곡선 $y=f(x)$ 의 길이를 $L(s)$ 라고 하자. 이때 함수 $L(s)$의 $s=1$에서의 미분가능성을 조사하시오.

[1-3] 함수 $g(x)=\dfrac{c\ln x}{x}$ (단, $x>1$이고 c는 양의 상수)에 대하여 함수 $h(x)=\dfrac{g(g(x))}{x^2}$ 는 다음 조건을 만족한다.

$$\int_e^{e^e} h(x)dx=0 \text{ (여기서 } e\text{는 자연로그의 밑)}$$

상수 c의 값을 구하고 함수 $h(x)$를 구하시오.

[1-4] 문항 [1-3]에서 구한 함수 $h(x)$ 에 대하여 방정식 $h(x)+\dfrac{1}{4}e^{-e-1}=0$ 은 구간 $(1,\infty)$ 에서 적어도 서로 다른 세 개의 실근을 가짐을 보이시오.

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

미적분의 기본 개념 및 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 접선의 기울기와 미분계수와의 관계, 미분계수 및 미분가능성의 정의를 이해하고 미적분학의 기본정리, 치환적분 및 중간값 정리를 활용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

- [1-1] 미분계수와 접선의 기울기 사이의 관계 및 수직인 벡터와 내적의 관계를 이해할 뿐 아니라 함수의 극한의 성질, 연속 함수의 극한 및 미분계수의 정의를 묻고 있다. 문제에 주어진 조건을 통하여 곡선 $f(x)$ 위의 점 $(s,f(s))$에서의 접선의 방정식을 구하고 두 직선의 수직 조건을 이용하여 점 $(s,f(s))$에서의 접선에 수직이면서 그 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다. 이 직선의 방정식이 $y=x$와 만나는 점 (t,t)는 두 개의 방정식을 연립하여 s로 표현 할 수 있고, 극한에 관한 성질 및 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식의 극한을 구할 수 있다.
- [1-2] 곡선의 길이와 함수의 미분가능성을 이해하며 미적분학의 기본 정리를 활용할 수 있는지를 묻고 있다. 곡선의 길이와 미적분학의 기본정리를 이용하여 s의 범위에 따라 나누어 $L(s)$의 미분을 정적분으로 나타내고 이를 통하여 $s=1$에서의 우미분계수와 좌미분계수를 구할 수 있다. 그리고 이를 비교함으로써 주어진 점에서의 미분가능성을 알아볼 수 있다.
- [1-3] 치환적분 및 로그함수의 미적분을 이해하는지를 묻고 있다. 주어진 함수 $g(x)$의 합성을 통하여 함수 $h(x)$를 상수 c가 포함된 식으로 나타내고 치환적분법과 로그함수의 적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하여 상수 c의 값 및 함수 $h(x)$를 구할 수 있다.
- [1-4] 중간값의 정리를 사용하여 서로 다른 세 실근이 존재함을 보이는 문제이다. 중간값의 정리는 연속함수가 어느 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 설명하는 정리이다. 이 경우 서로 다른 세 실근을 가짐을 증명하기 위해서는 적어도 세 구간을 조사하여야 하는데, $[1,e]$, $[e,e^e]$, $[e^e,\infty)$의 세 구간에 대하여 중간값의 정리를 사용하면 $h(x)$가 세 실근을 가짐을 보일 수 있다.

3. 채점기준

- [1-1] 미분계수와 접선의 기울기 사이의 관계 및 수직인 벡터와 내적의 관계를 이해할 뿐 아니라 함수의 극한의 성질, 연속 함수의 극한 및 미분계수의 정의를 이해하는지 평가한다.
- [1-2] 곡선의 길이와 함수의 미분가능성을 이해하며 미적분학의 기본 정리를 활용할 수 있는지 평가한다.
- [1-3] 치환적분 및 로그함수의 미적분을 이해하는지 평가한다.
- [1-4] 중간값 정리를 사용하여 서로 다른 세 실근이 존재함을 보일 수 있는지 평가한다.

4. 답안 사례

[1-1]
곡선 위의 점 $(s,f(s))$에서의 접선의 기울기는 $f'(s)$이므로 벡터 $(1,f'(s))$ 는 점 $(s,f(s))$ 에서 점 (t,t)로의 벡터 $(s-t,f(s)-t)$ 와 수직이다. 그러므로 $(1,f'(s))\cdot(s-t,f(s)-t)=0$
즉 $s-t+f'(s)\{f(s)-t\}=0$ 을 만족한다.

다시 말해, $(s-1)-(t-1)+f'(s)\{(f(s)-1)-(t-1)\}=0$ 이고 $s\neq 1$인 s에 대하여 이 등식을 $s-1$ 로 나눠준 뒤 정리하면,

$$\frac{t-1}{s-1}=\frac{1+f'(s)\cdot\dfrac{f(s)-1}{s-1}}{1+f'(s)}$$ 을 얻게 된다.

이 때 가정에서 주어진 $f'(s)\neq -1$ 을 사용하였다.

이제 $s\to 1$로 보내면, $f'(1)=\alpha$ 이고 f'이 연속이므로

$$\lim_{s\to 1}\frac{t-1}{s-1}=\lim_{s\to 1}\frac{1+f'(s)\cdot\dfrac{f(s)-1}{s-1}}{1+f'(s)}=\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha}$$ 을 얻는다.

[1-2]

곡선의 길이는 제시문 [가]와 같이 주어졌다. 만일 $s<1$이면 $L(s)=\int_s^1\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$ 가 되고, $L(1)=0$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1-0}\frac{L(s)-L(1)}{s-1}&=\lim_{s\to 1-0}\frac{1}{s-1}\int_s^1\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt\\&=-\lim_{s\to 1-0}\frac{1}{s-1}\int_1^s\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt\\&=-\sqrt{1+\alpha^2}\end{aligned}$$

이다. 여기서 마지막 등식은 미적분학의 기본정리를 이용한 것이다.

마찬가지로, $s>1$인 경우,

$$\lim_{s\to 1+0}\frac{L(s)-L(1)}{s-1}=\lim_{s\to 1+0}\frac{1}{s-1}\int_1^s\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\sqrt{1+\alpha^2}$$ 이다.

따라서

$$\lim_{s\to 1-0}\frac{L(s)-L(1)}{s-1}=-\sqrt{1+\alpha^2}\neq\sqrt{1+\alpha^2}=\lim_{s\to 1+0}\frac{L(s)-L(1)}{s-1}$$ 이 되어

$L(s)$는 $s=1$에서 미분 불가능하다.

[1-3]

$h(x)=\dfrac{g(g(x))}{x^2}=\dfrac{\ln c+\ln(\ln x)-\ln x}{x\ln x}$ 이다. $s=\ln x$ 라 치환하면 $\ln e=1,\ \ln e^e=e$,

$ds=\dfrac{dx}{x}$이므로 $\displaystyle\int_e^{e^e}h(x)\,dx=\int_1^e\frac{\ln c+\ln s-s}{s}ds=[\ln c\ln s+\frac{1}{2}(\ln s)^2-s]_1^e=\ln c+\frac{3}{2}-e=0.$

그러므로 $\ln c=e-\dfrac{3}{2}$, 즉, $h(x)=\dfrac{e-\dfrac{3}{2}+\ln\ln x-\ln x}{x\ln x}$ 이다.

[1-4]

문항 [1-3]에서 구한 함수 $h(x)$에 대하여,

(i) $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln(\ln x)=-\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to 1+0}(h(x)+\dfrac{1}{4}e^{-e-1})=-\infty$이다.

(ii) $h(e)+\dfrac{1}{4}e^{-e-1}=1-\dfrac{5}{2}e^{-1}+\dfrac{1}{4}e^{-e-1}>0.$

(iii) $h(e^e)+\frac{1}{4}e^{-e-1}=-\frac{1}{2}e^{-e-1}+\frac{1}{4}e^{-e-1}=-\frac{1}{4}e^{-e-1}<0$.

(iv) $h(x)=\dfrac{e-\frac{3}{2}+\ln\ln x-\ln x}{x\ln x}=\dfrac{\dfrac{e-\frac{3}{2}}{\ln x}+\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}-1}{x}$

이므로 $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$이 되어 $\lim_{x\to\infty}h(x)+\frac{1}{4}e^{-e-1}=\frac{1}{4}e^{-e-1}>0$ 이다.

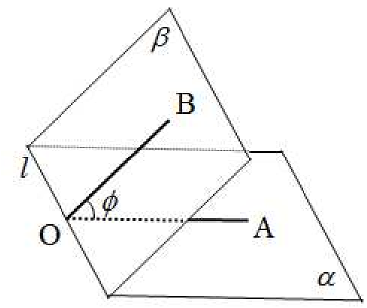
따라서 중간값 정리에 의하여 방정식 $h(x)+\frac{1}{4}e^{-e-1}=0$ 은 적어도 서로 다른 세 개의 실근을 갖는다.

문제 2

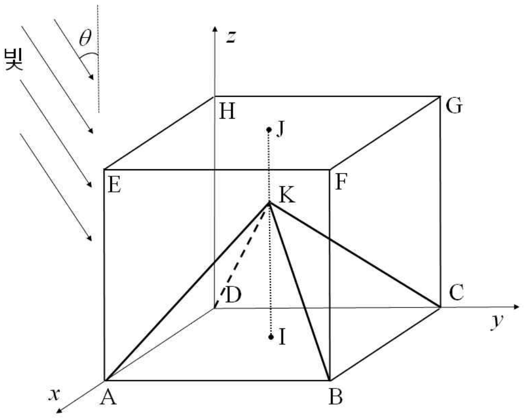
Ⅰ. 문제

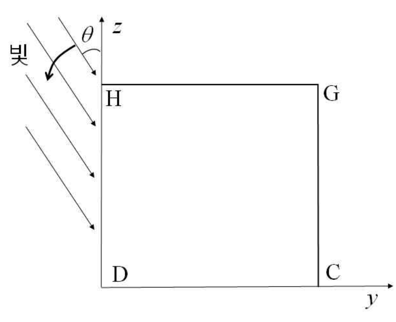
문제2 (60%, 글자 수 제한 없음)

[가] 평면 위에 있는 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각의 부분을 반평면이라고 한다. 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 이면각이라 하고, 교선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 이면각의 면이라고 한다. 오른쪽 그림에서 이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 반직선 OA, OB를 반평면 α, β 위에 각각 그으면 $\angle$AOB의 크기는 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다. 즉, 이면각의 크기 ϕ는 공간에서 두 평면이 이루는 각이 된다.



[나] 아래 그림과 같은 직교좌표축에 한 변의 길이가 2인 정육면체 ABCD-EFGH와 이 정육면체의 내부에 있는 사각뿔 K-ABCD를 생각하자. 이 사각뿔의 면 □ABCD는 정육면체 ABCD-EFGH의 밑면과 같고 꼭지점 K는 정육면체 밑면의 중심 $\mathrm{I}(1, 1, 0)$와 윗면의 중심 $\mathrm{J}(1, 1, 2)$를 잇는 선분 위에 있다. 사각뿔의 옆면인 △ADK를 포함하는 평면과 밑면인 □ABCD를 포함하는 평면이 이루는 이면각의 크기를 ϕ라 하자. 빛은 yz평면에 평행하게 xz평면으로 입사한다. 입사각 θ는 z축의 양의 방향에서 반시계 방향으로 측정한다. 그리고 빛은 서로 평행하게 도달한다고 가정한다.





x축의 양의 방향에서 바라본 yz평면과 θ의 방향

제시문 [가], [나]를 참고하여 다음에 답하시오.

[2-1] 빛이 $\theta = \frac{\pi}{6}$로 입사할 때, 사각뿔 K-ABCD의 꼭지점 K는 밑면 □ABCD의 중심 I에서 y축의 양의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 떨어진 점 $(1, \frac{3}{2}, 0)$에 그림자를 만든다. 이때 $\cos\phi$를 구하시오.

[2-2] 빛이 입사되는 각도 θ는 반시계 방향으로 증가하고 있으며, 그 각속도는 $2\pi/24h$ (h는 시간)로 일정하다. 입사각이 θ(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)일 때 □ADHE가 xy평면에 만드는 그림자의 면적에서 3시간 후에 만드는 그림자의 면적을 뺀 값을 $f(\theta)$라고 하자. 이때 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)d\theta$를 구하시오.

(단, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{4}$)

좌표공간에 있는 점 Z는 $\overrightarrow{ZA} + \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{ZC} + \overrightarrow{ZD} + \overrightarrow{ZK} = 0$ 을 만족한다. 사각뿔 K-ABCD의 옆면들이 정삼각형일 때, 문항 [2-3]과 문항[2-4]에 답하시오.

[2-3] $\overrightarrow{AZ}$와 $\overrightarrow{AB}$의 사잇각을 ρ_1, $\overrightarrow{AZ}$와 $\overrightarrow{AD}$의 사잇각을 ρ_2, $\overrightarrow{AZ}$와 $\overrightarrow{AK}$의 사잇각을 ρ_3라 하자. 이때 $2\cos^2\frac{\rho_1}{2} - 2\sin^2\frac{\rho_2}{2} + \cos^2\frac{\rho_3}{2}$를 구하시오.

[2-4] 사각뿔 K-ABCD를 △ADZ를 포함하는 평면으로 자르면 윗부분에 K를 꼭지점으로 하는 사각뿔을 얻는다. 이 사각뿔 안에 들어가는 구 중에서 부피가 최대인 구의 표면적을 구하시오. (여기서 구는 사각뿔의 면들과 접할 수 있다.)

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

기하와 벡터의 기본 개념 및 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 이면각, 정사영 및 공간좌표와 벡터의 관계를 이해하며 공간에서의 도형의 성질을 파악하고 벡터의 내적을 할 수 있는지 그리고 삼각함수의 정의와 정리를 활용하여 각도, 길이, 면적, 부피 등을 구할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

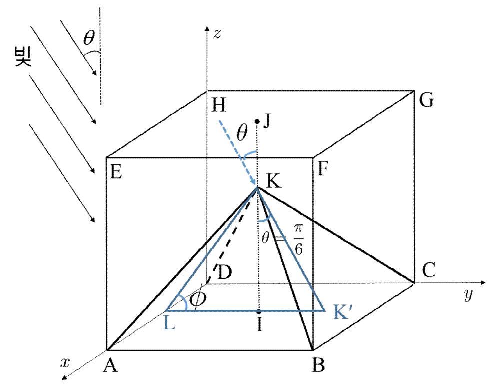
- [2-1] 공간에서 두 평면이 이루는 각, 즉 이면각에 대한 개념에 대한 정확한 이해를 묻는 문항이다. 직교좌표계에 정확한 이면각을 그려 넣으면 피타고라스의 정리 및 간단한 삼각함수 공식을 이용해서 답을 쉽게 구할 수 있다. 문제의 조건을 통하여 다시 설명하면, 주어진 조건을 이용하여 점 K의 위치를 찾고 점 K를 포함하고 yz평면에 평행인 단면에서 삼각비를 활용하면 해결할 수 있다.
- [2-2] 공간에 있는 물체를 평면에 나타낼 때, 방향에 따른 투상 되는 물체의 정사영에 대한 이해를 묻는 문항이다. 빛이 비추는 각도에 따라 xy평면에 만들어지는 □ADHE의 정사영의 면적이 원래의 면적에 비해 어떻게 변화할지를 직관적으로 생각하면, 매우 쉽게 답을 구할 수 있다. 구한 면적 변화는 결국 빛의 각도 θ의 함수로 얻을 수 있고, 삼각함수 덧셈정리를 이용하여 함수를 정리한 후, 이를 삼각함수의 적분공식을 통해서 적분 값을 구하는 것이다.
- [2-3] 공간도형에 관한 문제를 좌표 또는 벡터를 써서 해결하는 방법에 대한 이해를 묻는 문항이다. 벡터의 연산을 통해 특정 벡터 Z(무게중심의 위치벡터에 해당됨)의 좌표를 얻을 수 있고, 각각의 공간좌표에 벡터의 내적을 이용하면 벡터간의 사이 각을 구할 수 있다. 또는 무게중심의 정의로부터 벡터 연산을 이끌어 내어 직관적으로 풀 수도 있다. 그리고 주어진 식의 값을 구하는 과정은 삼각함수 반각공식을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.
- [2-4] 공간에서의 도형의 성질을 통해 도형들(여기서는 평면과 구) 사이에서의 관계에 대한 이해를 묻는 문항이다. 공간도형의 성질을 잘 이해하면, 최대 부피를 가지는 조건을 알아낼 수 있고, 이를 문항에 적용하면 평면들과 내접하는 구의 중심좌표 사이의 거리가 일정함을 의미한다. 이를 통하여 구의 중심점과 평면들 사이의 거리가 모두 같다는 관계식을 얻을 수 있고 결국, 구의 대원을 포함하는 평면으로 자른 단면에서 삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구하여 최대 부피를 가지는 구의 표면적을 구할 수 있다.

3. 채점기준

- [2-1] 이면각 및 정사영을 이해하여 삼각형을 제대로 그리고 삼각함수의 정의와 정리를 적용하여 이면각의 크기를 구할 수 있는지 평가한다.
- [2-2] 정사영의 면적을 구하고 삼각함수의 정리를 이용하여 간단히 나타낸 후 이의 정적분을 치환적분을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.
- [2-3] 주어진 관계식으로부터 점의 좌표를 구하고 내적의 정의와 성질을 이해하며 삼각함수의 정리를 활용할 수 있는지 평가한다.
- [2-4] 사각뿔에 내접하는 구가 갖는 성질을 이용하여 구의 반지름의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 답안 사례

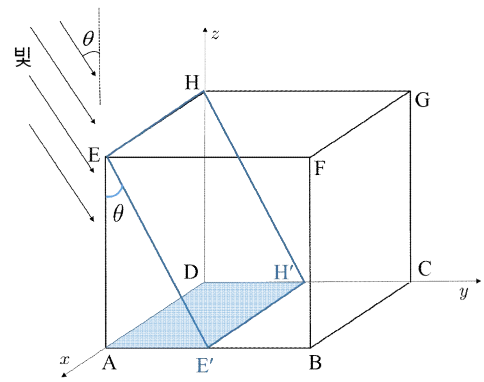
[2-1]



점 I에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{L}(1,0,0)$, 점 K의 그림자를 $\mathrm{K}'(1,\frac{3}{2},0)$이라 하자. 점 I의 좌표가 $(1,1,0)$이므로 $\overline{\mathrm{IK}'}=\frac{1}{2}$이 되고, 직각삼각형 KIK'에서, $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{KI}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{KK}'}=1$이다. 따라서 직각삼각형 KLI에서, $\overline{\mathrm{LI}}=1$이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{KL}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$이다.

그러므로 $\cos\phi=\frac{\overline{\mathrm{LI}}}{\overline{\mathrm{KL}}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$이다.

[2-2]



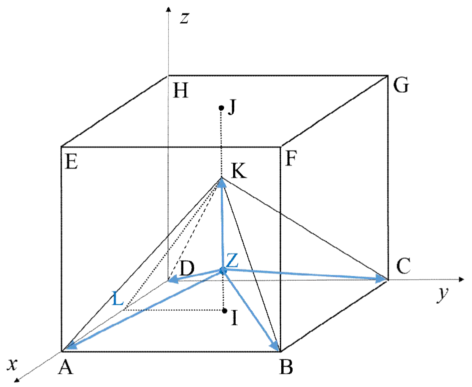
빛이 입사되는 각도는 3시간 동안 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하므로 θ일 때의 그림자의 면적에서 $\theta+\frac{\pi}{4}$일 때의 그림자의 면적을 빼면 된다. 한편, 그림자의 면적은 $\overline{\mathrm{AD}}\,\overline{\mathrm{AE}'}=2\cdot 2\tan\theta$이다. 그러므로

$$\begin{aligned} f(\theta)&=4\tan\theta-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\ &=4\left(\tan\theta-\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}\right)\\ &=4\left(\tan\theta-\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}\right)\\ &=4\left(\frac{-\tan^2\theta-1}{1-\tan\theta}\right)=\frac{-4\sec^2\theta}{1-\tan\theta} \end{aligned}$$

이 되고 이를 적분하면, $0<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{4}$에 대하여

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{-4\sec^2\theta}{1-\tan\theta}d\theta=4\ln\left(\frac{1-\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1}\right)$$ 이다.

[2-3]



$\triangle ADK$가 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\overline{KL}=\sqrt{3}$ 이고

$\overline{KI}=\sqrt{(\overline{KL})^2-(\overline{LI})^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$ 가 된다.

그러므로 $K(1,\ 1,\ \sqrt{2})$이다.

$Z=(1,1,z)$라 놓고 $\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{ZB}+\overrightarrow{ZC}+\overrightarrow{ZD}+\overrightarrow{ZK}=0$

를 이용해서 풀면 $Z(1,\ 1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{5})$이므로

$\overrightarrow{AZ}=(-1,1,\dfrac{\sqrt{2}}{5})$, $|\overrightarrow{AZ}|=\dfrac{\sqrt{52}}{5}$ 이다.

한편, $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$,

$\overrightarrow{AK}=(-1,1,\sqrt{2})$이고 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AK}|=2$이다.

그러므로

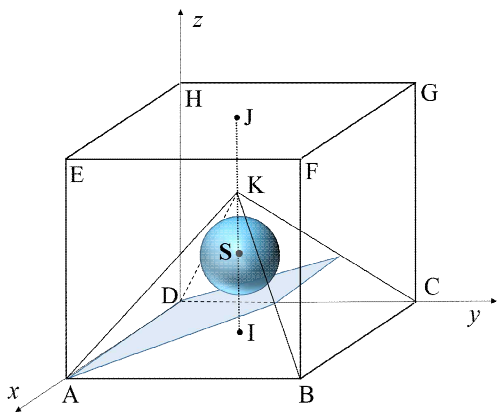
$$\cos\rho_1=\frac{\overrightarrow{AZ}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AZ}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{5}{\sqrt{52}},\quad \cos\rho_2=\frac{5}{\sqrt{52}},$$

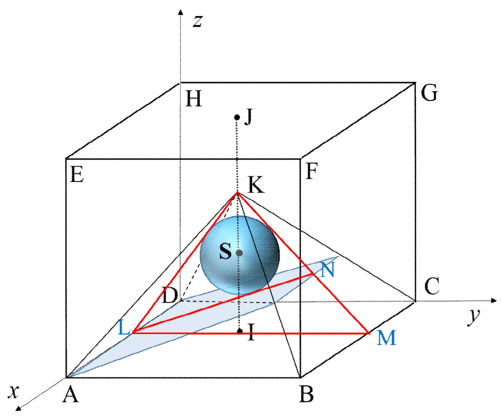
$\cos\rho_3=\dfrac{6}{\sqrt{52}}$ 이 되어

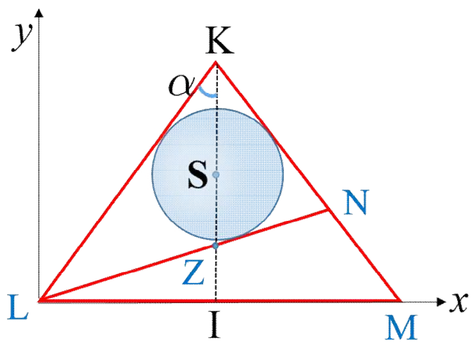
$$\begin{aligned}&2\left(\cos^2\frac{\rho_1}{2}-\sin^2\frac{\rho_2}{2}\right)+\cos^2\frac{\rho_3}{2}\\ &=2\left(\frac{1+\cos\rho_1}{2}-\frac{1-\cos\rho_2}{2}\right)+\frac{1+\cos\rho_3}{2}\\ &=\cos\rho_1+\cos\rho_2+\frac{\cos\rho_3}{2}+\frac{1}{2}\\ &=\frac{\sqrt{13}+1}{2}\end{aligned}$$

이다.

[2-4]







부피가 최대가 되게 하는 구의 중심을 S, 그 반지름의 길이를 r, $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M, $\overline{\mathrm{LZ}}$의 연장선과 $\overline{\mathrm{KM}}$의 교점을 N이라 하자. 이 때, 평면 $x=1$로 자른 단면을 마지막 그림과 같이 좌표평면 위에 놓으면

$\mathrm{L}(0,0), \mathrm{M}(2,0), \mathrm{K}(1,\sqrt{2}), \mathrm{Z}(1,\frac{\sqrt{2}}{5})$이다. 점N은 $\overline{\mathrm{LZ}}$를 품는 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{5}x$와 $\overline{\mathrm{KM}}$를 품는 직선

$y=-\sqrt{2}(x-2)$의 교점이므로 $\mathrm{N}=(\frac{5}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{KL}}=\overline{\mathrm{LN}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{NK}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$이다. 한편,

$\alpha=\angle\mathrm{LKI}$라 하면

$\sin\alpha=\frac{\overline{\mathrm{LI}}}{\overline{\mathrm{KL}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{KI}}}{\overline{\mathrm{KL}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로

$\triangle\mathrm{KLN}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{KL}}\,\overline{\mathrm{NK}}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

또한

$\triangle\mathrm{KLN}=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{KL}}+\overline{\mathrm{LN}}+\overline{\mathrm{NK}})r=(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}})r$이므로

$r=\frac{1}{\sqrt{6}}$이 되어 구의 표면적은 $4\pi r^2=\frac{2\pi}{3}$이다.

2016 수시모집 논술전형 자연계열 논술고사

화공생명공학전공/수학전공/물리학전공/화학전공/생명과학전공

문제 1

Ⅰ. 문제

문제1 (40%, 글자 수 제한 없음)

[가] 고대 그리스 시대의 수학자 아르키메데스는 도형의 면적이나 부피를 구하는데 오늘날의 적분과 유사한 방법을 사용하였다. 아르키메데스는 구분구적법을 이용하여 원, 구, 포물선의 면적과 부피를 구하는 증명을 제시하였다. 구분구적법 문제는 이후 오랫동안 별다른 진전을 보이지 못하였다가 르네상스 시기에 이르러 카발리에리가 무한의 개념을 도입하면서 진전이 있었다. 1622년 카발리에리는 곡선으로 둘러싸인 도형의 면적을 매우 폭이 좁은 직사각형들의 면적을 합한 것으로 이해할 수 있다는 착상을 내놓았다. 케플러는 포도주 통의 내측 부피를 구하기 위해 포도주 통을 이루는 입체도형을 얇은 막들의 집합으로 파악하여 합산하였다. 이와 같은 아이디어의 축적은 미적분학으로 발전하는데, 데카르트가 제시한 좌표 평면과 해석기하학의 출현은 이에 중요한 밑거름이 되었다. 뉴턴과 라이프니츠는 각자 독자적으로 미적분학을 수립하였으며 적분은 결국 미분의 역산으로 부정적분을 구하는 것과 같다는 사실을 발견하였다. 이를 미적분학의 기본정리라고 한다. 또한 미적분학의 기본정리로부터 정적분의 기본정리를 쉽게 이끌어 낼 수 있다. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때 이의 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$는 다음의 극한으로 정의된다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}$$

[나] 코사인, 사인 함수의 덧셈정리는 다음의 행렬에 관한 식으로 요약될 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

이로부터 탄젠트 함수의 덧셈정리, 그리고 코사인, 사인, 탄젠트 함수의 배각의 공식, 반각의 공식 등을 쉽게 이끌어 낼 수 있다.

[다] (중간값의 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 실수 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

[3-1] 제시문 [나]를 참고하여 $\sum_{k=0}^{n-1} \cos k\theta = \frac{1}{2}(1-\cos n\theta) + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta$ 임을 보이시오. 여기서 n은 자연수이고 θ는 $0 < \theta < 2\pi$인 실수이다.

[3-2] 문항 [3-1]을 참고하여 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$(1-\cos\theta)(\cos(n+1)\theta + \cos n\theta) = \sin\theta(\sin(n+1)\theta - \sin n\theta)$ (단, θ는 임의의 실수)

[3-3] 제시문 [가]를 참고하여 $f(x) = \cos ax$의 정적분 $A(a) = \int_0^1 \cos ax\,dx$의 값을 정적분의 정의를 사용하여 구하시오. 여기서 a는 양의 실수이다.

[3-4] 제시문 [나], [다]를 참고하여 문항 [1-3]에서 구한 $A(a)$ (단, $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$)는 열린 구간 $\left(\frac{12\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}\right)$에서 단 하나의 극소점을 가짐을 보이시오.

(단, $\tan\frac{\pi}{9} \fallingdotseq 0.364$, $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.732$, $\pi \fallingdotseq 3.142$이다.)

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

미적분의 기본 개념과 일차 회전변환 행렬의 성질 및 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 행렬의 연산, 수열의 부분 합과 일반항의 관계 및 삼각함수의 주기성과 덧셈정리, 반각정리, 배각정리를 이해하고 정적분의 정의 및 중간값의 정리를 활용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

- [3-1] 이 문제는 고등학교 교과과정의 행렬의 덧셈과 곱셈을 활용하여 주어진 급수의 합을 구하는 문제이다. 이 문제를 해결하는데 가장 중요한 것은 주어진 급수의 합 $\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta$이 행렬 $S=I+A+A^2+\cdots A^{n-1}$의 (1,1) (또는 (2,2)) 성분이라는 사실이다. 여기서 A는 다음의 행렬이다.

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

  그리고 이 합을 구하는 데는 A의 거듭제곱 A^n가 다음과 같이 주어진다는 것인데, 이는 수학적 귀납법으로 간단히 해결할 수 있으며『황석근 외, 고등학교 기하와 벡터 익힘책, 교학사, p.204』에 증명되어 있다.

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

- [3-2] 수열의 부분 합으로부터 그 일반항을 구하는 문제이다. $S_n-S_{n-1}=a_n$을 이용하여 일반항을 구한 후 이 식을 정리하면 된다. 그리고 구한 식이 0과 2π에서도 성립하고 사인, 코사인 함수의 주기가 2π라는 사실도 이용해야 한다. 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 것도 가능하고, 두 항을 빼서 0이 되는 것을 통하여 상대적으로 쉽게 항등식이 성립함을 증명할 수 있다. 하지만 이들은 문항 [3-1]의 내용을 사용하는 증명이 아니다.
- [3-3] 제시문 [가]에서 언급한 정적분의 정의를 활용하여 정적분 $A(a)=\int_0^1\cos ax\,dx$을 구하는 문항으로 [3-1]의 결과를 θ에 $\frac{a}{n}$을 대입시켜 활용하여야 한다. 이후 극한을 이용한 정적분의 정의를 통해 $A(a)$를 구할 수 있고, 그 과정에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$ 이라는 사실을 이용한다.
- [3-4] 이 문항은 중간값의 정리를 활용하여 문항 [3-3]에서 구한 함수 $A(a)=\frac{\sin a}{a}$가 열린구간 $(\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9})$에서 단 하나의 극솟값을 가짐을 보이는 문제이다. $h(a)=\tan a-a$ 에 대하여, $h(\frac{13\pi}{9})>0$ 이고 $h(\frac{12\pi}{9})<0$ 임을 보이는 데 있어 탄젠트 함수의 덧셈정리와 주어진 근사 값 $\tan\frac{\pi}{9}=0.364,\ \sqrt{3}=1.732,\ \pi=3.142$ 을 사용하는 것이 요구된다.

3. 채점기준

- [3-1] 행렬의 덧셈과 곱셈, 역행렬을 활용하여 주어진 수열의 부분 합을 계산할 수 있는지 평가한다.

- [3-2] 수열의 부분 합으로부터 그 일반항을 구하여 정리하고 주기 함수인 삼각함수의 특징을 이해하는지 평가한다.
- [3-3] 정적분의 정의를 이해하며 극한을 계산할 수 있는지 평가한다.
- [3-4] 삼각함수의 덧셈정리, 중간값 정리 및 도함수와 함수의 관계를 활용하여 주어진 구간에 단 하나의 극솟값이 존재함을 보일 수 있는지 평가한다.

4. 답안 사례

[3-1]

A을 2×2 행렬 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$라 하자. 제시문 [나]에 따르면, 모든 자연수 n에 대하여

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

이다.

그러므로 $\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta$ 는 행렬 $S=I+A+A^2+\cdots A^{n-1}$의 (1,1) 성분과 같다. 한편,

$$\begin{aligned}(I-A)S &= S-AS \\ &= (I+A+\cdots+A^{n-1})-(A+A^2+\cdots+A^n) \\ &= I-A^n\end{aligned}$$

이고, $0<\theta<2\pi$이므로 $I-A=\begin{pmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$는 역행렬

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{2-2\cos\theta}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$$

를 갖는다.

따라서

$$\begin{aligned}S&=(I-A)^{-1}(I-A^n) \\ &=\frac{1}{2-2\cos\theta}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & 1-\cos n\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이므로 (1,1) 성분으로부터

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta &= \frac{1}{2-2\cos\theta}((1-\cos\theta)(1-\cos n\theta)+\sin\theta\sin n\theta) \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta\end{aligned}$$

를 얻는다.

[3-2]

자연수 n에 대하여 $S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta$라 하면, $0<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 문항 [3-1]로부터

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= S_n-S_{n-1} \\ &=\left[\frac{1}{2}\{1-\cos(n+1)\theta\}+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin(n+1)\theta\right]-\left[\frac{1}{2}(1-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta\right] \\ &=\frac{1}{2}\{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta\}+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\{\sin(n+1)\theta-\sin n\theta\}\end{aligned}$$

이다. 이를 정리하면

$$\frac{1}{2}\{\cos(n+1)\theta+\cos n\theta\} = \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\{\sin(n+1)\theta-\sin n\theta\}$$

이므로

(*) $\quad (1-\cos\theta)(\cos(n+1)\theta+\cos n\theta)=\sin\theta(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)$

가 성립한다.

또한 (*)는 $\theta = 0$인 경우에도 명백히 성립하고, 또한 사인 코사인 함수의 주기가 2π이므로 (*)는 모든 실수에 대하여 성립한다.

[3-3]

양의 실수 a에 대하여, 정적분의 정의로부터 $A(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{ak}{n})$이므로 $n>\frac{a}{2\pi}$인 자연수 n에 대하여 문항 [3-1]의 식에 $\theta=\frac{a}{n}$를 대입하면

(**) $$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{ak}{n})=\frac{1-\cos a}{2}+\frac{\sin a}{2}\frac{\sin\frac{a}{n}}{1-\cos\frac{a}{n}}$$

를 얻는다.

따라서

$$\begin{aligned}
A(a) &= \frac{1-\cos a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\frac{\sin a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{a}{n}}{1-\cos\frac{a}{n}} \\
&= \frac{\sin a}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{x}{a}\sin x}{1-\cos x} \\
&= \frac{\sin a}{2a}\lim_{x\to 0+}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \frac{\sin a}{2a}\lim_{x\to 0+}\frac{1+\cos x}{\frac{\sin x}{x}} \\
&= \frac{\sin a}{2a}\cdot\frac{1+1}{1} \\
&= \frac{\sin a}{a}
\end{aligned}$$

이다.

[3-4]

$A(a)=\frac{\sin a}{a}$ (a는 양의 실수)이므로

$$A'(a)=\frac{a\cos a-\sin a}{a^2}=\frac{\cos a(a-\tan a)}{a^2}=0$$

는 $a=\tan a$ ($\pi<a<\frac{3\pi}{2}$)일 때만 가능하다. 이제 $h(a)=\tan a-a$ ($\pi<a<\frac{3\pi}{2}$)라 하면 $A'(a)$와 $h(a)$의 부호는 항상 같다.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

을 이용하면,

$$\tan\frac{4\pi}{9}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{9}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{9}}=\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{9}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{9}}\fallingdotseq\frac{1.732+0.364}{1-1.732\times0.364}>5$$

이다. 이제 h는 닫힌구간 $[\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9}]$에서 연속이고,

$$h\left(\frac{13\pi}{9}\right)=\tan\frac{4\pi}{9}-\frac{13\pi}{9}>5-\frac{13\times3.2}{9}>0,$$

$$h\left(\frac{12\pi}{9}\right)=\tan\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}<0$$

이므로 중간값 정리에 의하여 열린구간 $(\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9})$에서 $h(a)=0$인 $a=\alpha$를 갖는다.

따라서 이 구간에 $A'(a)=0$인 $a=\alpha$가 존재한다.

그런데, 열린 구간 $(\pi,\frac{3\pi}{2})$에서 $h'(a)=\sec^2 a-1=\tan^2 a>0$ 이므로 $h(a)$는 증가함수이고,

$h(\alpha)=0$이므로 $\pi<a<\alpha$에서 음의 값, $\alpha<a<\frac{3\pi}{2}$에서 양의 값을 가진다.

그러므로 $\frac{12\pi}{9}<a<\alpha$에서 $A'(a)<0$이고, $\alpha<a<\frac{13\pi}{9}$에서 $A'(a)>0$이다.

따라서 $a=\alpha$는 열린구간 $(\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9})$에서 $A(a)$는 단 하나의 극소점을 갖는다.

문제 2

Ⅰ. 문제

문제2 (60%, 글자 수 제한 없음)

[가] 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+y)^n$을 전개하면 다음과 같다.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k y^{n-k}$$

이것을 다항식 $(x+y)^n$에 대한 이항정리라고 한다. 여기서 ${}_n\mathrm{C}_k$는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 서로 다른 k개 (단, $n \geq k$)를 선택하는 경우의 수를 나타낸다. 이항정리를 이용하면 이항계수 사이에 성립하는 흥미로운 등식들을 이끌어 낼 수 있다. 예를 들어 위의 등식에서 $x=1,\, y=1$을 대입하면 $2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k$가 성립함을 알 수 있다. 또한 $y=1$을 대입하면 $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$을 얻을 수 있으며 이 등식의 양변을 x에 관해 미분하거나 적분한 뒤 $x=1$을 대입하면 다른 등식들도 이끌어 낼 수 있다. y 대신에 상수가 아닌 변수를 대입할 수도 있는데 $y=1-x$를 대입하면 $1=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k (1-x)^{n-k}$을 얻고 이로부터 여러 등식을 유도할 수 있다.

[나] 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라고 하며, 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수를 ${}_n\mathrm{H}_r$이라고 표기한다. 그러면 등식 ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이 성립한다. 예를 들어 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$(단, n과 r은 자연수)의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다. 또한 두 집합 $X=\{1,2,\cdots,r\}$, $Y=\{1,2,\cdots,n\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$ 중에서

$x_1, x_2 \in X$에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$

를 만족시키는 함수 f의 개수도 ${}_n\mathrm{H}_r$과 같다.

[4-1] 1보다 큰 자연수 n에 대하여 a_n은 곡선 $y=\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$, 직선 $x=n^2$, 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역(단, 경계 포함)에 있는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 나타낸다. a_n을 n에 관한 식으로 나타내시오.

[4-2] 자연수 n에 대하여

$$A(n)=\left(6(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k\cdot {}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)}+5n+17\right)\cdot 2^{-n}$$

라고 하자. (여기서 $a_1=1$이고 $a_n\,(n\ge 2)$은 문항 [2-1]에서 주어진다.) 제시문 [가]를 참고하여 $A(n)$을 n에 관한 식으로 나타내시오.

[4-3] l이 어떤 자연수라고 하자. l보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\sum_{k=1}^{n-l}(-1)^{n-k-l}\,{}_n\mathrm{C}_k\cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l$ 이라고 할 때 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{a_{2n}}{a_n}$을 구하시오.
(제시문[가] 참고)

[4-4] 기차역인 A역과 B역 사이에는 총 r개의 역(단, A역과 B역은 제외)이 있다. A역에서 출발한 기차가 B역에 도착할 동안 이 r개의 역 중에서 n개의 역에만 정차한다고 한다. (여기서 n은 1보다 크고 r은 $\frac{n(n+1)}{2}$보다 큰 자연수이며, $(n+1)$번째 정차역은 B역이다.) 자연수 $i=1,2,\cdots,n-1$에 대하여 이 기차가 i번째 정차한 역과 $(i+1)$번째 정차한 역 사이에는 적어도 i개의 역(단, i번째 정차한 역과 $(i+1)$번째 정차한 역은 제외)이 있다고 한다. 가능한 총 운행 방법의 수를 ${}_s\mathrm{H}_t$ 형태로 나타낼 때 s와 t를 구하시오. (제시문 [나] 참고)

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

수열, 극한, 순열과 조합, 이항정리에 대한 기본 개념 및 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 수열의 합, 중복조합의 뜻과 그 조합의 수, 이항정리와 이항정리의 응용을 통하여 여러 문제를 해결할 수 있는지 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

- [4-1] 자연수의 거듭제곱으로 주어진 수열의 합을 이용하여 주어진 영역에 포한된 정수 점들의 개수 a_n을 계산할 수 있는지 묻는 문제이다. 함수 값 $\sqrt{k}$에 대하여, $[\sqrt{k}]=i$를 만족하는 자연수 i의 개수를 구하여, 격자점의 개수를 i에 관한 식으로 나타내고, 이 식을 일반항 a_n으로 하여 직접 Σ의 성질을 이용하거나 계차수열을 공식을 이용하여 n으로 표현 할 수 있다.
- [4-2] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 있는지 묻는 문제이다. 교과서에서는 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 대입하여 이항계수의 기본 성질을 유도하는 내용 정리를 하고 있다. 그리고 문제에서는 이를 심화하여 $(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$를 미분하거나 적분한 뒤 $x=1$을 대입하여 이항계수의 여러 가지 성질을 이끌어낼 수 있고 이를 활용할 수 있는지에 대하여 묻고 있다. 비록 교과서에서 다루는 내용보다는 심화된 내용 이지만 제시문 [가]를 참고하면 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$의 미분과 적분이 문제 해결의 실마리가 됨을 어렵지 않게 연상할 수 있으리라 생각한다.
- [4-3] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 있는지 묻는 문제이다. 두 변수 x, y에 대한 이항정리 $(x+y)^{n-l}=\sum_{k=0}^{n-l} {}_{n-l}\mathrm{C}_k\, x^k y^{n-l-k}$ 의 활용은 고등학교 교육과정을 벗어난 것은 아니지만 학생들에게 생소할 수 있다고 본다. 더구나 조합 항등식 ${}_n\mathrm{C}_k\ {}_{n-k}\mathrm{C}_l={}_n\mathrm{C}_l\ {}_{n-l}\mathrm{C}_k$ 을 유도하고 적용하는 과정은 상당히 연상하기 어려운 과정이라고 생각하며, $(x+y)^{n-l}=\sum_{k=0}^{n-l} {}_{n-l}\mathrm{C}_k\, x^k y^{n-l-k}$에 $x=1, y=-1$을 대입하여 $\sum_{k=0}^{n-l}(-1)^{n-l-k}\ {}_{n-l}\mathrm{C}_k=0$이 되어 $\sum_{k=1}^{n-l}(-1)^{n-l-k}\ {}_{n-l}\mathrm{C}_k=(-1)^{n-l+1}$이 됨을 첨수를 비교하여 유추하는 과정 또한 높은 관찰 능력을 필요로 함을 알 수 있다.
- [4-4] 문제의 상황을 이해하고 필요한 변수를 설정하여, 부정방정식

  $$x_1+x_2+\ \cdots\ +x_n+x_{n+1}=r+1\ \ (\text{단, } x_i\ge i\ \ (1\le i\le n) \text{ 이고 } x_{n+1}\ge 1)$$

  을 유도하는 것이 핵심 과정이다. 그리고 이 부정방정식의 근의 순서쌍의 개수와 중복조합의 관계를 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

3. 채점기준

- [4-1] 자연수의 거듭제곱으로 주어진 수열의 합을 이용하여 주어진 영역에 포한된 정수점들의 개수를 계산할 수 있는지 평가한다.
- [4-2] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

- [4-3] 이항정리를 통해 이항계수 사이에 성립하는 관계를 이끌어낼 수 있는지 평가한다.
- [4-4] 주어진 문제를 중복조합으로 해석할 수 있는 능력이 있는지 평가한다.

4. 답안 사례

[4-1]

$a_1 = 1$은 분명하다. 이제 n을 2 이상의 자연수라 하자. 자연수 $i = 1, 2, \cdots, n-1$에 대하여 자연수 k가 $[\sqrt{k}] = i$이기 위한 필요충분조건은 $i^2 \le k < (i+1)^2$이다. 그러므로 주어진 영역에 속하면서 x좌표가 k (단, $i^2 \le k < (i+1)^2$)인 정수점의 개수는 i개이며 $i^2 \le k < (i+1)^2$를 만족하는 자연수 k의 개수는 $(2i+1)$이므로

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} (2i+1)i + n = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6} \quad (n\text{은 2 이상의 자연수})$$

이다.

$$a_1 = 1 = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6} \Big|_{n=1}$$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6}$$ 이다.

[4-2]

문항 [4-1]에 의하여

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot {}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2 - 3k + 5}{6(k+1)} {}_n\mathrm{C}_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{4k(k+1) - 7(k+1) + 12}{6(k+1)} {}_n\mathrm{C}_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{3} - \frac{7}{6} + \frac{2}{k+1}\right) {}_n\mathrm{C}_k$$
$$= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k - \frac{7}{6} \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$$

이다. 제시문 **[가]**에 의해 등식 $2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k$이 성립하므로

등식 (i): $\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n - 1$

을 얻는다. 또한 전개식 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$의 양변을 x에 대하여 미분한 후 $x = 1$을 대입하면

등식(ii): $n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k$

를 이끌어 낼 수 있다. 한편, 등식 $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k dx$

로부터 $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$을 얻고, 이로부터

등식(iii): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} - 1 = \frac{2^{n+1}-n-2}{n+1}$

를 얻는다. 등식 (i), (ii), (iii)을 (*)에 대입하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot {}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)} &= \frac{2n \cdot 2^{n-1}}{3} - \frac{7(2^n-1)}{6} + \frac{2(2^{n+1}-n-2)}{n+1} \\ &= \frac{(2n^2-5n+17)2^n - 5n - 17}{6(n+1)}\end{aligned}$$

이므로

$$A(n) = \left(6(n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot {}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)} + 5n + 17\right) \cdot 2^{-n} = 2n^2 - 5n + 17$$

이다.

[4-3]

등식

$${}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{(n-l)!}{k!(n-l-k)!} = {}_n\mathrm{C}_l \cdot {}_{n-l}\mathrm{C}_k$$

가 성립하므로

(**) $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n-l} (-1)^{n-k-l} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l = {}_n\mathrm{C}_l \sum_{k=1}^{n-l} (-1)^{n-l-k} {}_{n-l}\mathrm{C}_k$

이다. 한편, 다항식 $(x+y)^{n-l}$의 이항정리

$$(x+y)^{n-l} = \sum_{k=0}^{n-l} {}_{n-l}\mathrm{C}_k\, x^k y^{n-l-k}$$

에 $x=1, y=-1$을 대입하면 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{n-l-k} {}_{n-l}\mathrm{C}_k = 0$이므로

$$\sum_{k=1}^{n-l} (-1)^{n-l-k} {}_{n-l}\mathrm{C}_k = (-1)^{n-l+1}$$

임을 알 수 있다. 이 결과를 (**)에 대입하면

$$a_n = (-1)^{n-l+1} {}_n\mathrm{C}_l$$

이 된다. 그러므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{a_{2n}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_l}{{}_n\mathrm{C}_l} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-(l-1))}{n(n-1)\cdots(n-(l-1))} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \left(2-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{l-1}{n}\right)}{1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{l-1}{n}\right)} \\ &= 2^l\end{aligned}$$

이다.

[4-4]
A역과 B역 사이에 있는 r개의 역(A, B역 제외)을 A역에서 B역 방향으로 순서대로 1번역, 2번역, $\cdots$, r번역이라고 부르자. 편의상 B역은 $(r+1)$번역이라 하자. 이제 x_1을 첫 번째 도착역의 번호, x_i $(i=2,3,\cdots,n,n+1)$을 i번째 도착한 역의 번호에서 $(i-1)$번째 도착한 역의 번호를 뺀 값이라

하자. 여기서 $(n+1)$번째 도착역은 B역이라고 하자. 문제의 가정에 의해 자연수 $i=2,3,\cdots,n$에 대해 $(i-1)$번째 도착한 역과 i번째 도착한 역 사이에는 적어도 $(i-1)$개의 역이 있으므로 $x_i \geq i$임을 알 수 있다. 그러면

$x_1+x_2+\ \cdots\ +x_n+x_{n+1}=r+1$ (단, $x_i \geq i$ $(1 \leq i \leq n)$ 이고 $x_{n+1} \geq 1$)

이제 $x_i=y_i+i$ $(1 \leq i \leq n)$, $x_{n+1}=y_{n+1}+1$라고 두면 위 식은

$y_1+y_2+\ \cdots\ +y_n+y_{n+1}=r+1-\left(\dfrac{n(n+1)}{2}+1\right)=r-\dfrac{n(n+1)}{2}$ (단, $y_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n+1)$)

이 된다. 그러므로 제시문 **[나]**에 의해 구하는 답은 ${}_{n+1}\mathrm{H}_{r-\frac{n(n+1)}{2}}$이다. 한편

$${}_{n+1}\mathrm{H}_{r-\frac{n(n+1)}{2}}={}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+n}\mathrm{C}_{r-\frac{n(n+1)}{2}}={}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+n}\mathrm{C}_n={}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+1}\mathrm{H}_n$$

이므로 ${}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+1}\mathrm{H}_n$ 역시 답이 된다.