단국대학교 2024학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오전)

단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

☐ 출제의도

[논제 1] 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 미분의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 3] 극값의 개념을 이해하고 있는지를 평가

☐ 자료출처

○ 권오남 외(2020), 수학II, 교학사, 54-64쪽, 142-148쪽
○ 이준열 외(2020), 수학II, 천재교육, 83-97쪽
○ 류희찬 외(2022), 미적분, 천재교과서, 96-107쪽

☐ 문항해설

[논제 1] 함수의 그래프의 개형을 파악하고 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 측정하는 문제

[논제 2] 함수의 미분가능성을 확인할 수 있는지를 측정하는 문제

[논제 3] 극값의 개념을 이해하고 있는지를 측정하는 문제

☐ 채점기준

[논제 1 평가기준]

- 구하는 넓이는 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ 임을 제시 : 5점
- $\tan x$의 적분을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- 함수 $f(x)$가 $x=-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않음을 제시 : 6점
- 삼차함수 $p(x)=ax\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$를 제시 : 9점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]

- 함수 $\tan x + p(x)$가 증가함을 제시 : 10점
- 함수 $h(x)$가 $x=0$에서만 극값을 가짐을 제시 : 10점

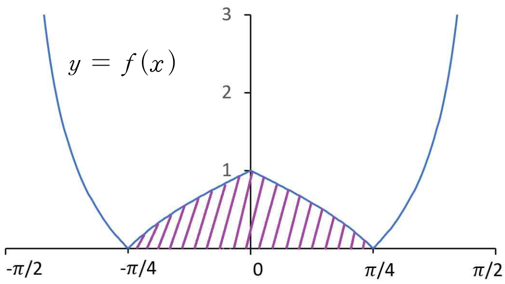
☐ 예시 답안

[논제 1]

$$f(x) = \left| |\tan x| - 1 \right| = \begin{cases} \tan x - 1 & \left(\dfrac{\pi}{4} \le x < \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -\tan x + 1 & \left(0 \le x < \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \tan x + 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \le x < 0\right) \\ -\tan x - 1 & \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

이고, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. 따라서 구하는 넓이 S는

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\ dx = \frac{\pi}{2} - \ln 2$$



[논제 2] 함수 $g(x) = f(x)p(x)$는 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $x \ne \dfrac{\pi}{4}, 0, -\dfrac{\pi}{4}$일 때 미분가능하고 도함수는

$$g'(x) = f'(x)p(x) + f(x)p'(x)$$

이다. 한편, $f(x)$는 $x = \dfrac{\pi}{4}, 0, -\dfrac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다. 따라서 조건 (1)로부터

$$p\left(\frac{\pi}{4}\right) = p(0) = p\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

이어야 하므로, 적당한 상수 a $(a \ne 0)$에 대하여

$$p(x) = a\,x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a\left(x^3 - \frac{\pi^2}{16}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ①$$

이다.

$h(0)=0$, $h(x)\ \geq\ 0$ 으로부터

$$\lim_{t\to 0+}\frac{h(t)-h(0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{h(t)}{t}\ \geq\ 0,\quad \lim_{t\to 0-}\frac{h(t)-h(0)}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{h(t)}{t}\ =-\lim_{t\to 0+}\frac{h(t)}{t}\ \leq\ 0$$

이므로 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{h(t)}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{h(t)}{t}=0$ 이다. 또한,

$$-h(t)\ \leq\ \tan t+p(t)\ \leq\ h(t)$$

이므로

$$0=-\lim_{t\to 0+}\frac{h(t)}{t}\ \leq\ \lim_{t\to 0}\frac{\tan t+p(t)}{t}\ \leq\ \lim_{t\to 0+}\frac{h(t)}{t}=0$$

따라서 $a=\dfrac{16}{\pi^2}$, $p(x)=\dfrac{16}{\pi^2}x^3-x$ 이다.

[논제 3] $\tan x+p(x)$는 미분가능하고, $\tan x+p(x)$의 도함수는

$$\sec^2x+p'(x)=\sec^2x+\frac{48}{\pi^2}x^2-1=\tan^2x+\frac{48}{\pi^2}x^2\ \geq\ 0$$

이므로 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 함수 $\tan x+p(x)$는 증가한다.

또한, $h(0)=0$이므로 함수 $h(x)=\left|\tan x+\dfrac{16}{\pi^2}x^3-x\right|$는 $x<0$일 때 감소하고 $x>0$일 때 증가한다.

따라서 극값을 갖는 x의 개수는 1개이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 도함수의 성질을 활용하여 함수의 그래프 개형을 그릴 수 있는지를 평가

[논제 2] 치환적분법을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 배종숙 외(2020), 수학II, 금성출판사, 83-91쪽
○ 이준열 외(2020), 미적분, 천재교육, 112-116쪽, 147-154쪽
○ 황선욱 외(2020), 수학, 미래엔, 224-234쪽

□ 문항해설

[논제 1] 함수의 그래프 개형을 이용하여 직선과의 교점 개수를 파악할 수 있는지를 측정하는 문제

[논제 2] 치환적분법을 이해하여 활용할 수 있는지를 측정하는 문제

□ 채점기준

[논제 1 평가기준]
- $f(x)$가 증가함수임을 제시 : 3점
- 곡선 $y=f(x)$가 $x<0$일 때 아래로 볼록, $x>0$일 때 위로 볼록임을 제시 : 3점
- 곡선 $y=f(x)$가 변 AB와 만나지 않음을 제시 : 2점
- 곡선 $y=f(x)$가 변 BC와 한 점에서 만남을 제시 : 2점
- 곡선 $y=f(x)$가 변 AC와 세 점에서 만나는 조건을 찾아 정답을 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]
- $u=\sqrt{f(t)}$로 치환한 형태를 제시 : 10점
- $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{u(1-u^2)}{2}$임을 제시 : 5점
- $\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}\,dt=\int_c^{g(x)}\frac{2}{1-u^2}du$ 꼴을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$의 그래프의 개형을 생각해 보자. $f(x)$는 연속함수이고 미분가능하며

$$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}, \quad f''(x)=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

이므로 $f(x)$는 증가함수이고, 구간 $[-k, k]$에서

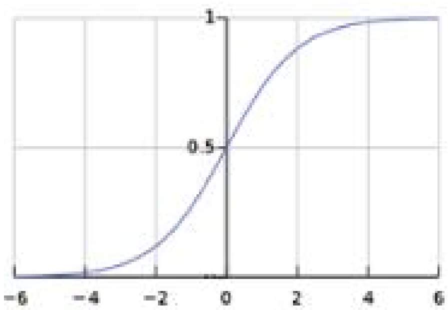
$$\text{최솟값 } f(-k)=\frac{1}{e^k+1}, \quad \text{최댓값 } f(k)=1-\frac{1}{e^k+1}$$

을 갖고 $f(0)=\dfrac{1}{2}$이다. 또한

$x<0$일 때 $f'(x)$가 증가하고 $x>0$일 때 $f'(x)$가 감소

한다. 제시문 (나)에 의하여 $f(x)$의 증가와 감소에 관한 표와 그래프는 아래와 같다.

x	$-k$	$\cdots$	0	$\cdots$	k
$f'(x)$		$+$	$1/4$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1/(e^k+1)$	⤴	$1/2$	↱	$1-1/(e^k+1)$



변 AB와 곡선 $y=f(x)$는 만나지 않고, 변 BC와 곡선 $y=f(x)$는 한 점에서 만나므로 변 AC와 곡선 $y=f(x)$는 세 점에서 만나야 한다. 즉, 점 $\mathrm{A}(-k,0)$과 점 $\mathrm{C}(k,1)$을 지나는 직선의 방정식 $y=\dfrac{1}{2k}x+\dfrac{1}{2}$과 곡선 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$은 $-k\le x\le k$의 범위에서 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

직선 $y=\dfrac{1}{2k}x+\dfrac{1}{2}$이 곡선 $y=f(x)$와 점 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$에서 접할 때

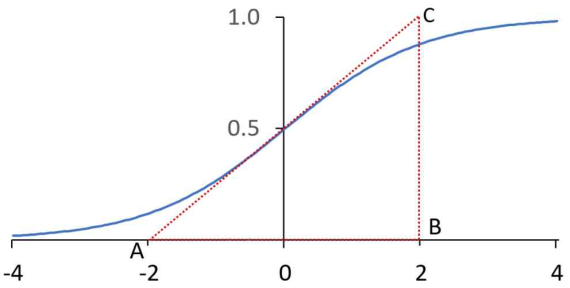
$$(\text{직선의 기울기})=\frac{1}{2k}=f'(0)=\frac{1}{4}$$

이다. 따라서, $f(x)$의 그래프의 개형에 의하여, 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=\dfrac{1}{2k}x+\dfrac{1}{2}$과 서로 다른 세 점에서 만나려면 (직선의 기울기)$=\dfrac{1}{2k}<\dfrac{1}{4}$, 즉 $k>2$이어야 한다. 또한

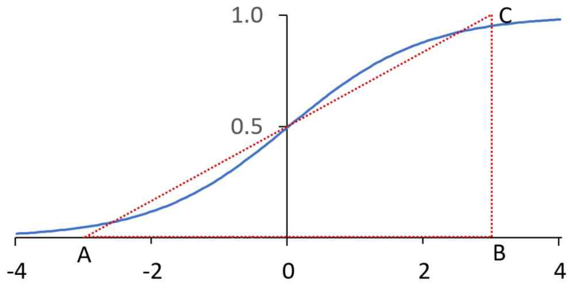
$$f(-k)=\frac{1}{e^k+1}>0, \quad f(k)=1-\frac{1}{e^k+1}<1$$

이므로 세 교점의 x 좌표는 모두 $-k\le x\le k$의 범위에 있다.

결국 삼각형 ABC와 곡선 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$이 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 양의 실수 k의 범위는 $k>2$ 이다.



$(k=2)$



$(k>2)$

[논제 2] $g(x)=(\beta^{-1}\circ\alpha)(x)$라 하면 $\alpha(x)=(\beta\circ g)(x)$ 이므로 제시문 (라)에 의해서

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{f(t)}\,dt=\int_{g(0)}^{g(\ln 2)}\frac{2}{1-t^2}dt$$

$$g(0)=\sqrt{f(0)}=\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots ①$$

을 만족시키는 치환 $u=g(t)$를 구하면 된다. ①을 만족시키기 위해서 $u=\sqrt{f(t)}$로 치환해 보자. $u^2=f(t)$ 이므로

$$2u\frac{du}{dt}=f'(t)=\frac{e^t}{(1+e^t)^2}=\left(\frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}\frac{1}{e^t}\right)=u^4\left(\frac{1}{u^2}-1\right)=u^2(1-u^2)$$

이다. 따라서

$$\int_0^x\sqrt{f(t)}\,dt=\int_c^{g(x)}\frac{2}{1-u^2}du$$

가 성립한다. 그러므로 $(\beta^{-1}\circ\alpha)(\ln 2)=\sqrt{f(\ln 2)}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

※ 1. 치환한 후 피적분함수 $\frac{2}{1-u^2}$가 나오지 않는 경우 치환을 반복하여 $\frac{2}{1-u^2}$를 구할 수 있다.

2. 함수 $\alpha(x)$와 $\beta(x)$를 구해서 정답을 제시해도 된다.