전라북도교육청 주관 2015년 5월 고3 수능모의고사 문제지

제 2 교시

수학 영역 (B형)

전라북도교육청

1. $2\log_2 3 - \log_2 24 - \log_2 12$의 값은? [2점]

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AB-BA$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 0

3. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx - \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1}\,dx$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.) [2점]

① $1-2\ln 2$　② $1-\ln 2$　③ $2-\ln 2$　④ $2-2\ln 2$　⑤ $3-2\ln 2$

4. 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 점 (a, b)가 점 $(-1, -1)$로 옮겨질 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 0

5. 함수 $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin x$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M\times m$의 값은? [3점]

① -13 ② -12 ③ -11 ④ -10 ⑤ -9

6. $0\le x<2\pi$에서 방정식

$$2\sin x-2\sin 2x\cos x-\cos 2x+1=0$$

의 서로 다른 모든 실근의 합은? [3점]

① 3π ② $\frac{7}{2}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ 5π

7. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2-n}$의 소수 부분을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

8. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB-B=O$를 만족시키는 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 B가 존재하기 위한 실수 a의 값은? (단, O는 영행렬이다.) [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

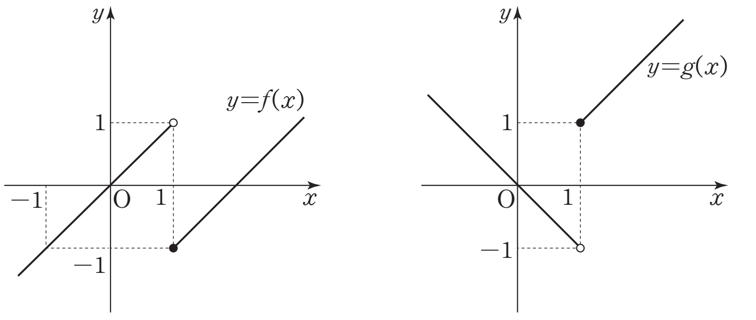
9. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

10. 좌표평면에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $x=1$에서 연속인 함수만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

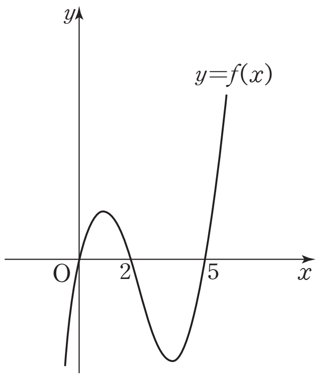


〈보 기〉

ㄱ. $f(x)+g(x)$
ㄴ. $f(x)g(x)$
ㄷ. $f(g(x))$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 좌표평면에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 분수부등식 $\dfrac{f(x+3)}{f(x-4)} \le 0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? (단, $f(0)=f(2)=f(5)=0$) [3점]



① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

12. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-2$이고,

$$na_{n+1}-(n+1)a_n=\frac{n^2(n+1)}{2^n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

$na_{n+1}-(n+1)a_n=\dfrac{n^2(n+1)}{2^n}$의 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{n}{2^n}$$

이므로 $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}$$

이때,

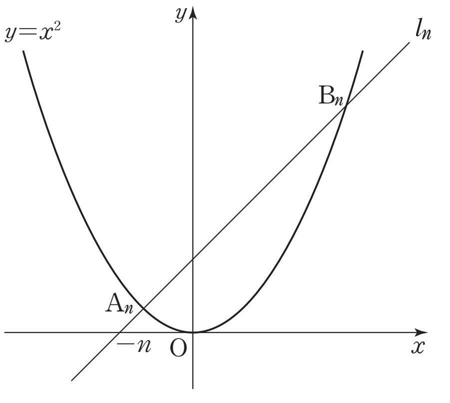
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}&=2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}\right)\\&=2\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}\right)\right.\\&\qquad\left.-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}\right)\right\}\\&=2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}-\frac{\boxed{(가)}}{2^n}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n=-\frac{\boxed{(나)}}{2^{n-1}}$$

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(6)+g(5)$의 값은? [4점]

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

〔13～14〕 그림과 같이 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 점 $(-n,\ 0)$을 지나고 기울기가 n인 직선 l_n이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오. (단, 점 A_n의 x좌표는 점 B_n의 x좌표보다 작다.)



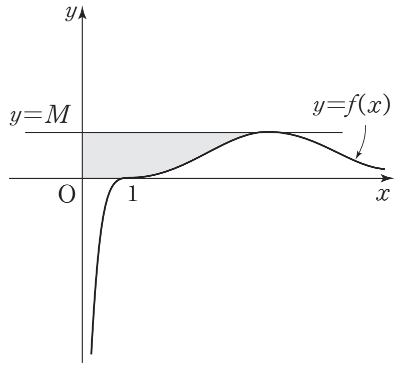
13. $\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{n^2}$의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

14. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 A_n에서의 접선과 점 B_n에서의 접선의 교점을 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}(2a_n-b_n)$의 값은? [4점]

① 425 ② 430 ③ 435 ④ 440 ⑤ 445

15. 함수 $f(x)=\frac{(\ln x)^3}{x}$의 최댓값을 M이라 하자. 그림과 같이 좌표평면에서 x축, y축 및 직선 $y=M$과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]



① $\frac{25}{4}$　② $\frac{13}{2}$　③ $\frac{27}{4}$　④ 7　⑤ $\frac{29}{4}$

16. 어느 회사에서 회사의 장기적인 발전을 위하여 회사 전체 예산에서 연구비가 차지하는 비율을 증가시키기로 하였다. 현재 회사 전체 예산에서 연구비가 차지하는 비율은 4%이다. 회사 전체 예산은 매년 전년도에 비해 10%씩 증가하고, 연구비는 매년 전년도에 비해 20%씩 증가한다고 한다. 이와 같은 비율로 매년 회사 전체 예산과 연구비가 증가한다고 할 때, 현재로부터 n년 후 처음으로 회사 전체 예산에서 연구비가 차지하는 비율이 8% 이상이 된다고 한다. 자연수 n의 값은?
(단, $\log 2=0.3010$, $\log 1.1=0.0414$, $\log 1.2=0.0792$로 계산한다.) [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

17. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=E,\ A+AB=3E$$

일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

〈보 기〉

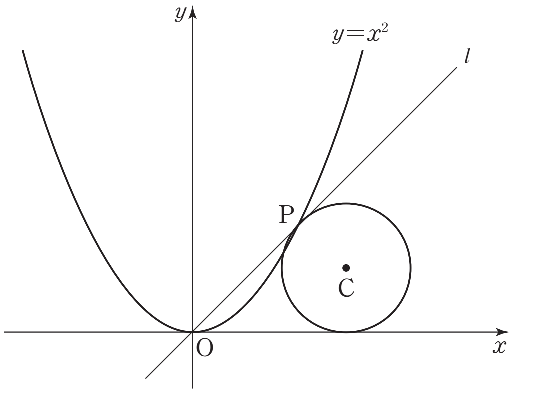
ㄱ. $AB=BA$

ㄴ. $A^2-2A=-3E$

ㄷ. 행렬 A^3-B^3은 역행렬을 갖는다.

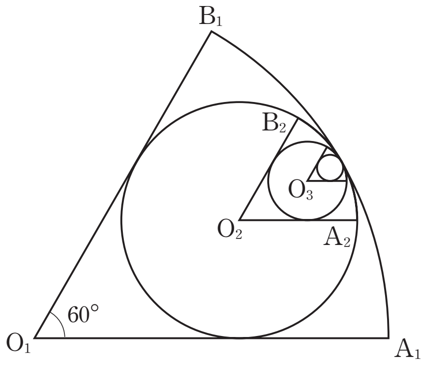
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O와 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$을 지나는 직선을 l이라 하자. 직선 l과 점 P에서 접하면서 x축에 접하는 원 중에서 중심이 제1사분면에 있는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 할 때, $\lim_{t \to +0} \frac{b}{t(a+b)}$의 값은? (단, $t>0$) [4점]



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

19. 그림과 같이 길이가 3인 선분 $\mathrm{O_1A_1}$을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$에 내접하는 가장 큰 원의 중심을 $\mathrm{O_2}$라 하자. 내접원의 두 반지름인 $\overline{\mathrm{O_2A_2}}$, $\overline{\mathrm{O_2B_2}}$를 각각 $\overline{\mathrm{O_1A_1}}$, $\overline{\mathrm{O_1B_1}}$에 평행하도록 잡고, 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2B_2}$를 그린다. 이와 같이 자연수 n에 대하여 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 가장 큰 원의 중심을 O_{n+1}이라 하고, 내접원의 두 반지름인 $\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}}$, $\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}$을 각각 $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n}$, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{B}_n}$에 평행하도록 잡고, 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$을 그린다. 선분 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n$의 길이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은? [4점]

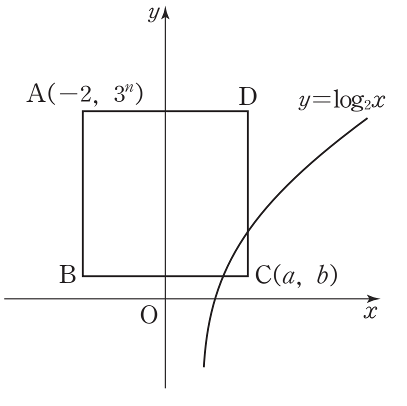


① $\frac{75}{8}$ ② $\frac{77}{8}$ ③ $\frac{79}{8}$ ④ $\frac{81}{8}$ ⑤ $\frac{83}{8}$

20. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키고 한 변의 길이가 자연수인 가장 작은 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $f(n)$이라 하자. (단, $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{AC}}$)

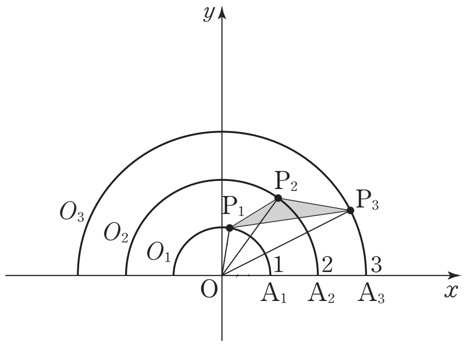
> (가) $\mathrm{A}(-2,\ 3^n)$
> (나) 정사각형 ABCD의 네 변은 x축 또는 y축에 평행하다.
> (다) 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $b \le \log_2 a$를 만족시킨다.

$f(1)+f(2)+f(3)$의 값은? [4점]



① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

21. 그림과 같이 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1, 2, 3인 세 반원을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 또한, 세 반원 O_1, O_2, O_3의 호가 x축의 양의 방향과 만나는 점을 각각 A_1, A_2, A_3이라 하고, 세 점 P_1, P_2, P_3은 각각 세 반원 O_1, O_2, O_3의 호 위에 있다. $\angle \mathrm{A}_3\mathrm{OP}_3 = \angle \mathrm{P}_3\mathrm{OP}_2 = \angle \mathrm{P}_2\mathrm{OP}_1$을 만족시키고, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3} = \sqrt{6}$일 때, 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6}$　② $\dfrac{3\sqrt{6}-2\sqrt{5}}{6}$　③ $\dfrac{4\sqrt{6}-3\sqrt{5}}{6}$　④ $\dfrac{5\sqrt{6}-4\sqrt{5}}{6}$　⑤ $\dfrac{6\sqrt{6}-5\sqrt{5}}{6}$

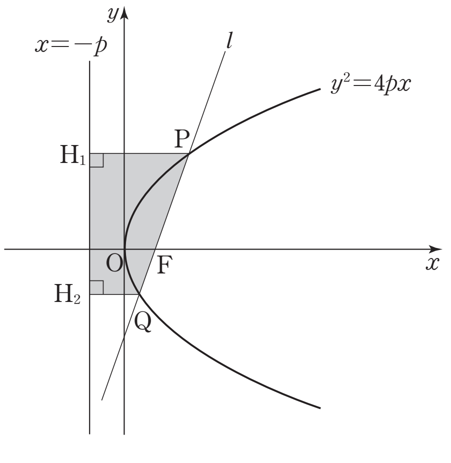
단 답 형

22. 방정식 $x-\sqrt{2x-1}=2$의 실근을 구하시오. [3점]

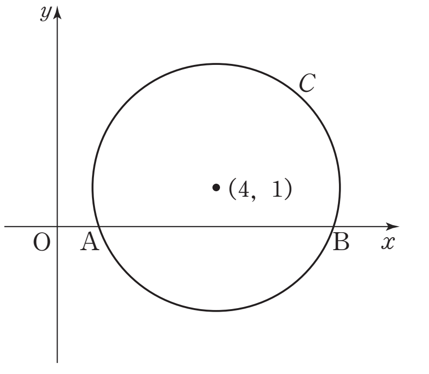
23. 좌표평면에서 곡선 $y=\dfrac{2}{2x-1}$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, 2)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2e^{\frac{x}{2}}$의 두 변곡점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 할 때, $(x_1+x_2)^2$의 값을 구하시오. (단, e는 자연로그의 밑이다.) [3점]

25. 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=4px$의 초점 F를 지나는 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PF}}=8$, $\overline{\mathrm{QF}}=4$이다. 두 점 P, Q에서 직선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 할 때, 사각형 $\mathrm{PH_1H_2Q}$의 넓이는 S이다. $\sqrt{2}S$의 값을 구하시오. (단, $p>0$) [3점]



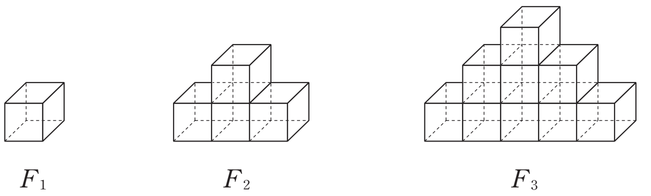
26. 그림과 같이 좌표평면에서 중심이 점 (4, 1)이고, x축과 두 점 A, B에서 만나는 원 C가 있다. 행렬 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 점 A가 점 B로 옮겨진다. 원 C의 넓이가 10π일 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x 좌표는 양수이고, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작다.) [3점]



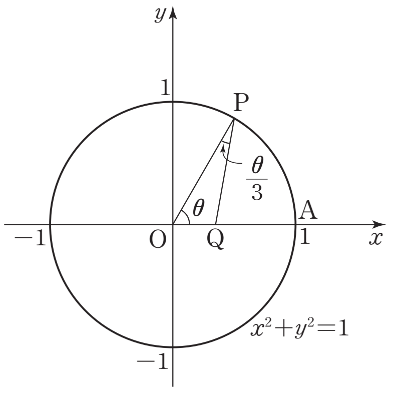
27. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체를 이용하여 다음과 같은 규칙에 따라 입체도형 F_n을 만든다.

> [1 단계] 정육면체 1개로 입체도형 F_1을 만든다.
> [n 단계] $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여, [$(n-1)$ 단계]에서 만들어진 입체도형 F_{n-1} 아래에 정육면체 $(2n-1)$개를 이어 붙여서 입체도형 F_n을 만든다.

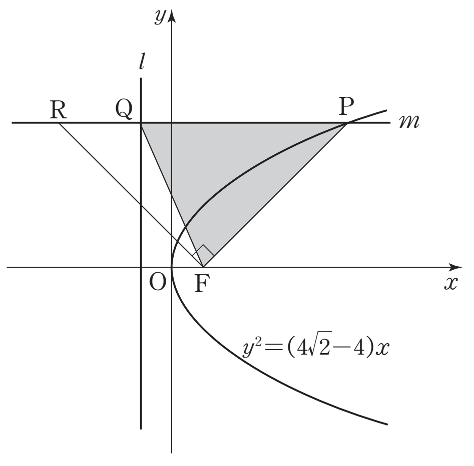
이와 같이 입체도형을 계속 만들어 나갈 때, 입체도형 F_n을 만드는 데 사용된 정육면체의 개수를 a_n, 입체도형 F_n의 겉넓이를 b_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=4$, $b_2=18$이다. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$의 값을 구하시오. (단, 이웃한 두 정육면체의 네 꼭짓점은 일치한다.) [4점]



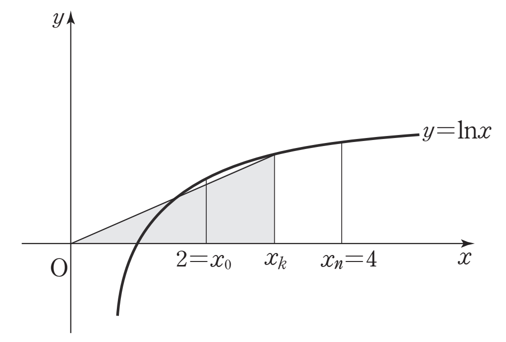
28. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P와 점 A(1, 0)에 대하여 $\angle\text{POA}=\theta$라 하고, 선분 OA 위의 점 Q가 $\angle\text{OPQ}=\dfrac{\theta}{3}$를 만족시킬 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to+0} \dfrac{3\theta}{S(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\text{ 이고, O는 원점이다.}\right)$ [4점]



29. 그림과 같이 좌표평면에서 초점이 F인 포물선 $y^2=(4\sqrt{2}-4)x$ 위의 한 점 P를 지나고 y축에 수직인 직선 m이 포물선의 준선 l과 만나는 점을 Q라 하자. 직선 m 위의 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FR}}$인 점 R에 대하여 $\angle\mathrm{PFR}=90^\circ$일 때, 삼각형 PQF의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이고, 점 R는 제2사분면 위의 점이다.) [4점]



30. 그림과 같이 좌표평면 위에 함수 $f(x)=\ln x$의 그래프가 있다. x축의 닫힌 구간 $[2,\ 4]$를 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $2=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=4$라 하자. 세 점 $(0,\ 0)$, $(x_k,\ 0)$, $(x_k,\ f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $A_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값은 $-\frac{3}{4}+a\ln 2$이다. $100a$의 값을 구하시오. (단, n은 2 이상의 자연수이고, a는 상수이다.) [4점]



♣ 확인 사항

답안지에 필요한 사항을 정확히 기입(표기)하였는지 확인하시오.