

수학 영역

정답

1	④	2	①	3	⑤	4	③	5	⑤
6	②	7	④	8	③	9	③	10	②
11	①	12	①	13	④	14	③	15	⑤
16	②	17	④	18	④	19	⑤	20	②
21	③	22	2	23	6	24	24	25	10
26	20	27	74	28	191	29	5	30	311

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$2 \times 16^{\frac{1}{2}} = 2 \times (2^4)^{\frac{1}{2}} = 2 \times 2^2 = 8$$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^3+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^3+1) = 2^3+1 = 9$$

3. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$$4 \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

4. [출제의도] 등차수열 계산하기

b 는 두 수 4, 10의 등차중항이므로

$$b = \frac{4+10}{2} = 7$$

공차가 3이므로 $a+3=4$, $a=1$

따라서 $a+2b=1+14=15$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 + 3 = 5$$

6. [출제의도] 삼각함수의 관계 이해하기

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2, \sin \theta = 2 \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = (2 \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 5 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

7. [출제의도] 기호 \sum 의 뜻과 성질 이해하기

$$\sum_{k=1}^5 (2a_k - 1)^2 = 4 \sum_{k=1}^5 a_k^2 - 4 \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 1 = 61$$

$$4 \sum_{k=1}^5 a_k^2 - 4 \sum_{k=1}^5 a_k = 56$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k(a_k - 4) = \sum_{k=1}^5 a_k^2 - 4 \sum_{k=1}^5 a_k = 11$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k^2 = m, \sum_{k=1}^5 a_k = n \text{ 이라 하면}$$

$$4m - 4n = 56, m - 4n = 11 \text{ 이므로}$$

$$3m = 45, m = 15$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^5 a_k^2 = 15$$

8. [출제의도] 삼각함수를 포함한 방정식 이해하기

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ 이므로 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{ 에서 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 해의 합은 π

9. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_2 \left(m^2 + \frac{1}{4} \right) = -1$$

$$m^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, m^2 = \frac{1}{4}$$

$$m > 0 \text{ 이므로 } m = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = 5 + 3 \log_2 n, \log_2 n = -2, n = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } m + n = \frac{3}{4}$$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기
삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times \sin(\angle ABC) = 15$$

$$\sin(\angle ABC) = \frac{5}{7}$$

$$0 < \angle ABC < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \cos(\angle ABC) > 0$$

$$\cos(\angle ABC) = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

11. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 1$)이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{\frac{3(r^4-1)}{r-1}}{\frac{3(r^2-1)}{r-1}} = r^2 + 1$$

$$\frac{6a_3}{a_5} = \frac{18r^2}{3r^4} = \frac{6}{r^2} \text{ 이므로}$$

$$r^2 + 1 = \frac{6}{r^2}, r^4 + r^2 - 6 = 0$$

$$(r^2 - 2)(r^2 + 3) = 0, r^2 = 2$$

$$\text{따라서 } a_7 = 3 \times r^6 = 3 \times 2^3 = 24$$

12. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$f(x) = a \tan(bx + c)$ 라 하자.

$$\text{함수 } f(x) \text{의 주기는 } \frac{\pi}{|b|} = 4\pi \text{ 이므로 } b = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = a \tan\left(\frac{x}{4} + c\right) = a \tan\left(\frac{1}{4}(x + 4c)\right)$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

함수 $y = a \tan \frac{1}{4}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$-4c$ 만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로

$$f(-4c) = 0$$

$$0 < c < \pi \text{ 에서 } -4\pi < -4c < 0$$

$$f(-3\pi) = 0 \text{ 이므로 } -4c = -3\pi, c = \frac{3}{4}\pi$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$f(0) = a \tan \frac{3}{4}\pi = a \times (-1) = -3, a = 3$$

$$\text{따라서 } a \times b \times c = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\pi = \frac{9}{16}\pi$$

13. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \times a_1 - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2 \times a_2 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$a_4 = 2 \times a_3 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

$$a_5 = \frac{1}{3} \times a_4 = \frac{1}{3} \times 9 = 3 = a_2$$

$$a_6 = a_3$$

$$a_7 = a_4$$

$$\vdots$$

$$a_{n+3} = a_n \text{ (} n \geq 2 \text{) 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{16} a_k$$

$$= a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{14} + a_{15} + a_{16})$$

$$= 2 + (3 + 5 + 9) \times 5 = 87$$

14. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$$n^2 - 15n + 50 = (n-5)(n-10)$$

(i) n 이 홀수인 경우

$$f(n) = 1 \text{ 이므로}$$

$$f(5) = f(7) = f(9) = f(11) = 1$$

(ii) n 이 짝수인 경우

$$(n-5)(n-10) < 0 \text{ 이면 } f(n) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(6) = f(8) = 0$$

$$(n-5)(n-10) = 0 \text{ 이면 } f(n) = 1 \text{ 이므로}$$

$$f(10) = 1$$

$$(n-5)(n-10) > 0 \text{ 이면 } f(n) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(4) = f(12) = 2$$

(i), (ii)에 의해 $f(9) = f(10) = f(11) = 1$

$f(n) = f(n+1)$ 을 만족시키는 n 의 값은 9, 10

따라서 모든 n 의 값의 합은 19

15. [출제의도] 기호 \sum 의 뜻과 성질을 이용하여
문제 해결하기

원 $x^2 + y^2 = n$ 이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와

제1사분면에서 만나는 점의 좌표를 (x_n, y_n) 이라
하면

$$x_n^2 + y_n^2 = n, y_n = \sqrt{3}x_n$$

$$x_n^2 + (\sqrt{3}x_n)^2 = n, x_n^2 = \frac{n}{4}$$

$$x_n > 0 \text{ 이므로 } x_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{x_k + x_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\frac{\sqrt{k}}{2} + \frac{\sqrt{k+1}}{2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{80} \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{80} \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(k+1) - k}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= 2(\sqrt{81} - 1) = 2 \times 8 = 16$$

16. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$2^a = 3^b = c$ 에서 $a = \log_2 c$, $b = \log_3 c$
 $\log_c 2 = \frac{1}{a}$, $\log_c 3 = \frac{1}{b}$
 $\log_c 6 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, $\log_6 c = \frac{ab}{a+b}$... ㉠
 $a^2 + b^2 = 2ab(a+b-1) = 2ab(a+b) - 2ab$
 $(a+b)^2 = 2ab(a+b)$
 양변을 $2(a+b)^2$ 으로 나누면
 $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2}$... ㉡
 따라서 ㉠, ㉡에 의해 $\log_6 c = \frac{1}{2}$

17. [출제의도] 등차수열을 이용하여 문제 해결하기
 조건 (가)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여

$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ 이므로
 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등차중항이고
 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공차를 d ($d \geq 0$) 이라 하면
 조건 (나)에서
 $a_3 \times a_{22} = (a+2d)(a+21d) = a^2 + 23ad + 42d^2$
 $a_7 \times a_8 + 10 = (a+6d)(a+7d) + 10$
 $= a^2 + 13ad + 42d^2 + 10$
 $a^2 + 23ad + 42d^2 = a^2 + 13ad + 42d^2 + 10$ 이므로
 $23ad = 13ad + 10$, $10ad = 10$, $ad = 1$
 조건 (가)에 의해
 $a_4 + a_6 = 2a_5 = 2a + 8d$
 절대부등식의 성질에 의해
 $a_4 + a_6 \geq 2\sqrt{2a \times 8d} = 2\sqrt{16ad} = 2 \times 4 = 8$
 (단, 등호는 $2a = 8d$ 일 때 성립)
 따라서 $a_4 + a_6$ 의 최솟값은 8

[다른 풀이]

조건 (가)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ 이므로
 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등차중항이고
 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \geq 0$) 이라 하자.
 $a_4 + a_6 = 2a_5$
 조건 (나)에서
 $a_3 \times a_{22} = (a_5 - 2d)(a_5 + 17d)$
 $a_7 \times a_8 + 10 = (a_5 + 2d)(a_5 + 3d) + 10$ 이므로
 $(a_5 - 2d)(a_5 + 17d) = (a_5 + 2d)(a_5 + 3d) + 10$
 $a_5^2 + 15da_5 - 34d^2 = a_5^2 + 5da_5 + 6d^2 + 10$
 $10da_5 = 40d^2 + 10$, $a_5 = 4d + \frac{1}{d}$
 절대부등식의 성질에 의해
 $a_4 + a_6 = 2a_5 = 8d + \frac{2}{d} \geq 2\sqrt{8d \times \frac{2}{d}} = 8$
 (단, 등호는 $8d = \frac{2}{d}$ 일 때 성립)
 따라서 $a_4 + a_6$ 의 최솟값은 8

18. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2(x-p) + q$ 라 하자.
 $g(4) = 2$ 이므로 $\log_2(4-p) + q = 2$
 $4-p = 2^{2-q}$, $2^{-q} = 1 - \frac{p}{4}$... ㉠
 점 A 의 좌표는 (1, 0)
 점 B 의 좌표를 $(x_1, 0)$ 이라 하면
 $\log_2(x_1 - p) + q = 0$
 $x_1 = 2^{-q} + p = \left(1 - \frac{p}{4}\right) + p = 1 + \frac{3}{4}p$
 $B\left(1 + \frac{3}{4}p, 0\right)$
 점 C 의 좌표를 $(x_2, 3)$ 이라 하면
 $\log_2 x_2 = 3$, $x_2 = 8$, $C(8, 3)$
 점 D 의 좌표를 $(x_3, 3)$ 이라 하면
 $\log_2(x_3 - p) + q = 3$
 $x_3 = 2^{3-q} + p = 8\left(1 - \frac{p}{4}\right) + p = 8 - p$
 $D(8 - p, 3)$
 $\overline{CD} - \overline{BA} = \{8 - (8 - p)\} - \left\{\left(1 + \frac{3}{4}p\right) - 1\right\}$
 $= p - \frac{3}{4}p = \frac{p}{4} = \frac{3}{4}$, $p = 3$
 ㉠에서 $2^{-q} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$, $q = 2$
 따라서 $p + q = 3 + 2 = 5$

19. [출제의도] 등비수열을 이용하여 문제 해결하기

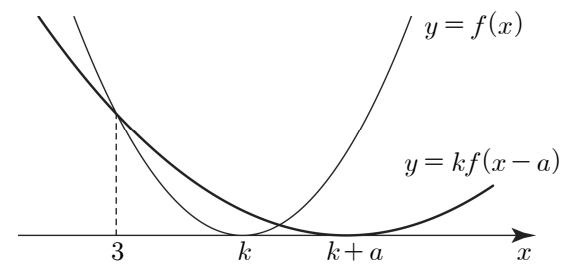
조건 (가), (나)에 의해
 상수 a ($a \neq 0$), r ($r > 0$) 에 대하여
 $a_1 = a$, $a_3 = ar$, $a_5 = ar^2$, $a_7 = ar^3$
 조건 (나)에 의해
 $a_2 = \frac{75}{a_7} = \frac{75}{ar^3}$, $a_4 = \frac{75}{a_5} = \frac{75}{ar^2}$,
 $a_6 = \frac{75}{a_3} = \frac{75}{ar}$, $a_8 = \frac{75}{a_1} = \frac{75}{a}$
 $\sum_{k=1}^8 a_k = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8)$
 $= (a + ar + ar^2 + ar^3) + \left(\frac{75}{ar^3} + \frac{75}{ar^2} + \frac{75}{ar} + \frac{75}{a}\right)$
 $= a(1 + r + r^2 + r^3) + \frac{75}{ar^3}(1 + r + r^2 + r^3)$
 $= (a_1 + a_2)(1 + r + r^2 + r^3)$
 $a_1 + a_2 = \frac{10}{3}$, $\sum_{k=1}^8 a_k = \frac{400}{3}$ 이므로
 $\frac{10}{3}(1 + r + r^2 + r^3) = \frac{400}{3}$
 $r^3 + r^2 + r - 39 = (r-3)(r^2 + 4r + 13) = 0$
 r 는 실수이므로 $r = 3$
 $a_1 + a_2 = a + \frac{75}{ar^3} = a + \frac{75}{27a} = \frac{10}{3}$
 $9a^2 - 30a + 25 = (3a - 5)^2 = 0$, $a = \frac{5}{3}$
 따라서 $a_3 + a_8 = ar + \frac{75}{a} = 5 + 45 = 50$

[참고]

$a_1 = \frac{5}{3}$, $a_2 = \frac{5}{3}$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5$, $a_5 = 15$,
 $a_6 = 15$, $a_7 = 45$, $a_8 = 45$

20. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

ㄱ. $f(1) = (1-k)^2 = 1$ 이고 $k > 0$ 이므로 $k = 2$
 $f(x) = (x-2)^2$
 $x \leq 3$ 에서 $g(x) = f(x)$ 이므로 $g(2) = 0$ (참)
 ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 $x = 3$ 을 경계로 두 함수 $f(x)$ 와 $kf(x-a)$ 로 정의되므로 이차함수 $f(x) = (x-k)^2$ 에 대하여 $k > 3$, $k = 3$, $k < 3$ 인 경우로 나누어 생각할 수 있다.
 (i) $k > 3$ 인 경우 ... ㉠
 이차함수 $y = kf(x-a)$ 의 그래프의 꼭짓점 $(k+a, 0)$ 은 점 $(k, 0)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 점과 일치하고 $k+a > 3$ 이므로 조건 (가)를 만족시키는 두 이차함수 $y = f(x)$ 와 $y = kf(x-a)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = k$ 에 대하여 대칭이고, 이차함수 $y = kf(x-a)$ 의 그래프는 직선 $x = k+a$ 에 대하여 대칭이다.
 $f(3) = kf(3-a)$,
 $f(k) = kf(k+a-a) = 0$ 이므로
 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 폭이 이차함수 $y = kf(x-a)$ 의 그래프의 폭보다 좁다.
 두 이차함수 $y = f(x)$ 와 $y = kf(x-a)$ 의 이차항의 계수는 각각 1 과 k 이므로 $k < 1$... ㉡
 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 k 는 존재하지 않는다.

(ii) $k = 3$ 인 경우

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = (3-3)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \{3f(x-a)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} 3(3-a-3)^2 = 3a^2 > 0$$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ 이므로
 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $k < 3$ 인 경우는 $k+a$ 의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

① $k < 3$, $k+a > 3$ 인 경우

$$g(k) = f(k) = 0$$

$$g(k+a) = kf(k+a-a) = kf(k) = 0$$

$$g(k) = g(k+a) = 0$$
 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나게 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $k < 3$, $k+a = 3$ 인 경우

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = (3-k)^2 > 0$$

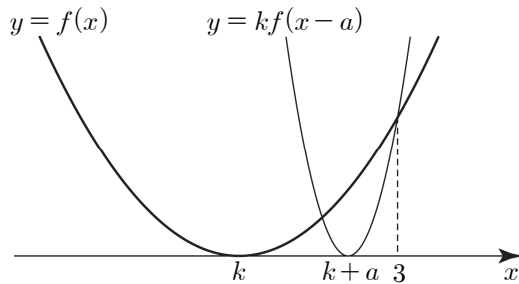
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \{kf(x-a)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} k(x-a-k)^2$$

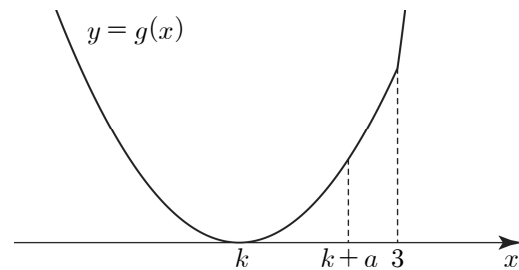
$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} k(x-3)^2 = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $k < 3$, $k < k+a < 3$ 인 경우
조건 (가), (나)를 만족시키는 두 이차함수 $y = f(x)$ 와 $y = kf(x-a)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

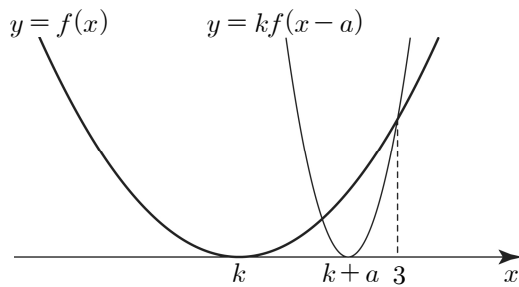


(i)~(iii)에 의해
 $k < 3$, $k < k+a < 3$ 이고
함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $g(k+a) = f(k+a) < f(3) = g(3)$ (참)
ㄷ. ㄴ에 의해 $k < 3$ 이고 ... ㉔

두 이차함수 $y = f(x)$ 와 $y = kf(x-a)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = k$ 에 대하여 대칭이고, 이차함수 $y = kf(x-a)$ 의 그래프는 직선 $x = k+a$ 에 대하여 대칭이다.

$f(k) = kf(k+a-a) = 0$,
 $f(3) = kf(3-a)$ 이므로
이차함수 $y = kf(x-a)$ 의 그래프의 폭이
이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 폭보다 좁다.
두 이차함수 $y = f(x)$ 와 $y = kf(x-a)$ 의
이차항의 계수는 각각 1 과 k 이므로

$k > 1$... ㉔

㉔, ㉔에 의해 $1 < k < 3$

(반례) $k = \frac{3}{2}$ 이면,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left\{ \frac{3}{2} f(x-a) \right\} \\ = \frac{3}{2} \left(3 - a - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - a\right)^2$$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ 이므로

$$\frac{9}{4} = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - a\right)^2$$

$k < k+a < 3$ 에서 $0 < a < \frac{3}{2}$ 이므로

$$a = \frac{3 - \sqrt{6}}{2}$$

이때 함수

$$g(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 & (x \leq 3) \\ \frac{3}{2} \left(x - 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 & (x > 3) \end{cases}$$

은 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

그러나 $(k-1)(k-2) = -\frac{1}{4} < 0$ (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

[참고]

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-k)^2 = (3-k)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \{kf(x-a)\} = k(3-a-k)^2$$

$\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ 의 값이 존재하므로

$$k(3-a-k)^2 = (3-k)^2$$

$$k < k+a < 3 \text{ 이므로 } k = \left(\frac{3-k}{3-a-k}\right)^2$$

$$\sqrt{k} = \frac{3-k}{3-a-k} \text{ 이고 } a = 3 + \sqrt{k} - k - \frac{3}{\sqrt{k}}$$

21. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

조건 (가)에서 $a_{21} = (-1)^{20} \times a_{20} = a_{20}$

$a_{20} + a_{21} = 0$ 이므로 $a_{20} = a_{21} = 0$

조건 (나)에 의해

$$a_{21} = -a_{18} - 18 = 0$$

$$a_{18} = -18 = -a_{15} - 15$$

$$a_{15} = 3 = -a_{12} - 12$$

$$a_{12} = -15 = -a_9 - 9$$

$$a_9 = 6 = -a_6 - 6$$

$$a_6 = -12 = -a_3 - 3$$

$$a_3 = 9$$

n 이 3의 배수가 아니면서 짝수이면

$$n = 6k + 2, n = 6k + 4 (k = 0, 1, 2, \dots)$$

조건 (가)에 의해

$$a_{6k+3} = (-1)^{6k+2} \times a_{6k+2} = a_{6k+2}$$

$$a_{6k+5} = (-1)^{6k+4} \times a_{6k+4} = a_{6k+4}$$

n 이 3의 배수가 아니면서 홀수이면

$$n = 6k + 1, n = 6k + 5 (k = 0, 1, 2, \dots)$$

조건 (가)에 의해

$$a_{6k+2} = (-1)^{6k+1} \times a_{6k+1} = -a_{6k+1}$$

$$a_{6k+6} = (-1)^{6k+5} \times a_{6k+5} = -a_{6k+5}$$

$$a_{6k+1} + a_{6k+2} + a_{6k+3} + a_{6k+4} + a_{6k+5} + a_{6k+6} \\ = a_{6k+1} - a_{6k+1} + a_{6k+3} \\ + a_{6k+4} + a_{6k+5} - a_{6k+5}$$

$$= a_{6k+3} + a_{6k+4} (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \text{ 이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을

S_n 이라 하면

$$S_6 = a_3 + a_4$$

$$S_{6k+6} - S_{6k} = a_{6k+3} + a_{6k+4} (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$S_{18} = (S_{18} - S_{12}) + (S_{12} - S_6) + S_6$$

$$= (a_{15} + a_{16}) + (a_9 + a_{10}) + (a_3 + a_4)$$

조건 (가)에 의해

$$a_{18} = -a_{17} = -a_{16} = -18, a_{16} = 18$$

$$a_{12} = -a_{11} = -a_{10} = -15, a_{10} = 15$$

$$a_6 = -a_5 = -a_4 = -12, a_4 = 12$$

따라서 $S_{18} = 63$

[참고]

$$\{a_n\}: -9, 9, 9, 12, 12, -12, -6, 6, 6, \\ 15, 15, -15, -3, 3, 3, 18, 18, \\ -18, \dots$$

22. [출제의도] 로그 계산하기

$$\log_2 8 + \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 \left(8 \times \frac{1}{2}\right) = \log_2 4 = 2$$

23. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라

하면 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times r \times 2\pi = 6\pi$

따라서 $r = 6$

24. [출제의도] 로그함수 이해하기

함수 $y = 6\log_3(x+2)$ 는

x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$x = 1$ 일 때, 최솟값 $m = 6\log_3(1+2) = 6$

$x = 25$ 일 때, 최댓값 $M = 6\log_3(25+2) = 18$

따라서 $M+m = 18+6 = 24$

25. [출제의도] 지수가 포함된 방정식 이해하기

$$(3^x)^2 - 30 \times 3^x + 81 = 0$$

$$(3^x - 27)(3^x - 3) = 0, 3^x = 3^3 \text{ 또는 } 3^x = 3$$

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\alpha = 1, \beta = 3 \text{ 또는 } \alpha = 3, \beta = 1$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2 = 10$

26. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질 이해하기

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 x^2 의 계수를 각각 a , b ($a \neq 0$, $b \neq 0$) 이라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x) - x^2} = 1 \text{ 이므로}$$

두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x) - x^2$ 의 차수는 2 이고

$$\frac{a}{b-1} = 1, a = b-1, b-a = 1 \text{ 이므로}$$

$g(x) - f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수이다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - f(x)}{x-3} \text{ 의 값이 존재하므로}$$

다항식 $g(x) - f(x)$ 는 $x-3$ 을 인수로 갖는다.

$$g(x) - f(x) = (x-3)(x+k) (k \text{ 는 실수})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+k)}{x-3} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} (x+k) = 3+k = 8$$

$k = 5$ 이므로 $g(x) - f(x) = (x-3)(x+5)$

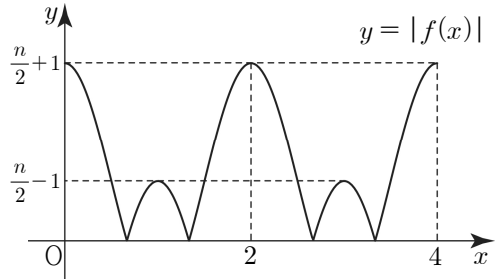
따라서 $g(5) - f(5) = 20$

27. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여
문제 해결하기

함수 $y = \frac{n}{2} \cos \pi x + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

함수 $f(x) = \frac{n}{2} \cos \pi x + 1$ ($0 \leq x \leq 4$) 는

최댓값 $\frac{n}{2}+1$, 최솟값 $-\frac{n}{2}+1$ 을 갖는다.
함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



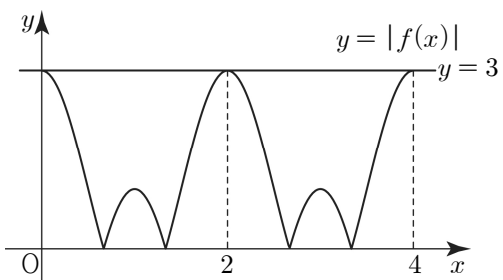
$g(n)$ 은 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과 만나는 서로 다른 모든 점의 x 좌표의 합과 같다.

$n \geq 4$ 일 때, $\frac{n}{2}+1 \geq 3$

$\frac{n}{2}+1$ 은 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값이므로

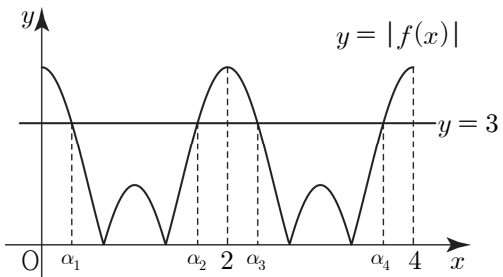
함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과 만나는 서로 다른 모든 점의 x 좌표의 합은 다음과 같다.

(i) $\frac{n}{2}+1 = 3$ ($n=4$)인 경우



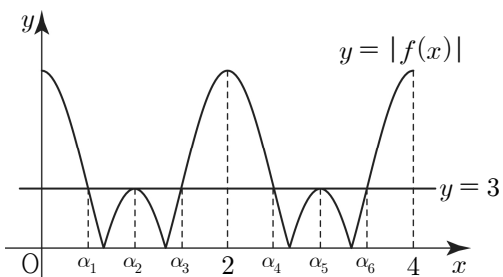
함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이라 하면
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 + 2 + 4 = 6$
 $n = 4$ 일 때, $g(4) = 6$

(ii) $\frac{n}{2}-1 < 3 < \frac{n}{2}+1$ ($n=5, 6, 7$)인 경우



함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 라 하면
 $\alpha_2 = 2 - \alpha_1, \alpha_3 = 2 + \alpha_1, \alpha_4 = 4 - \alpha_1$
이므로 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 8$
 $n = 5, 6, 7$ 일 때, $g(n) = 8$

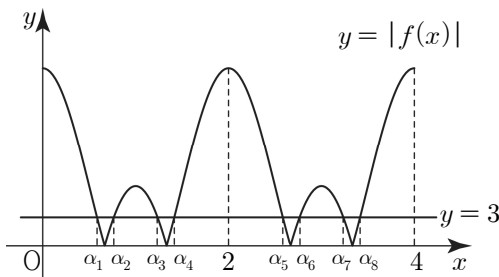
(iii) $\frac{n}{2}-1 = 3$ ($n=8$)인 경우



함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_6$ 이라 하면 $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2 - \alpha_1, \alpha_4 = 2 + \alpha_1,$

$\alpha_5 = 3, \alpha_6 = 4 - \alpha_1$
이므로 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 12$
 $n = 8$ 일 때, $g(8) = 12$

(iv) $\frac{n}{2}-1 > 3$ ($n \geq 9$)인 경우



함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_8$ 이라 하면 $\alpha_3 = 2 - \alpha_2, \alpha_4 = 2 - \alpha_1, \alpha_5 = 2 + \alpha_1,$
 $\alpha_6 = 2 + \alpha_2, \alpha_7 = 4 - \alpha_2, \alpha_8 = 4 - \alpha_1$
이므로 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_8 = 16$
 $n \geq 9$ 일 때, $g(n) = 16$

(i)~(iv)에 의해

$$g(n) = \begin{cases} 6 & (n=4) \\ 8 & (n=5, 6, 7) \\ 12 & (n=8) \\ 16 & (n \geq 9) \end{cases}$$

따라서

$$\sum_{n=4}^{10} g(n) = 6 + 8 + 8 + 8 + 12 + 16 + 16 = 74$$

28. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$$\overline{CD} = a \text{ 라 하면 } \overline{CE} = 5\sqrt{3} - a$$

$\angle BAC, \angle BEC$ 는 호 BC 에 대한 원주각이므로
 $\angle BAC = \angle BEC$

$$\cos(\angle BAC) = \cos(\angle BEC) = \frac{\sqrt{3}}{6} \dots \textcircled{1}$$

삼각형 ECD 에서 코사인법칙에 의해

$$a^2 = 5^2 + (5\sqrt{3} - a)^2 - 2 \times 5 \times (5\sqrt{3} - a) \times \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{25\sqrt{3}}{3}a = 75, a = 3\sqrt{3}$$

$$\overline{CD} = 3\sqrt{3}, \overline{CE} = 2\sqrt{3}$$

$\angle BAD = \angle CED, \angle BDA = \angle CDE$ 이므로
두 삼각형 ABD, ECD 는 서로 닮음이다.

$$\overline{AB} : \overline{EC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$2 : 2\sqrt{3} = \overline{BD} : 3\sqrt{3}, \overline{BD} = 3$$

$$\overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = 8$$

삼각형 EBC 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 8 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 60$$

$$\overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

①에 의해

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{6}$$

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의해

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2\sqrt{15} \times \frac{6}{\sqrt{33}}$$

$$R = \frac{6\sqrt{55}}{11}$$

삼각형 ABC 의 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = \frac{180}{11}\pi$

따라서 $p + q = 11 + 180 = 191$

29. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의해 실수 a_k (k 는 자연수)는

x 에 대한 방정식 $x^2 + 3x + (8 - k)(k - 5) = 0$ 의 근이므로

$$(a_k + 8 - k)(a_k + k - 5) = 0$$

$$a_k = k - 8 \text{ 또는 } a_k = 5 - k$$

조건 (나)에서 $a_n \times a_{n+1} \leq 0$ 을 만족시키는

10 이하의 두 자연수 n 을 각각 p, q ($p < q$) 라 하자.

$$a_6 = -2 \text{ 또는 } a_6 = -1,$$

$$a_7 = -1 \text{ 또는 } a_7 = -2 \text{ 이므로}$$

$\sum_{n=6}^7 a_n$ 의 값이 최대가 되는 것은

$$a_6 = a_7 = -1 \text{ 일 때이고 } \sum_{n=6}^7 a_n = -2$$

$$a_5 = -3 \text{ 또는 } a_5 = 0,$$

$$a_8 = 0 \text{ 또는 } a_8 = -3 \text{ 이므로}$$

a_5, a_8 의 값에 따라 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최댓값은

다음과 같다.

(i) $a_5 = a_8 = 0$ 이면

$$a_4 a_5 = a_5 a_6 = a_7 a_8 = a_8 a_9 = 0 \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_5 = 0, a_8 = -3$ 인 경우

$$a_4 a_5 = a_5 a_6 = 0 \text{ 이므로 } p = 4, q = 5$$

$6 \leq n \leq 10$ 에서 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$$a_8 = -3 < 0 \text{ 이므로 } a_9 = -4, a_{10} = -5$$

$1 \leq n \leq 4$ 에서 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$$a_1 = 4 \text{ 또는 } a_1 = -7 \text{ 이므로}$$

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 것은

$$a_1 = 4, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 1 \text{ 일 때이다.}$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^4 a_n + a_5 + \sum_{n=6}^7 a_n + a_8 + \sum_{n=9}^{10} a_n$$

$$= 10 + 0 + (-2) + (-3) + (-9) = -4$$

(iii) $a_5 = -3, a_8 = 0$ 인 경우

$$a_7 a_8 = a_8 a_9 = 0 \text{ 이므로 } p = 7, q = 8$$

$1 \leq n \leq 5$ 에서 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$$a_5 = -3 < 0 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = -7, a_2 = -6, a_3 = -5, a_4 = -4$$

$9 \leq n \leq 10$ 에서 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$$a_9 = 1 \text{ 또는 } a_9 = -4 \text{ 이므로}$$

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 것은

$$a_9 = 1, a_{10} = 2 \text{ 일 때이다.}$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^4 a_n + a_5 + \sum_{n=6}^7 a_n + a_8 + \sum_{n=9}^{10} a_n$$

$$= (-22) + (-3) + (-2) + 0 + 3 = -24$$

(iv) $a_5 = -3, a_8 = -3$ 인 경우

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 경우는

$1 \leq n \leq 4$ 에서 $a_n > 0$ 이고

$9 \leq n \leq 10$ 에서 $a_n > 0$ 일 때이다.

이때 $a_4 a_5 < 0, a_8 a_9 < 0$ 이므로 $p = 4, q = 8$

$a_1 = 4, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 1, a_9 = 1,$

$a_{10} = 2$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^4 a_n + a_5 + \sum_{n=6}^7 a_n + a_8 + \sum_{n=9}^{10} a_n$$

$$= 10 + (-3) + (-2) + (-3) + 3 = 5$$

(i)~(iv)에 의해 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최댓값은 5

[참고]

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지는 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n-8$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$5-n$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

$\{a_n\} : 4, 3, 2, 1, -3, -1, -1, -3, 1, 2, \dots$

30. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 추론하기

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = |b| = b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b^2$$

$x > 0$ 에서 $f(x) = (x-a)^2 + b^2 - a^2$

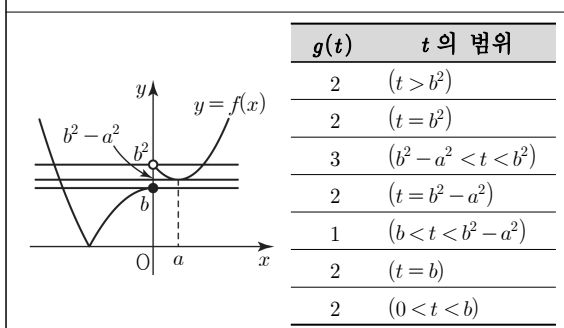
$0 < a < b$ 이므로 $0 < b^2 - a^2 < b^2$

세 실수 $b, b^2, b^2 - a^2$ 의 대소 관계에 따라

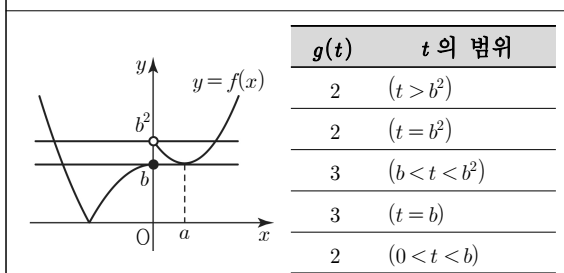
함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형과

함수 $g(t)$ 의 함숫값은 다음과 같다.

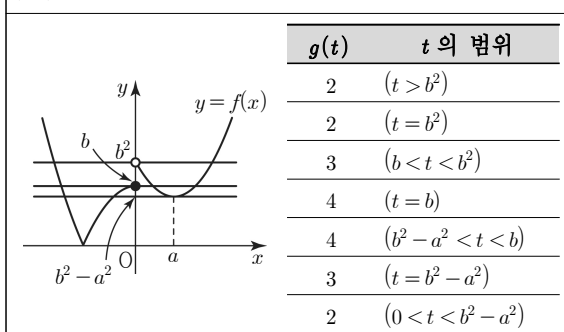
(i) $b < b^2 - a^2 < b^2$



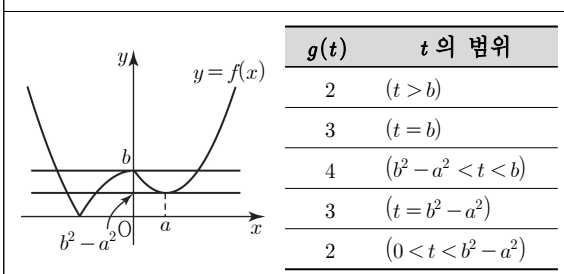
(ii) $b = b^2 - a^2 < b^2$



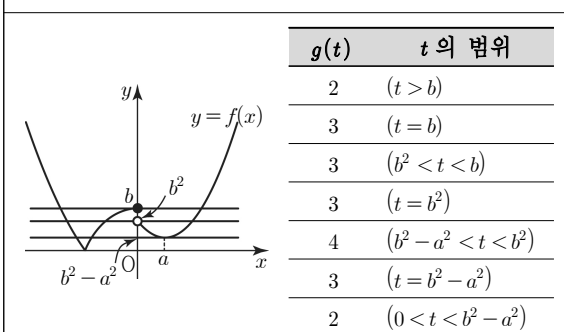
(iii) $b^2 - a^2 < b < b^2$



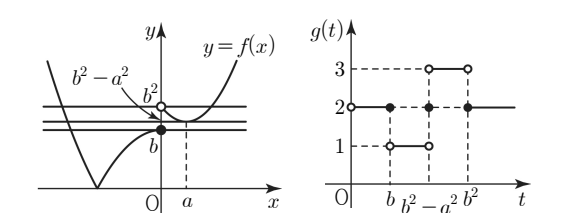
(iv) $b^2 - a^2 < b = b^2$ ($b = 1$)



(v) $b^2 - a^2 < b^2 < b$

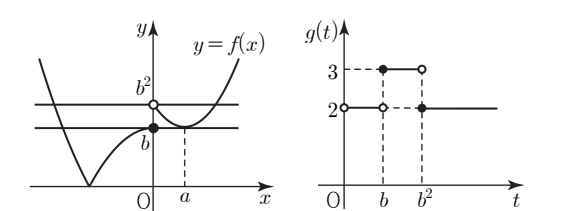


(i) $b > 1, b^2 - a^2 > b$ 인 경우 ($b^2 > b$)



$b < t < b^2 - a^2$ 에서 $g(t) = 1$ 이므로
함수 $g(t)$ 의 최솟값이 2 임을 만족시키지 않는다.

(ii) $b > 1, b^2 - a^2 = b$ 인 경우 ($b^2 > b$)

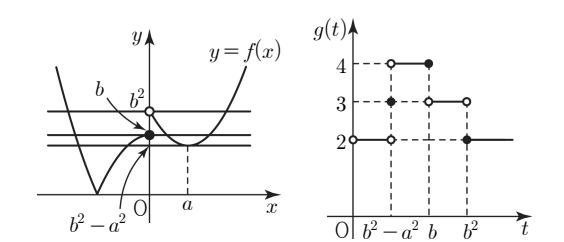


$$\left| \lim_{t \rightarrow \alpha^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow \alpha^+} g(t) \right| = 2 \text{ 를 만족시키는}$$

실수 α 가 존재하지 않으므로

조건 (가) 를 만족시키지 않는다.

(iii) $b > 1, b^2 - a^2 < b$ 인 경우 ($b^2 > b$)



조건 (가) 를 만족시키는 $\alpha = b^2 - a^2$

$$\lim_{t \rightarrow b^2 - a^2^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow b^2 - a^2^+} g(t) + 1 = 3 - 2 + 1 = 2,$$

$$g(b^2) = 2$$

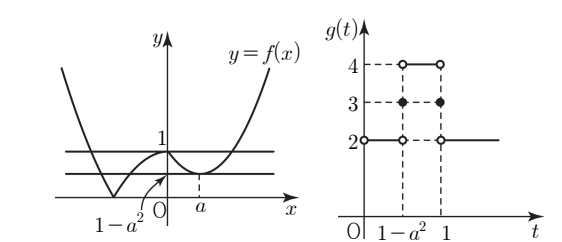
$$\lim_{t \rightarrow b^2^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow b^2^+} g(t) + 1 = g(b^2) \text{ 이므로}$$

조건 (나) 를 만족시키는 $\beta = b^2$

$$g(\alpha) = 3, g(\beta) = 2 \text{ 이므로}$$

조건 (다) 를 만족시킨다.

(iv) $b = 1$ 인 경우 ($b^2 = b = 1$)



조건 (가) 를 만족시키는 $\alpha = 1$ 또는 $\alpha = 1 - a^2$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3,$$

$$g(1) = 3$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) + 1 = g(1) \text{ 이므로}$$

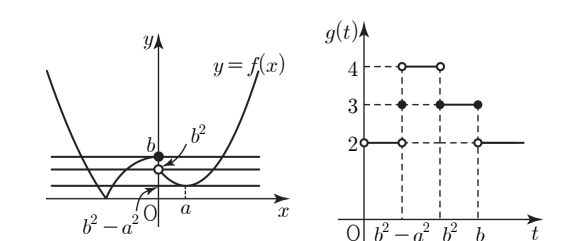
조건 (나) 를 만족시키는 $\beta = 1$

$$g(1) = g(1 - a^2) = 3 \text{ 이므로}$$

$$g(\alpha) = g(\beta) = 3$$

조건 (다) 를 만족시키지 않는다.

(v) $0 < b < 1$ 인 경우 ($b^2 < b$)



조건 (가) 를 만족시키는 $\alpha = b^2 - a^2$

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow \beta^+} g(t) + 1 = g(\beta) \text{ 를 만족시키는}$$

실수 β 가 존재하지 않으므로

조건 (나) 를 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에 의해

$b > 1, b^2 - a^2 < b$ 이다.

$$f(a) = b^2 - a^2 = \alpha, f\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(a), a = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = b^2 - \frac{1}{4}$$

$$\alpha + 24\beta = b^2 - \frac{1}{4} + 24 \times b^2 = 30, b^2 = \frac{121}{100}$$

$$b > 1 \text{ 이므로 } b = \frac{11}{10}$$

$$f(x) = \begin{cases} \left| -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{10} \right| & (x \leq 0) \\ x^2 - x + \frac{121}{100} & (x > 0) \end{cases}$$

$$f(-2) + f(1) = \left| -2 + \frac{11}{10} \right| + \frac{121}{100}$$

$$= \frac{9}{10} + \frac{121}{100} = \frac{211}{100}$$

따라서 $p + q = 100 + 211 = 311$