

## 출제의도 및 문제해설

### 출제의도

하나의 조건에서 다른 조건을 추가함에 따라 각각 해당 조건들을 만족하는 경우의 수를 계산하는 능력이 있는지 평가한다. 이러한 조건들을 조합하여 하나의 정책으로 적용했을 때, 수학적 의미를 이해하여 해당하는 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

### 출제 근거

#### 가) 교육과정 근거

##### 문제 4 (1)

적용 교육과정	[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합
성취기준/ 영역별 내용	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

##### 문제 4 (2)

적용 교육과정	[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합
성취기준 / 영역별 내용	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

##### 문제 4 (3)

적용 교육과정	[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합
성취기준 / 영역별 내용	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

#### 나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학	이준열 외 9인	천재교육	2018	263-280	교과서	재구성
확률과 통계	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	11-25	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

**문제 해설**

- (1) 다섯 자리 비밀번호를 만들 때 세 번 이상 들어있는 숫자는 하나만 선택할 수 있다. 임의의 숫자  $a$ 가  $n$ 번만 들어있는 경우의 수는 다섯 개의 자리에서  $n$ 개를 골라  $a$ 를 쓰고, 나머지  $5 - n$ 개의 자리에 숫자  $a$ 가 아닌 숫자를 각각 선택하는 수이므로  ${}_5C_n \times 9^{5-n}$ 이다.
- 숫자  $a$ 가 세 번만 들어있는 경우는  ${}_5C_3 \times 9^2 = 10 \times 81 = 810$ 가지, 숫자  $a$ 가 네 번만 들어있는 경우는  ${}_5C_4 \times 9 = 5 \times 9 = 45$ 가지, 숫자  $a$ 가 다섯 번 들어있는 경우는 1가지이다. 숫자  $a$ 를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 들어있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는  $10 \times (810 + 45 + 1) = 8560$ 가지이다.
- (2) 다섯 자리의 비밀번호에서 숫자  $a$ 가 세 번만 연속하여 나타나는 것은  $aaa\Box\Box$ ,  $\Box aaa\Box$ ,  $\Box\Box aaa$ 의 꼴로 배열되는 경우이다. 여기에서  $a$ 는 세 번만 연속이므로  $a$ 의 앞이나 뒤의  $\Box$ 에는  $a$ 가 올 수 없다. 따라서 가능한 가짓수는  $(9 \times 10) + (9 \times 9) + (10 \times 9) = 261$  가지이다. 마찬가지로, 숫자  $a$ 가 네 번만 연속하여 나타나는 것은  $aaaa\Box$ ,  $aaaa\Box$ 의 꼴로 배열되는 경우이다. 따라서 가능한 가짓수는  $9 + 9 = 18$  가지이다. 숫자  $a$ 가 다섯 번 반복되는 경우는 1가지이다. 숫자  $a$ 를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 연속하여 나타나는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는  $10 \times (261 + 18 + 1) = 2800$ 가지이다.
- (3) 주어진 보안정책에 따라 수정이가 비밀번호를 정할 때 가능한 비밀번호의 길이는 다섯 자리(같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나지 않는 비밀번호)와 일곱 자리(앞 다섯 자리에 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호)이다. 아무 숫자나 사용할 수 있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는  $10^5 = 100000$ 이고, 여기에서 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호는 허용되지 않으므로 (2)에서 구한 2800개를 제외하여 가능한 다섯 자리의 비밀번호의 가짓수  $100000 - 2800 = 97200$ 가지를 구할 수 있다. 일곱 자리의 비밀번호는 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 다섯 자리 비밀번호의 뒤쪽에 두 자리가 더해졌으므로 가능한 가짓수는  $2800 \times 10^2 = 280000$ 가지로 구할 수 있다. 따라서 모든 가능한 비밀번호의 가짓수는  $97200 + 280000 = 377200$ 가지이다.

**평가 기준**

채점 기준	배점
<p><b>문제 4</b> (1)</p> <p>① 다섯 자리 비밀번호를 만들 때, 세 번 이상 들어있는 숫자는 하나만 선택할 수 있다.</p> <p>② 임의의 숫자 <math>a</math>가 <math>n</math>번만 들어있는 경우의 수는 다섯 개의 자리에서 <math>n</math>개를 골라 <math>a</math>를 쓰고, 나머지 <math>5 - n</math>개의 자리에 숫자 <math>a</math>가 아닌 숫자를 각각 선택하는 수이므로 <math>{}_5C_n \times 9^{5-n}</math>이다.</p> <p>③ 숫자 <math>a</math>가 세 번만 들어있는 경우는 <math>{}_5C_3 \times 9^2 = 10 \times 81 = 810</math>가지, 숫자 <math>a</math>가 네 번만 들어있는 경우는 <math>{}_5C_4 \times 9 = 5 \times 9 = 45</math>가지, 숫자 <math>a</math>가 다섯 번 들어있는 경우는 1가지이다.</p>	7점

채점 기준	배점
<p>④ 숫자 <math>a</math>를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 들어있는 모든 다섯 자리 비밀 번호의 가짓수는 <math>10 \times (810 + 45 + 1) = 8560</math>가지이다.</p> <p><b>채점 기준</b></p> <p>1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음                  2등급: ④단계까지 서술하였으나 ①~③단계를 맞고 답이 틀린 경우                  3등급: ①~② 단계를 옳게 서술하고 ③단계 계산에서 1~2개 맞은 경우                  4등급: ①~② 단계를 옳게 서술하고 ③단계 계산을 접근하지 못한 경우                  5등급: ①을 옳게 계산한 경우 또는 ②를 옳게 서술한 경우                  6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우                  7등급: 백지 답안</p>	
<p><b>문제 4</b> (2)</p> <p>① 다섯 자리의 비밀번호에서 숫자 <math>a</math>가 세 번만 연속하여 나타나는 것은 <math>aaa\square, \square aaa, \square\square aaa</math>의 꼴로 배열되는 경우이다. 여기에서 <math>a</math>는 세 번만 연속이므로 <math>a</math>의 앞이나 뒤의 <math>\square</math>에는 <math>a</math>가 올 수 없다. 따라서 가능한 가짓수는 <math>(9 \times 10) + (9 \times 9) + (10 \times 9) = 261</math> 가지이다.</p> <p>② 마찬가지로, 숫자 <math>a</math>가 네 번만 연속하여 나타나는 것은 <math>aaaa\square, aaaa\square</math>의 꼴로 배열되는 경우이다. 따라서 가능한 가짓수는 <math>9 + 9 = 18</math>가지이다.</p> <p>③ 숫자 <math>a</math>가 다섯 번 반복되는 경우는 1가지이다.</p> <p>④ 숫자 <math>a</math>를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 연속하여 나타나는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 <math>10 \times (261 + 18 + 1) = 2800</math>가지이다.</p> <p><b>채점 기준</b></p> <p>1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음                  2등급: ①~④단계의 전개 과정은 맞았으나 계산 실수로 답이 틀린 경우                  3등급: ①, ②, ③ 단계에서 세 가지 단계를 옳게 서술한 경우                  4등급: ①, ②, ③ 단계에서 두 가지 단계를 옳게 서술한 경우                  5등급: ①, ②, ③ 단계에서 한 가지 단계를 옳게 서술한 경우                  6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우                  7등급: 백지 답안</p>	10점
<p><b>문제 4</b> (3)</p> <p>① 주어진 보안정책에 따라 가능한 비밀번호의 길이는 다섯 자리와 일곱 자리이다. 다섯 자리의 비밀번호는 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나지 않는 비밀번호이다.</p>	8점

채점 기준	배점
<p>② 일곱 자리의 비밀번호는 앞의 다섯 자리에 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나고 뒤에 두 자리가 추가된 비밀번호이다.</p> <p>③ 아무 숫자나 사용할 수 있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 <math>10^5 = 100000</math>이고, 여기에서 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호는 허용되지 않으므로 (2)에서 구한 2800개를 제외하여 허용된 다섯 자리의 비밀번호의 가짓수 <math>100000 - 2800 = 97200</math>가지를 구할 수 있다.</p> <p>④ 일곱 자리의 비밀번호는 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 다섯 자리 비밀번호의 뒤쪽에 두 자리가 더해졌으므로 가능한 가짓수는 <math>2800 \times 10^2 = 280000</math>가지로 구할 수 있다.</p> <p>⑤ 따라서 모든 가능한 비밀번호의 가짓수는 <math>97200 + 280000 = 377200</math>가지이다.</p> <p><b>채점 기준</b></p> <p>1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급: ①~④단계의 전개 과정은 맞았으나 계산 실수나 ⑤단계의 오류로 답이 틀린 경우</p> <p>3등급: ①, ②, ③, ④단계에서 세 가지 단계를 옳게 서술한 경우</p> <p>4등급: ①, ②, ③, ④단계에서 두 가지 단계를 옳게 서술한 경우</p> <p>5등급: ①, ②, ③, ④단계에서 한 가지 단계를 옳게 서술한 경우</p> <p>6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우</p> <p>7등급: 백지 답안</p>	

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.  
 ※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

## 예시 답안

(1) 다섯 자리 비밀번호를 만들 때, 세 번 이상 들어있는 숫자는 하나만 선택할 수 있다. 따라서 0이 세 번 이상, 또는 1이 세 번 이상, ..., 또는 9가 세 번 이상으로 10가지 숫자 중 하나를 선택하는 것이 가능하다. 한 숫자가  $n$ 번만 들어있는 경우의 수는 하나의 숫자를 선택한 후, 다섯 자리에서  $n$ 개를 골라 이 숫자로 채우고, 나머지  $5-n$ 개의 자리에 앞에서 선택하지 않은 숫자 중 하나를 각각 선택하는 수이므로  $10 \times {}_5C_n \times 9^{5-n}$  이다.

한 숫자가 세 번만 들어있는 경우는  $10 \times {}_5C_3 \times 9^2 = 10 \times 10 \times 81 = 8100$ 가지, 한 숫자가 네 번만 들어있는 경우는  $10 \times {}_5C_4 \times 9 = 10 \times 5 \times 9 = 450$ 가지, 한 숫자가 다섯 번 들어있는 경우는 10가지이다. 따라서 같은 숫자가 세 번 이상 들어있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는  $8100 + 450 + 10 = 8560$ 개다.

(2) 다섯 자리의 비밀번호에서 숫자  $a$ 가 세 번 이상 연속하여 나타나는 것은  $aaa\Box\Box$ ,  $\Box aaa\Box$ ,  $\Box\Box aaa$ 의 꼴로 배열되는 경우이다.

①  $aaa\Box\Box$ 에서  $10 \times 10 = 100$ 가지 경우가 가능하다.

②  $\Box aaa\Box$ 에서 앞과 마찬가지로 100가지 경우가 가능하지만  $aaa\Box\Box$ 와 중복되는 경우는 제외하고 전체 가짓수를 세어야 한다.  $aaaa\Box$ 는  $aaa\Box\Box$ 와 중복되는 경우를 나타내고 10가지의 경우의 수가 있다.

따라서  $100 - 10 = 90$ 가지의 경우가 추가된다.

③  $\Box\Box aaa$ 에서 앞과 마찬가지로 100가지 경우가 가능하지만  $aaa\Box\Box$ ,  $\Box aaa\Box$ 와 중복되는 경우는 제외하고 전체 가짓수를 세어야 한다.  $aaaaa$ 는  $aaa\Box\Box$ 와 중복되는 하나의 경우이다.  $\Box aaaa$ 는  $\Box aaa\Box$ 와 중복되는 경우를 나타내고  $10 \times 10 = 100$ 가지의 경우의 수가 있으며 앞의  $aaaaa$ 의 경우를 포함한다. 따라서  $100 - 10 = 90$ 가지의 경우가 추가된다. 숫자  $a$ 를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 연속하여 나타나는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는  $10 \times (100 + 90 + 90) = 2800$ 가지이다.

(3) 주어진 보안정책에 따라 수정이가 비밀번호를 정할 때 가능한 비밀번호의 길이는 다섯 자리(같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나지 않는 비밀번호)와 일곱 자리(앞의 다섯 자리에 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호)이다. 아무 숫자나 사용할 수 있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는  $10^5 = 100000$ 이고, 여기에서 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호는 허용되지 않으므로 (2)에서 구한 2800개를 제외하여 허용된 다섯 자리의 비밀번호의 가짓수  $100000 - 2800 = 97200$ 가지를 구할 수 있다. 일곱 자리의 비밀번호는 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 다섯 자리 비밀번호의 뒤쪽에 두 자리가 더해졌으므로 가능한 가짓수는  $2800 \times 10^2 = 280000$ 가지를 구할 수 있다. 따라서 모든 가능한 비밀번호의 가짓수는  $97200 + 280000 = 377200$ 가지이다.