

■ [공통: 수학 I·수학 II]

- 01.㉔ 02.㉕ 03.㉕ 04.㉔ 05.㉑
06.㉓ 07.㉑ 08.㉑ 09.㉔ 10.㉕
11.㉓ 12.㉓ 13.㉔ 14.㉓ 15.㉔
16. 3 17. 4 18. 12 19. 6
20. 110 21. 678 22. 9

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & (2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2} \\ &= (2^{\sqrt{3}} \times 2^2)^{\sqrt{3}-2} \\ &= (2^{\sqrt{3}+2})^{\sqrt{3}-2} \\ &= 2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} \\ &= 2^{3-4} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답 ㉔

2. 출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x + 1 \\ \text{이므로} \\ f'(1) &= 3 + 6 + 1 = 10 \end{aligned}$$

정답 ㉕

3. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a_1 + d = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$a_4 + a_6 = 36 \text{에서}$$

$$(a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 36$$

$$2a_1 + 8d = 36$$

$$a_1 + 4d = 18 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒에서

$$a_1 = 2, d = 4$$

따라서

$$a_{10} = 2 + 9 \times 4 = 38$$

정답 ㉕

4. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \rightarrow -1^-$ 일 때, $f(x) \rightarrow 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$$

또, $x \rightarrow 2$ 일 때, $f(x) \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

따라서,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 + 1 = 4$$

정답 ㉔

5. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_1 = 1 \text{이므로 } a_2 = 2$$

$$a_2 = 2 \text{이므로 } a_3 = 4$$

$$a_3 = 4 \text{이므로 } a_4 = 8$$

$$a_4 = 8 \text{이므로 } a_5 = 1$$

$$a_5 = 1 \text{이므로 } a_6 = 2$$

$$a_6 = 2 \text{이므로 } a_7 = 4$$

$$a_7 = 4 \text{이므로 } a_8 = 8$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= 2 \times (1+2+4+8) \\ &= 2 \times 15 \\ &= 30 \end{aligned}$$

정답 ①

6. 출제의도 : 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{방정식 } 2x^3 - 3x^2 - 12x + k = 0, \text{ 즉}$$

$$2x^3 - 3x^2 - 12x = -k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

에서

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \text{라 하자.}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

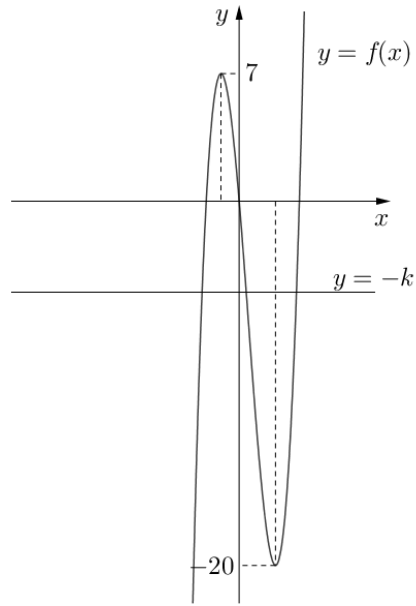
$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---------|-----|----|-----|-----|-----|
| x | ... | -1 | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 7 | ↘ | -20 | ↗ |

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 7을 갖고, $x = 2$ 에서 극솟값 -20을 갖는다.



방정식 ①이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$-20 < -k < 7$$

즉, $-7 < k < 20$ 이다.

따라서 정수 k 의 값은

$$-6, -5, -4, \dots, 19$$

이고, 그 개수는 26이다.

정답 ③

7. 출제의도 : 삼각함수의 정의와 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\tan \theta - \frac{6}{\tan \theta} = 1 \text{이므로}$$

양변에 $\tan \theta$ 를 곱하면

$$\tan^2 \theta - 6 = \tan \theta$$

$$\tan^2 \theta - \tan \theta - 6 = 0$$

$$(\tan \theta + 2)(\tan \theta - 3) = 0$$

$$\tan \theta = -2 \text{ 또는 } \tan \theta = 3$$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\tan \theta = 3$$

이때,

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 3,$$

$$\sin \theta = 3 \cos \theta$$

이므로

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$9 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$10 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{또는} \quad \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \dots \ominus$$

이 값을 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{10} = 1$$

$$\sin^2 \theta = \frac{9}{10}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{또는} \quad \sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \dots \omin�$$

따라서, $\omin�$ 과 $\omin�$ 에서

$$\begin{aligned} \sin \theta + \cos \theta &= \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \\ &= -\frac{4}{\sqrt{10}} \\ &= -\frac{2\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

정답 ①

8. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

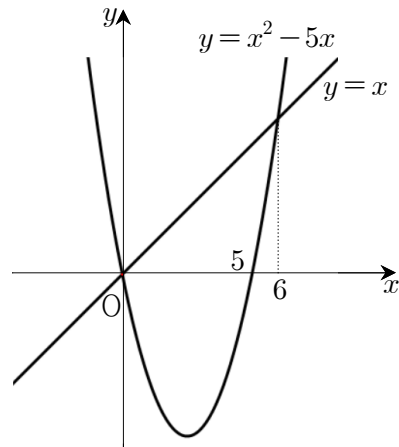
정답풀이 :

$$x^2 - 5x = x \text{에서}$$

$$x(x-6)=0$$

$$x=0 \quad \text{또는} \quad x=6$$

곡선 $y = x^2 - 5x$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점은 원점과 (6, 6)이다.



곡선 $y = x^2 - 5x$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6 \{x - (x^2 - 5x)\} dx$$

$$= \int_0^6 (6x - x^2) dx$$

$$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^6$$

$$= 36$$

따라서 직선 $x = k$ 가 넓이를 이등분하므로

$$18 = \int_0^k \{x - (x^2 - 5x)\} dx$$

$$= \int_0^k (6x - x^2) dx$$

$$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^k$$

$$= 3k^2 - \frac{1}{3}k^3$$

정리하면

$$k^3 - 9k^2 + 54 = 0$$

$$(k-3)(k^2 - 6k - 18) = 0$$

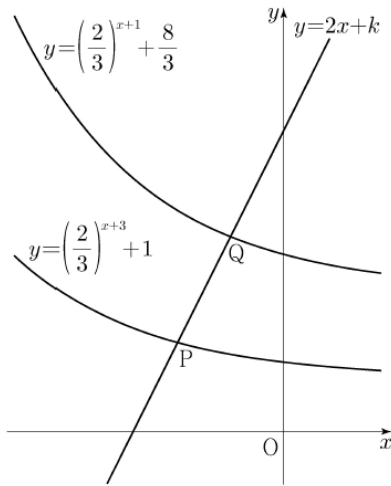
즉, $0 < k < 6$ 이므로

$$k = 3$$

정답 ①

9. 출제의도 : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 점 P, Q의 x좌표를 각각

$p, q (p < q)$ 라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y = 2x + k$ 위의 점이므로

$$P(p, 2p+k), Q(q, 2q+k)$$

로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{PQ} = \sqrt{5}$, 즉 $\overline{PQ}^2 = 5$ 이므로

$$(q-p)^2 + (2q-2p)^2 = 5$$

$$(q-p)^2 = 1$$

$q-p > 0$ 이므로

$$q-p = 1$$

즉, $q = p+1$ 이다.

한편, 점 P는 함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} + 1$ 의

그래프 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 1 = 2p+k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 Q는 함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \frac{8}{3}$ 의 그래프

위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} + \frac{8}{3} = 2p+k+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} + \frac{8}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 3$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} = 1$$

$p+2 = 0$, 즉 $p = -2$

$p = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3} + 1 = 2 \times (-2) + k$$

$$\text{따라서 } k = \frac{17}{3}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 다항함수의 도함수와 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $(0, 0)$ 이 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때, 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(0)(x-0) + 0$$

$$y = f'(0)x \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또, 곡선 $y = xf(x)$ 위에 점 $(1, 2)$ 가 있으므로

$$1 \times f(1) = 2$$

$$f(1) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$y = xf(x)$ 에서

$y' = f(x) + xf'(x)$ 이므로

(1, 2)에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned}
 y &= \{f(1) + f'(1)\}(x-1) + 2 \\
 &= \{f'(1) + 2\}(x-1) + 2 \\
 &= \{f'(1) + 2\}x - f'(1) \quad \dots\dots \textcircled{a}
 \end{aligned}$$

이때, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하면

㉠에서

$$d = 0$$

이때, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 이므로

㉡에서

$$a + b + c = 2 \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

㉠과 ㉡에서

두 접선이 일치해야 하므로

$$f'(0) = f'(1) + 2, \quad f'(1) = 0$$

$$\text{따라서 } f'(0) = 2, \quad f'(1) = 0$$

이때, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 이므로

$$f'(0) = 2 \text{에서}$$

$$c = 2$$

이때, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2$ 이므로

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$3a + 2b + 2 = 0$$

㉡에서 $c = 2$ 를 대입하면

$$a + b = 0 \text{이므로}$$

$b = -a$ 를 위 식에 대입하여 a, b 를 구하

면 $a = -2, b = 2$ 이므로

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x,$$

$$f'(x) = -6x^2 + 4x + 2$$

따라서

$$f'(2) = -14$$

정답 ⑤

11. 출제의도 : 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{a} \text{이므로}$$

함수 $f(x)$ 의 주기는 a 이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선이므로

양수 t 에 대하여

$B(t, \sqrt{3}t)$ 로 놓으면

$A(-t, -\sqrt{3}t)$ 이고,

$\overline{AB} = 4t$ 이다.

이때, 함수 $f(x)$ 의 주기가 a 이므로

$\overline{AC} = 4t = a$ 이고,

$C(-t + a, -\sqrt{3}t)$, 즉 $C(3t, -\sqrt{3}t)$ 이다.

점 C가 곡선 $y = \tan \frac{\pi x}{a} = \tan \frac{\pi x}{4t}$ 위의

점이므로

$$-\sqrt{3}t = \tan \frac{\pi \times 3t}{4t}$$

$$-\sqrt{3}t = \tan \frac{3\pi}{4} \text{에서}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (4t)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

정답 ③

12. 출제의도 : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0 \text{에서}$$

$$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$$

이므로

$$f(x)=1 \text{ 또는 } f(x)=-x \text{ 또는 } f(x)=x$$

이때, $f(0)=1$ 또는 $f(0)=0$ 이다.

(i) $f(0)=1$ 일 때,

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=1$$

이다. 이때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(0)=0$ 일 때,

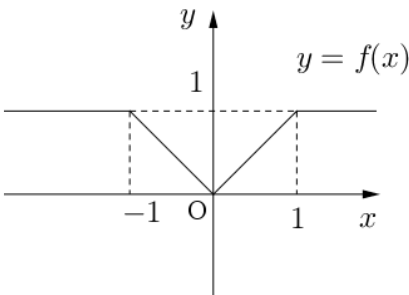
함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x| \leq 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$$

이다.

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x| \leq 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$$



따라서

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=1, f(0)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

13. 출제의도 : 로그의 정의와 성질을 활용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\log_2 b - \log_2 a}{b - a}(x - a) + \log_2 a$$

그러므로 이 직선의 y 절편은

$$-\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \log_2 a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\log_4 b - \log_4 a}{b - a}(x - a) + \log_4 a$$

그러므로 이 직선의 y 절편은

$$\begin{aligned} &-\frac{a(\log_4 b - \log_4 a)}{b - a} + \log_4 a \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \frac{1}{2} \log_2 a \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑦과 ⑧이 같으므로

$$\begin{aligned} &-\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \log_2 a \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \frac{1}{2} \log_2 a \end{aligned}$$

이 식을 정리하면

$$\frac{1}{2} \times \log_2 a = \frac{1}{2} \times \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a}$$

$$\log_2 a = \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a}$$

$$(b - a)\log_2 a = a \log_2 \frac{b}{a}$$

$$\log_2 a^{b-a} = \log_2 \left(\frac{b}{a}\right)^a$$

$$a^{b-a} = \frac{b^a}{a^a}$$

$$a^b = b^a \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

한편, $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$ 이고

$f(1) = 40$ 이므로

$$a^b + b^a = 40$$

㉠을 대입하면

$$a^b + a^b = 40$$

$$a^b = 20$$

따라서 $b^a = 20$ 이므로

$$\begin{aligned} f(2) &= a^{2b} + b^{2a} \\ &= (a^b)^2 + (b^a)^2 \\ &= 20^2 + 20^2 \\ &= 800 \end{aligned}$$

정답 ②

14. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$$x(0) = 0, x(1) = 0 \text{이므로}$$

점 P의 위치는 $t=0$ 일 때 수직선의 원점이고, $t=1$ 일 때도 수직선의 원점이다.

$$\text{또, } \int_0^1 |v(t)| dt = 2 \text{이므로}$$

점 P가 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 위치의 변화량이 0이므로

$$\int_0^1 v(t) dt = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$ 이면

점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 t_1 이 존재하므로

점 P가 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지

움직인 거리가 2보다 크다. (거짓)

ㄷ. $0 \leq t \leq 1$ 인 모든 시각 t 에서

점 P와 원점 사이의 거리가 1

보다 작고, 점 P가 $t=0$ 에서 $t=1$

까지 움직인 거리가 2이므로

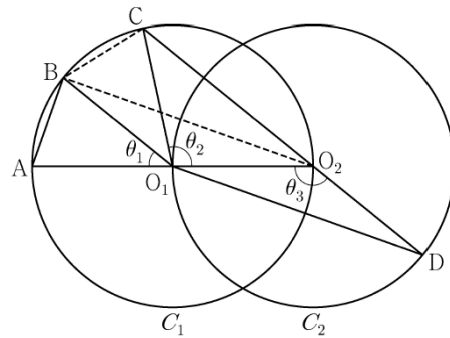
점 P는 $0 < t < 1$ 에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이의 비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$$\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi \text{이므로}$$

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2} \text{이고}$$

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \text{에서 } 2\theta_1 + \theta_2 = \pi \text{이므로}$$

$$\angle CO_1B = \theta_1 \text{이다.}$$

이때, $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$ 이므로

삼각형 O_1O_2B 와 삼각형 O_2O_1D 는 합동이다.

$\overline{AB} = k$ 라 할 때,

$$\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k \text{이므로}$$

$$\overline{AO_2} = \sqrt{k^2 + (2\sqrt{2}k)^2} = \boxed{3k} \text{이고,}$$

$$\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2} \text{이므로}$$

$$\cos \frac{\theta_1}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \text{이다.}$$

삼각형 O_2BC 에서

$$\overline{BC} = k, \overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k, \angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2} \text{ 이므로}$$

삼각형 BO_2C 에서

$$\overline{O_2C} = x (0 < x < 3k) \text{ 라 하면}$$

코사인법칙에 의하여

$$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \cos \frac{\theta_1}{2}$$

$$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$$

$$(3x - 7k)(x - 3k) = 0$$

$0 < x < 3k$ 이므로

$$x = \frac{7}{3}k$$

즉, $\overline{O_2C} = \boxed{\frac{7}{3}k}$ 이다.

$$\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\boxed{\frac{3k}{2}} + \boxed{\frac{7}{3}k} \right) \text{ 이다.}$$

이상에서

$$f(k) = 3k, g(k) = \frac{7}{3}k, p = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(p) \times g(p) &= \left(3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \times \left(\frac{7}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= \frac{56}{9} \end{aligned}$$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2}$$

$$= \log_2 120 - \log_2 15$$

$$= \log_2 \frac{120}{15}$$

$$= \log_2 8$$

$$= \log_2 2^3$$

$$= 3$$

정답 3

17. 출제의도 : 도함수가 주어진 함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 + 2x) dx$$

$$= x^3 + x^2 + C \text{ (단, } C \text{ 는 적분상수)}$$

이때, $f(0) = 2$ 이므로 $C = 2$

따라서

$$f(x) = x^3 + x^2 + 2 \text{ 이므로}$$

$$f(1) = 1 + 1 + 2 = 4$$

정답 4

18. 출제의도 : 합의 기호 \sum 의 성질을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 \frac{a_k}{2} = 56 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^8 a_k = 100 \text{ 에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^8 \frac{a_k}{2} = 50 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠ - ㉡을 하면

$$\frac{a_8}{2} = 6$$

따라서 $a_8 = 12$

정답 12

19. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 알 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면

$$f'(x) \geq 0$$

이때, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D/4 \leq 0$ 이어야 하므로

$$D/4 = a^2 - 3(-a^2 + 8a)$$

$$= 4a^2 - 24a$$

$$= 4a(a - 6) \leq 0$$

그러므로

$$0 \leq a \leq 6$$

따라서, a 의 최댓값은 6이다.

정답 6

20. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x+1) - xf(x) = ax + b \text{에}$$

$x = 0$ 을 대입하면

$$f(1) = b$$

달힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) = x$ 이므로

$$b = 1$$

또, $f(x+1) - xf(x) = ax + 1$ 이므로

$0 \leq x \leq 1$ 에서

$$f(x+1) = xf(x) + ax + 1$$

$$= x^2 + ax + 1$$

$x+1=t$ 로 치환하면

$$f(t) = (t-1)^2 + a(t-1) + 1$$

$$= t^2 + (a-2)t + 2 - a \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f'(t) = 2t + (a-2) \text{이고,}$$

달힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) = x$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1) = 1$ 이므로

$$a = 1$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서 $1 \leq x \leq 2$ 일 때

$$f(x) = x^2 - x + 1 \text{ 이다.}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - x + 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\text{즉, } 60 \times \int_1^2 f(x) dx = 60 \times \frac{11}{6}$$

$$= 110$$

정답 110

21. 출제의도 : 등비수열의 합을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인

등비수열이므로

$$|a_n| = 2^n$$

한편,

$$\sum_{k=1}^9 |a_k| = \sum_{k=1}^9 2^k = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 2,$$

$$|a_{10}| = 2^{10}$$

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = -14$$

를 만족하기 위해서는

$$a_1 = -2, a_2 = -4$$

$$\sum_{k=3}^9 a_k = \sum_{k=3}^9 2^k = \frac{2^3(2^7-1)}{2-1} = 2^{10} - 8,$$

$$a_{10} = -1024$$

이어야 한다.

따라서

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ = (-2) + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 \\ = 678 \end{aligned}$$

정답 678

22. 출제의도 :

함수의 극한을 이용하여 도함수 $f'(x)$ 의 특징을 찾아 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

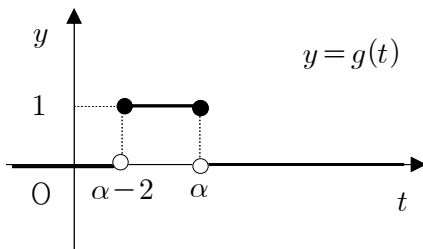
이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 근을 갖지 않는 경우에는

$$g(t) = 0$$

이는 조건 (나)에서

$g(t)$ 가 함숫값 1 또는 2를 갖는 것에 모순이다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 α 를 갖는 경우에는 $y = g(t)$ 는 그림과 같다.



이는 조건 (나)에서

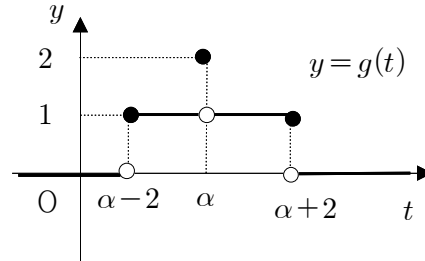
$g(t)$ 가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

그러므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 는 서로

다른 두 실근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 갖는다.

(i) $\beta = \alpha + 2$ 일 때,

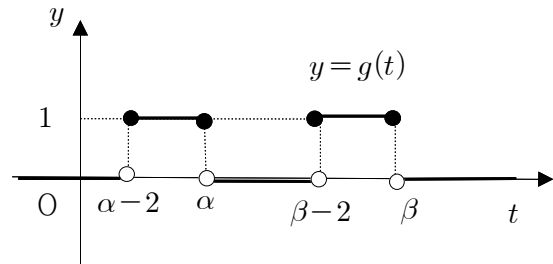
함수 $y = g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (가)를 만족한다.

(ii) $\beta > \alpha + 2$ 일 때,

함수 $y = g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.

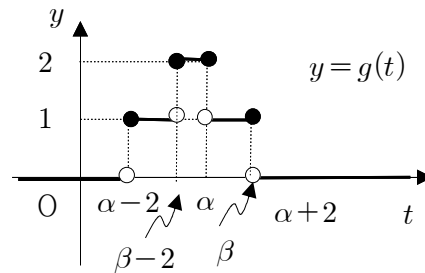


이는 조건 (나)에서

$g(t)$ 가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(iii) $\beta < \alpha + 2$ 일 때,

함수 $y = g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, $\beta - 2 \leq a \leq \alpha$ 인 a 에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (i)의 경우이다.

한편, 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가

$\frac{1}{2}$ 이므로 함수 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수

는 $\frac{3}{2}$ 이다.

그러므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\} \\ &= \frac{3}{2}\{x^2 - (2\alpha+2)x + \alpha^2 + 2\alpha\} \end{aligned}$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}(\alpha+1)x^2 + \frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x + C$$

(단, C 는 적분상수) ㉠

한편, 조건 (나)에서

$$g(f(1)) = g(f(4)) = 2$$

이고 $g(t)$ 의 함숫값이 2인 t 의 값의

개수는 1이므로

$$f(1) = f(4)$$

㉠에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\alpha+1) + \frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha) + C \\ = 32 - 24(\alpha+1) + 6(\alpha^2+2\alpha) + C \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\alpha+1) + \frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha) \\ = 32 - 24(\alpha+1) + 6(\alpha^2+2\alpha) \end{aligned}$$

양변에 2를 곱하면

$$\begin{aligned} 1 - 3(\alpha+1) + 3(\alpha^2+2\alpha) \\ = 64 - 48(\alpha+1) + 12(\alpha^2+2\alpha) \end{aligned}$$

이 식을 정리하면

$$3\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 12\alpha^2 - 24\alpha + 16$$

$$9\alpha^2 - 27\alpha + 18 = 0$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$(\alpha-1)(\alpha-2) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ 또는 } \alpha = 2$$

((i)-㉠) $\alpha = 1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + C$$

이때, $f(1) = \alpha$ 에서

$f(1) = 1$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} + C = 1$$

$$2 + C = 1$$

$$C = -1$$

이때, $f(0) = -1$ 이므로

$$g(f(0)) = g(-1) = 1$$

그러므로 조건을 만족시킨다.

((i)-㉡) $\alpha = 2$ 일 때,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 12x + C$$

이때, $f(1) = \alpha$ 에서

$f(1) = 2$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 12 + C = 2$$

$$8 + C = 2$$

$$C = -6$$

이때, $f(0) = -6$ 이므로

$$g(f(0)) = g(-6) = 0$$

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, ((i)-㉠)에서

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 1$$

이므로

$$f(5) = \frac{1}{2} \times 5^3 - 3 \times 25 + \frac{9}{2} \times 5 - 1$$

$$= \frac{125}{2} - 75 + \frac{45}{2} - 1$$

$$= 9$$

정답 9

[선택: 확률과 통계]

23. ④ 24. ④ 25. ① 26. ③ 27. ②
28. ① 29. 31 30. 191

23. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 전개식의 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x+2)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r x^{7-r} \times 2^r \quad (\text{단, } r=0,1,2,\dots,7)$$

이므로

x^5 의 계수는 $r=2$ 일 때

$${}_7C_2 \times 2^2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times 4 = 84$$

정답 ④

24. 출제의도 : 이항분포를 따르는 확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$V(X) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}n$$

이므로

$$V(2X) = 4V(X)$$

$$= 4 \times \frac{2}{9}n$$

$$= \frac{8}{9}n = 40$$

따라서, $n=45$

정답 ④

25. 출제의도 : 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$$a^2 - b^2 = -5 \quad \text{또는} \quad a^2 - b^2 = 5$$

즉,

$$(b-a)(b+a) = 5 \quad \text{또는} \quad (a-b)(a+b) = 5$$

이고 a, b 는 자연수이므로

$$b-a=1, \quad b+a=5$$

또는

$$a-b=1, \quad a+b=5$$

따라서, $a=2, b=3$ 또는 $a=3, b=2$ 이다.

또한, 조건 (가)에서

$$a+b+c+d+e=12$$

이므로 $c+d+e=7$ 이고 c, d, e 는 자연수

이므로

$$c=c'+1, \quad d=d'+1, \quad e=e'+1$$

(c', d', e' 은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=7$$

$$c'+d'+e'=4$$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 (c', d', e')의 개수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4$$

$$= {}_6C_4$$

$$= {}_6C_2$$

$$= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

따라서, 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$$2 \times 15 = 30$$

정답 ①

26. 출제의도 : 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4이하이거나 7이상인 사건을 A 라 하면 사건 A^C 은 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4보다 크고 7보다 작은 경우이다. 즉, 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5 또는 6이므로

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^C) \\ &= 1 - \frac{{}_5C_2 + {}_4C_2}{{}_{10}C_3} \\ &= 1 - \frac{\frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{4 \times 3}{2 \times 1}}{\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}} \\ &= 1 - \frac{16}{120} \\ &= \frac{13}{15} \end{aligned}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 모평균을 추정하여 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 \bar{x}_1 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{10} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{10}$$

전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 \bar{x}_2 일

때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{20} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$$

이때, $a = c$ 에서

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{10} = \bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$$

이고 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.34$ 이므로

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.96 \times \frac{\sigma}{10} - 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$$

$$= 0.67 \times \frac{\sigma}{10} = 1.34$$

$$\sigma = \frac{1.34 \times 10}{0.67} = 20$$

따라서,

$$b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{10}$$

$$= 2 \times 1.96 \times 2$$

$$= 7.84$$

정답 ②

28. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여

$$f(1) \geq 1$$

$$f(2) \geq \sqrt{2} > 1$$

$$f(3) \geq \sqrt{3} > 1$$

$$f(4) \geq \sqrt{4} = 2$$

$$f(5) \geq \sqrt{5} > 2$$

이고 조건 (나)에 의하여 지역으로 가능한 경우는

{1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}

이다.

(i) 치역이 {1,2,3}인 경우

$f(1)=1, f(5)=3$ 이므로 {2,3,4}에서 {2,3}으로의 함수 중에서 치역이 {3}인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$${}_2\Pi_3 - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

(ii) 치역이 {1,2,4}인 경우

(i)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 7이다.

(iii) 치역이 {1,3,4}인 경우

$f(1)=1$ 이므로 {2,3,4,5}에서 {3,4}로의 함수 중에서 치역이 {3}, {4}인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$${}_2\Pi_4 - 2 = 2^4 - 2 = 14$$

(iv) 치역이 {2,3,4}인 경우

((iv)-①) $f(5)=3$ 인 경우

{1,2,3,4}에서 {2,3,4}로의 함수 중에서 치역이 {2}, {3}, {4}, {2,3}, {3,4}인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$$\begin{aligned} & {}_3\Pi_4 - \{3 + ({}_2\Pi_4 - 2) \times 2\} \\ &= 3^4 - \{3 + (2^4 - 2) \times 2\} \\ &= 81 - 31 \\ &= 50 \end{aligned}$$

((iv)-②) $f(5)=4$ 인 경우

((iv)-①)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 50이다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는

$$7 + 7 + 14 + 50 \times 2 = 128$$

정답 ①

29. 출제의도 : 확률밀도함수의 그래프를 이용하여 연속확률변수의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

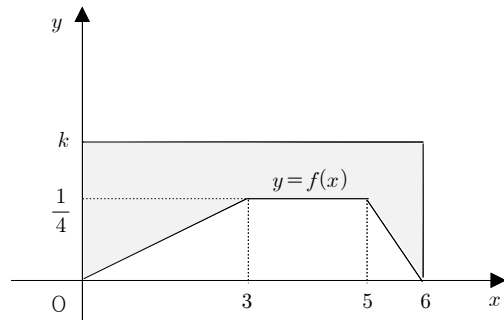
$0 \leq x \leq 6$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + g(x) = k \quad (k \text{는 상수})$$

이므로

$$g(x) = k - f(x)$$

이때, $0 \leq Y \leq 6$ 이고 확률밀도함수의 정의에 의하여 $g(x) = k - f(x) \geq 0$ 즉, $k \geq f(x)$ 이므로 그림과 같이 세 직선 $x=0, x=6, y=k$ 및 함수 $y=f(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 1이다.



또한, $0 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이므로

$$k \times 6 = 2$$

따라서, $k = \frac{1}{3}$

이때,

$$P(6k \leq Y \leq 15k) = P(2 \leq Y \leq 5)$$

이고 이 값은 세 직선 $x=2, x=5,$

$y = \frac{1}{3}$ 및 함수 $y=f(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, $0 \leq x \leq 3$

에서 $f(x) = \frac{1}{12}x$ 이므로

$$\begin{aligned} & P(6k \leq Y \leq 15k) \\ &= P(2 \leq Y \leq 5) \\ &= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \{f(2) + f(3)\} \times 1 \right] \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{4} \times 2 \right) \\ &= \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) \right\} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{24} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

따라서, $p=24$, $q=7$ 이므로

$$p+q=31$$

정답 31

30. 출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_5 + b_5 \geq 7$ 인 사건을 A , $a_k = b_k$ 인 자연수 $k(1 \leq k \leq 5)$ 가 존재하는 사건을 B 라 하자.

사건 A 가 일어나는 경우는

$$a_5 + b_5 = 7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$$

$$a_5 + b_5 = 8 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1$$

$$a_5 + b_5 = 9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1$$

$$a_5 + b_5 = 10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

이고 주사위의 눈의 수가 5이상일 확률

은 $\frac{1}{3}$, 4이하일 확률은 $\frac{2}{3}$ 이므로

(i) $a_5 + b_5 = 7$ 일 확률은

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^3 = 10 \times \frac{8}{3^5}$$

(ii) $a_5 + b_5 = 8$ 일 확률은

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = 10 \times \frac{4}{3^5}$$

(iii) $a_5 + b_5 = 9$ 일 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{3} \right)^4 \left(\frac{2}{3} \right)^1 = 5 \times \frac{2}{3^5}$$

(iv) $a_5 + b_5 = 10$ 일 확률은

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{3} \right)^5 = \frac{1}{3^5}$$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$P(A) = 10 \times \frac{8}{3^5} + 10 \times \frac{4}{3^5} + 5 \times \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^5}$$

또한, 사건 $A \cap B$ 인 경우는 (i), (ii)의 경우 3번째 시행까지 5이상의 눈의 수가 1번, 4이하의 눈의 수가 2번 일어나야 하고 (iii), (iv)인 경우는 사건 $A \cap B$ 은 일어나지 않는다.

$$P(A \cap B)$$

$$= {}_3C_1 \left(\frac{1}{3} \right)^1 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$+ {}_3C_1 \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^2$$

$$= 3 \times \frac{16}{3^5} + 3 \times \frac{4}{3^5}$$

그러므로, 구하는 확률은

$$P(B|A)$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{3 \times \frac{16}{3^5} + 3 \times \frac{4}{3^5}}{10 \times \frac{8}{3^5} + 10 \times \frac{4}{3^5} + 5 \times \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^5}}$$

$$= \frac{48 + 12}{80 + 40 + 10 + 1}$$

$$= \frac{60}{131}$$

이므로

$$p = 131, q = 60$$

$$\text{따라서, } p + q = 131 + 60 = 191$$

정답 191

[선택: 미적분]

23. ⑤ 24. ④ 25. ② 26. ③ 27. ①
28. ② 29. 11 30. 143

23. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}\right) \times n}{\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}\right) \times n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}}$$

$$= \frac{5+0}{1-0} = 5$$

정답 ⑤

24. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x^3+x) = e^x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x^3+x) \times (3x^2+1) = e^x \dots \textcircled{7}$$

이다.

$$x^3+x=2 \text{에서}$$

$$x^3+x-2 = (x-1)(x^2+x+2) = 0$$

이므로 $x=1$ 이다.

따라서 $\textcircled{7}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1+1) \times (3+1) = e$$

이므로

$$f'(2) = \frac{e}{4}$$

정답 ④

25. 출제의도 : 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

이때

$$a_{2n-1} - a_{2n} = ar^{2n-2} - ar^{2n-1}$$

$$= ar^{2n-2}(1-r)$$

$$= a(1-r)(r^2)^{n-1}$$

이므로 수열 $\{a_{2n-1} - a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a(1-r)$ 이고 공비가 r^2 인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) = 3$ 에서

$$-1 < r < 1$$

이고

$$\frac{a(1-r)}{1-r^2} = 3$$

이고 $r \neq 1$ 이므로

$$\frac{a}{1+r} = 3 \dots \textcircled{7}$$

또, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 r^{2n-2} = 6$ 이므로

$$\frac{a^2}{1-r^2} = \frac{a}{1-r} \times \frac{a}{1+r} = 6$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서

$$\frac{a}{1-r} \times 3 = 6$$

이므로

$$\frac{a}{1-r} = 2$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \\ &= \frac{a}{1-r} = 2 \end{aligned}$$

정답 ②

26. 출제의도 : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2kn}{k^3 + 3k^2n + n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2 \times \frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{n} \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 1} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \ln(x^3 + 3x^2 + 1) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} (\ln 5 - \ln 1) \\ &= \frac{\ln 5}{3} \end{aligned}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 평면 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 두 점의 좌표는

$$(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$$

이므로 이 두 점의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \dots \textcircled{7}$$

이다. 두 식 $y = x^2, y = t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 를 연립하면

$$x^2 = t^2x - \frac{\ln t}{8},$$

$$x^2 - t^2x + \frac{\ln t}{8} = 0$$

이 방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = t^2,$$

$$\alpha\beta = \frac{\ln t}{8}$$

따라서

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= t^4 - \frac{\ln t}{4} \end{aligned}$$

이므로 $\textcircled{7}$ 에서 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8} \right) \text{이다.}$$

그러므로 점 P의 시각 t 에서의 위치는

$$x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8}$$

이다.

이때

$$\frac{dx}{dt} = t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t^3 - \frac{1}{8t}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + \left(2t^3 - \frac{1}{8t}\right)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + 4t^6 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4t^6 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}} \\
&= \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2} \\
&= 2t^3 + \frac{1}{8t}
\end{aligned}$$

따라서 시각 $t=1$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
&\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right) dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e \\
&= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} + 0\right) \\
&= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극소가 되는 x 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}
g(x) &= 3f(x) + 4\cos f(x) \text{이므로} \\
g'(x) &= 3f'(x) - 4f'(x)\sin f(x) \\
&= f'(x)\{3 - 4\sin f(x)\} \\
&= 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}
\end{aligned}$$

이므로 $g'(x)=0$ 에서

$$x=1 \text{ 또는 } \sin(6\pi(x-1)^2) = \frac{3}{4}$$

(i) $x=1$ 일 때

$x=1$ 일 때 $\sin(6\pi(x-1)^2) = 0$ 이므로 $x=1$ 부근에서 $3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2) > 0$ 이다.

이때 $x-1$ 은 $x=1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로

$g'(x) = 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$ 도 $x=1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변한다.

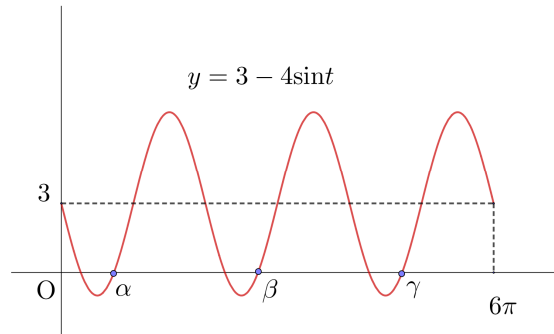
따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.

(ii) $1 < x < 2$ 일 때

$12\pi(x-1) > 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 2]$ 에서 0에서 6π 까지 증가한다.

즉, $f(x)=t$ 라 하면 x 의 값이 1에서 2까지 증가할 때 t 의 값은 0에서 6π 까지 증가한다.

이때 함수 $y=3-4\sin t$ 의 그래프는 다음과 같으므로 $t=\alpha, \beta, \gamma$ 의 좌우에서 $y=3-4\sin t$ 의 값은 음에서 양으로 변한다.



따라서 $f(x)=\alpha, \beta, \gamma$ 인 x 의 좌우에서 $y=3-4\sin f(x)$ 의 값은 음에서 양으로 변하고 이러한 x 는 세 수 α, β, γ 에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$ 가 $1 < x < 2$ 에서 극소가 되는 x 의 개수는 3이다.

(iii) $0 < x < 1$ 일 때

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(1-x) = f(1+x)$$

가 성립한다.

이때

$$\begin{aligned} g(1-x) &= 3f(1-x) + 4\cos f(1-x) \\ &= 3f(1+x) + 4\cos f(1+x) \\ &= g(1+x) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프도 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 (ii)와 같이 $0 < x < 1$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수도 3이다.

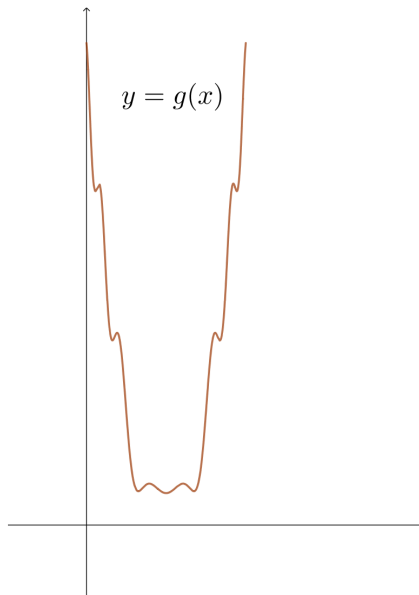
(i), (ii), (iii)에서 구하는 x 의 개수는

$$1 + 3 + 3 = 7$$

이다.

<참고>

$0 < x < 2$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



정답 ②

29. 출제의도 : 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\angle AMQ = 2 \times \angle ABQ = 2 \times 2\theta = 4\theta$$

이므로

(부채꼴 AMQ의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times 4\theta = 2\theta,$$

(삼각형 MBQ의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(\pi - 4\theta) = \frac{1}{2} \sin 4\theta$$

삼각형 RAB에서 $\angle ARB = \pi - 3\theta$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{BR}}{\sin\theta},$$

즉

$$\overline{BR} = \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

(삼각형 RAB의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BR} \times \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \sin 2\theta = \frac{2\sin\theta \sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

그러므로

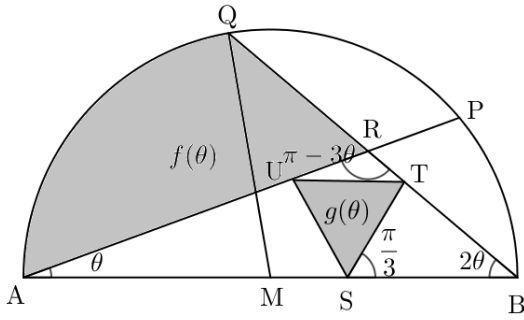
$$f(\theta) = 2\theta + \frac{1}{2} \sin 4\theta - \frac{2\sin\theta \sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(2 + 2 \times \frac{\sin 4\theta}{4\theta} - \frac{4 \times \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}{3 \times \frac{\sin 3\theta}{3\theta}} \right)$$

$$= 2 + 2 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \dots \textcircled{7}$$



정삼각형 STU의 한 변의 길이를 a 라 하면 삼각형 TSB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{BT}}{\sin \frac{\pi}{3}},$$

즉

$$\overline{BT} = \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta}$$

두 삼각형 RUT, RAB가 서로 닮음이므로

$$\overline{RT} : \overline{RB} = \overline{UT} : \overline{AB}$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta} : \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} = a : 2$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta} a$$

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta} \right) a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\frac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\sin 2\theta\sin 3\theta} a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}$$

이때

$$g(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

이고

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{a}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta} \times \frac{1}{\theta} \right)$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{\theta^2}}{\frac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\theta}} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{2 \times 3}{0 + 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{a}{\theta} \right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{8}{3\sqrt{3}} \right)^2$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{27} \dots \ominus$$

따라서 \ominus , $\omin�$ 에서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$= \frac{\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$= \frac{\frac{16\sqrt{3}}{27}}{\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{2}{9} \sqrt{3}$$

이므로

$$p+q=9+2=11$$

정답 11

30. 출제의도 : 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 $f(1)=1$ 이므로 조건 (나)

에 의하여

$$g(2) = 2f(1) = 2$$

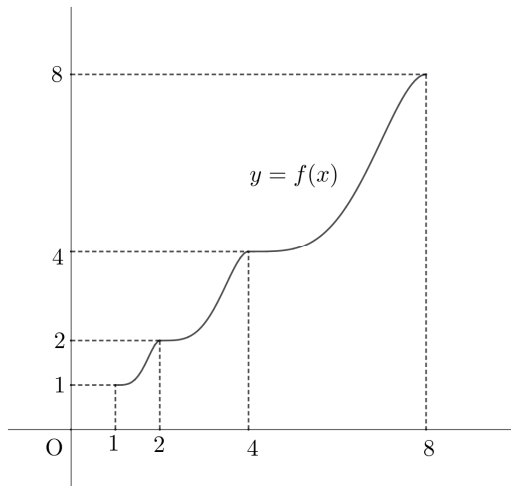
따라서 $f(2) = 2$ 이므로

$$g(4) = 2f(2) = 4$$

따라서 $f(4) = 4$ 이므로

$$g(8) = 2f(4) = 8$$

따라서 $f(8) = 8$ 이다.



부분적분법에 의하여

$$\int_1^8 x f'(x) dx$$

$$= [x f(x)]_1^8 - \int_1^8 f(x) dx$$

$$= 8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x) dx$$

$$= 8 \times 8 - 1 - \int_1^8 f(x) dx$$

$$= 63 - \int_1^8 f(x) dx \quad \dots \textcircled{7}$$

이때

$$\int_1^8 f(x) dx$$

$$= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx$$

$\dots \textcircled{8}$

이고,

$$\int_1^2 f(x) dx = \frac{5}{4} \quad \dots \textcircled{9}$$

이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_2^4 f(x) dx = 4 \times 4 - 2 \times 2 - \int_2^4 g(y) dy$$

$$= 12 - \int_2^4 g(y) dy \quad \dots \textcircled{10}$$

이때 $y=2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_2^4 g(y) dy = 2 \int_1^2 g(2t) dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_2^4 g(y) dy = 2 \int_1^2 g(2t) dt$$

$$= 2 \int_1^2 2f(t) dt$$

$$= 4 \int_1^2 f(x) dx$$

$$= 4 \times \frac{5}{4} = 5$$

$\textcircled{10}$ 에서

$$\int_2^4 f(x) dx = 12 - \int_2^4 g(y) dy$$

$$= 12 - 5 = 7 \quad \dots \textcircled{11}$$

또, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_4^8 f(x) dx = 8 \times 8 - 4 \times 4 - \int_4^8 g(y) dy$$

$$= 48 - \int_4^8 g(y)dy \dots \textcircled{\ominus}$$

이때 $y=2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하
여

$$\int_4^8 g(y)dy = 2 \int_2^4 g(2t)dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_4^8 g(y)dy = 2 \int_2^4 g(2t)dt$$

$$= 2 \int_2^4 2f(t)dt$$

$$= 4 \int_2^4 f(x)dx$$

$$= 4 \times 7 = 28$$

Ⓜ에서

$$\int_4^8 f(x)dx = 48 - \int_4^8 g(y)dy$$

$$= 48 - 28 = 20 \dots \textcircled{\otimes}$$

ⓐ, Ⓜ, Ⓜ, ⓐ에서

$$\int_1^8 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx$$

$$= \frac{5}{4} + 7 + 20 = \frac{113}{4}$$

이므로 ㉠에서

$$\int_1^8 xf'(x)dx$$

$$= 63 - \int_1^8 f(x)dx$$

$$= 63 - \frac{113}{4} = \frac{139}{4}$$

따라서

$$p+q = 4 + 139 = 143$$

정답 143

[다른 풀이]

$\int_1^8 xf'(x)dx$ 에서 $x=g(y)$ 라 하면

$x=1$ 일 때 $y=1$, $x=8$ 일 때 $y=8$ 이고,

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

이므로

$$\int_1^8 xf'(x)dx = \int_1^8 g(y)dy$$

$$= \int_1^2 g(y)dy + \int_2^4 g(y)dy + \int_4^8 g(y)dy$$

이때

$$\int_1^2 g(y)dy = 2 \times 2 - 1 \times 1 - \int_1^2 f(x)dx$$

$$= 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$

한편, $\int_2^4 g(y)dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$ 에서

$\frac{y}{2}=t$ 라 하면 $y=2$ 일 때 $t=1$, $y=4$ 일

때 $t=2$ 이고, $\frac{1}{2} = \frac{dt}{dy}$ 이므로

$$\int_2^4 g(y)dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$

$$= \int_1^2 4f(t)dt = 4 \int_1^2 f(t)dt$$

$$= 4 \times \frac{5}{4} = 5,$$

또, $\int_4^8 g(y)dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$ 에서

$\frac{y}{2}=t$ 라 하면 $y=4$ 일 때 $t=2$, $y=8$ 일

때 $t=4$ 이고, $\frac{1}{2} = \frac{dt}{dy}$ 이므로

$$\int_4^8 g(y)dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_2^4 4f(t)dt = 4 \int_2^4 f(t)dt \\
 &= 4 \times \left\{ 4 \times 4 - 2 \times 2 - \int_2^4 g(y)dy \right\} \\
 &= 4(12 - 5) = 28
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \int_1^8 xf'(x)dx &= \int_1^8 g(y)dy \\
 &= \int_1^2 g(y)dy + \int_2^4 g(y)dy + \int_4^8 g(y)dy \\
 &= \frac{7}{4} + 5 + 28 = \frac{139}{4}
 \end{aligned}$$

이므로

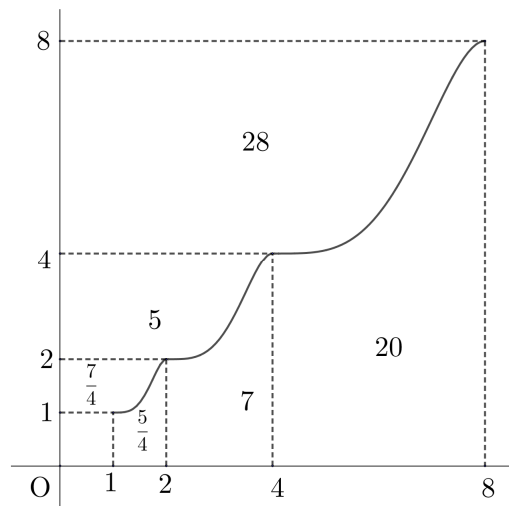
$$p + q = 4 + 139 = 143$$

<참고>

조건 (나)의 성질

$$g(2x) = 2f(x)$$

에서 다음 그림과 같이 각 부분의 넓이가 대각선 방향으로 4배씩 증가함을 알 수 있다.



[선택: 기하]

23. ② 24. ③ 25. ⑤ 26. ② 27. ④
28. ⑤ 29. 100 30. 23

23. 출제의도 : 좌표공간의 점의 대칭이동을 이해하고 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간의 점 $A(2, 1, 3)$ 을 xy 평면에 대하여 대칭이동시킨 점 P 의 좌표는 $P(2, 1, -3)$

점 A 를 yz 평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q 의 좌표는

$Q(-2, 1, 3)$

따라서 구하는 선분 PQ 의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2 + (-3-3)^2} \\ &= \sqrt{52} \\ &= 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

정답 ②

24. 출제의도 : 초점의 좌표가 주어진 쌍곡선의 방정식을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 의 한 초점의 좌표가

$(3\sqrt{2}, 0)$ 이므로

$$a^2 + 6 = 18$$

$$a^2 = 12$$

$a > 0$ 이므로

$$a = 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$$2a = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

정답 ③

25. 출제의도 : 좌표평면의 두 직선의 방향벡터를 이해하고 이를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 직선

$$\frac{x+1}{2} = y-3, \quad x-2 = \frac{y-5}{3}$$

의 방향벡터를 각각

$$\vec{u}_1 = (2, 1), \quad \vec{u}_2 = (1, 3)$$

이라 하면

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 1 + 1 \times 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + 3^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 타원의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

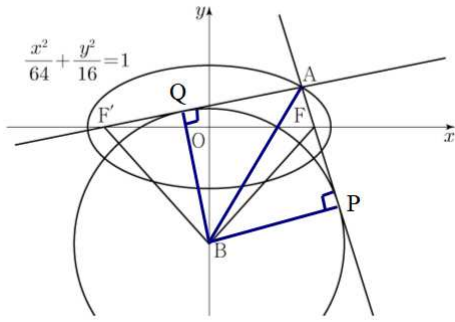
정답풀이 :

$\overline{AF} = p$, $\overline{AF'} = q$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$p + q = 2 \times 8 = 16$$

원 C 가 두 직선 AF , AF' 과 접하는 두 점을 각각 P , Q , 원 C 의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{BP} = \overline{BQ} = r$$



사각형 AFBF'의 넓이를 삼각형 ABF와 삼각형 ABF'으로 나누어 생각하면

$$\frac{1}{2} \times p \times r + \frac{1}{2} \times q \times r = 72$$

따라서

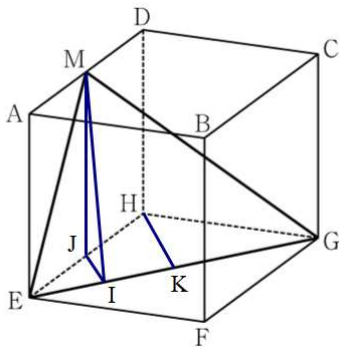
$$\begin{aligned} r &= 72 \times \frac{2}{p+q} \\ &= 72 \times \frac{2}{16} \\ &= 9 \end{aligned}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 점 M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I, 선분 EH에 내린 수선의 발을 J라 하자.



삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{MI} \perp \overline{EG}$$

이므로 점 H에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 K라 하면 점 K는 선분 EG의 중점이고

$$\begin{aligned} \overline{IJ} &= \frac{1}{2} \times \overline{HK} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

한편, 직각삼각형 MJH에서

$$\overline{MJ} = 4$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{MI} &= \sqrt{\overline{MJ}^2 + \overline{IJ}^2} \\ &= \sqrt{16 + 2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 삼각형 MEG의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{MI} &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

정답 ④

28. 출제의도 : 포물선의 정의와 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

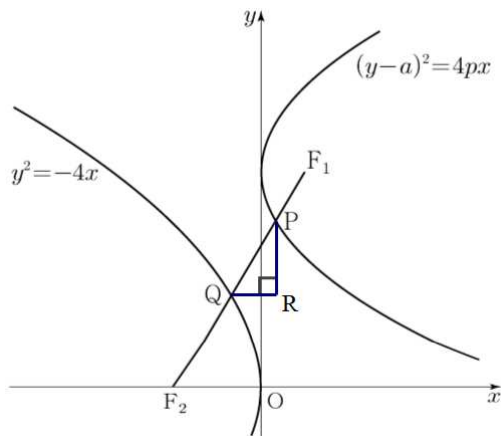
두 점 F_1, F_2 의 좌표가 각각

$$F_1(p, a), F_2(-1, 0)$$

이고, $\overline{F_1F_2} = 3$ 이므로

$$(p+1)^2 + a^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그림과 같이 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 R라 하자.



직선 PQ의 기울기는 직선 F_1F_2 의 기울기와 같은 $\frac{a}{p+1}$ 이므로 직각삼각형 PQR

에서 양수 t 에 대하여 $\overline{PR} = at$, $\overline{QR} = (p+1)t$ 로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{PQ} = 1$ 이므로

$$a^2t^2 + (p+1)^2t^2 = 1$$

에서

$$t^2 = \frac{1}{a^2 + (p+1)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{즉, } t = \frac{1}{3}$$

한편, 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 x_1 ,

x_2 라 하면

$$\overline{PF_1} = p + x_1,$$

$$\overline{QF_2} = 1 - x_2,$$

$$\overline{PF_1} + \overline{QF_2} = 2$$

이고

$$x_1 - x_2 = (p+1)t = \frac{1}{3}(p+1)$$

이므로

$$(p+x_1) + (1-x_2) = 2$$

에서

$$p = 1 - (x_1 - x_2)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(p+1)$$

$$\text{즉, } p = \frac{1}{2}$$

⊙에서

$$\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 + a^2 = 9$$

이므로

$$a^2 = \frac{27}{4}$$

따라서

$$a^2 + p^2 = \frac{27}{4} + \frac{1}{4} = 7$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

조건 (나)에서

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos(\angle AOB)$$

$$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - 1 = 2$$

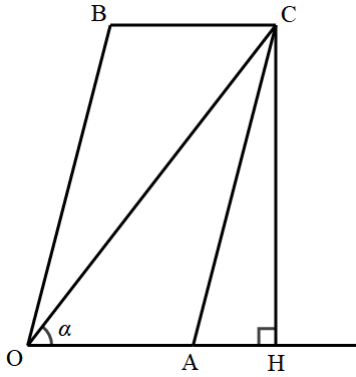
이므로

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

(i) 벡터 $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$ 의 크기는 \overrightarrow{OP} 의 크기가 최대이고 \overrightarrow{OX} 가 \overrightarrow{OP} 와 반대 방향일 때 최대가 되고, \overrightarrow{OP} 의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최

대가 된다.

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle COA = \alpha$ 라 하자.



$\angle CAH = \angle AOB$ 에서

$$\cos(\angle CAH) = \cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$$

이므로

$$\overline{AH} = \overline{AC} \times \cos(\angle CAH)$$

$$= \overline{OB} \times \frac{1}{4}$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편,

$$|\overline{OC}|^2 = |\overline{OA} + \overline{OB}|^2$$

$$= |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$= (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= 2 + 8 + 2 = 12$$

이므로

$$|\overline{OC}| = 2\sqrt{3}$$

그러므로

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OC} &= |\overline{OP}| |\overline{OC}| \cos\alpha \\ &= |\overline{OP}| \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} |\overline{OP}| = 3 \end{aligned}$$

이므로

$$|\overline{OP}| = \sqrt{2}$$

이때 \overline{OX} 가 \overline{OP} 와 반대 방향이면

$$|3\overline{OP} - \overline{OX}| = 3|\overline{OP}| + |\overline{OX}|$$

이므로

$$M = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

- (ii) 벡터 $3\overline{OP} - \overline{OX}$ 의 크기는 \overline{OP} 의 크기가 최소이고 \overline{OX} 가 \overline{OP} 와 같은 방향일 때 최소가 되고, \overline{OP} 의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OC} &= |\overline{OP}| |\overline{OC}| \\ &= |\overline{OP}| \times 2\sqrt{3} = 3 \end{aligned}$$

이므로

$$|\overline{OP}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 \overline{OX} 가 \overline{OP} 와 같은 방향이면

$$|3\overline{OP} - \overline{OX}| = 3|\overline{OP}| - |\overline{OX}|$$

이므로

$$m = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}$$

- (i), (ii)에 의하여

$$M \times m = 4\sqrt{2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \right)$$

$$= 6\sqrt{6} - 8$$

이므로

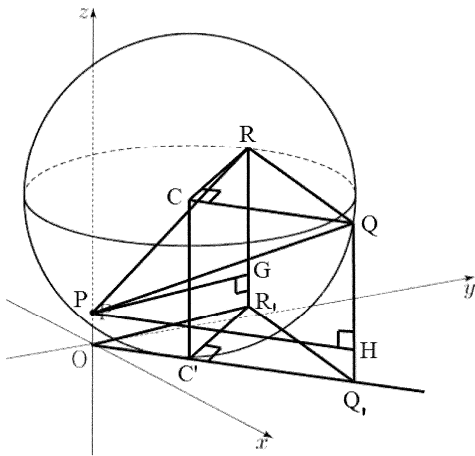
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 6^2 + (-8)^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

정답 100

30. 출제의도 : 좌표공간의 구의 방정식 및 도형의 위치관계를 이해하고 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 C' 이라 하면 $\overline{CC'}=5$ 이므로 구 S 는 점 C' 에서 xy 평면에 접한다.



평면 OPC는 점 C' 을 지나므로 점 Q_1 은 직선 OC' 위에 있다. 이때 선분 OQ_1 의 길이가 최대가 되려면 점 Q 가 점 C 를 지나고 직선 OC' 과 평행한 직선이 구 S 와 만나는 점 중 x 좌표가 양수인 점이어야 한다.

이때

$$\overline{OQ_1} = \overline{OC'} + 5 = 3 + 5 = 8$$

한편, 삼각형 OQ_1R_1 의 넓이가 최대가 되려면 점 R 가 점 C 를 지나고 직선 CQ 에 수직인 직선이 구 S 와 만나는 점이어야 한다.

이때 $\overline{R_1C'} \perp \overline{OC'}$ 이고, $\overline{R_1C'}=5$ 이므로 삼각형 OQ_1R_1 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20$$

이제 삼각형 PQR 의 넓이를 구해 보자.

점 P 에서 직선 QQ_1 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH} = \overline{OQ_1} = 8,$$

$$\overline{QH} = \overline{QQ_1} - 1 = 4$$

이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직각삼각형 CQR 에서

$$\overline{QR} = \sqrt{\overline{CQ}^2 + \overline{CR}^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

$\dots\dots \textcircled{8}$

직각삼각형 $OC'R_1$ 에서

$$\overline{OR_1} = \sqrt{\overline{OC'}^2 + \overline{R_1C'}^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

이므로 점 P 에서 직선 RR_1 에 내린 수선의 발을 G 라 하면

$$\overline{PG} = \overline{OR_1} = \sqrt{34}$$

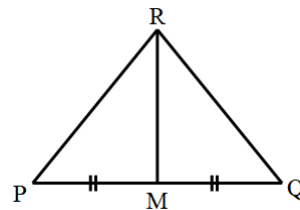
$$\overline{RG} = \overline{RR_1} - 1 = 4$$

직각삼각형 RPG 에서

$$\overline{PR} = \sqrt{\overline{PG}^2 + \overline{RG}^2} = \sqrt{34 + 16} = 5\sqrt{2}$$

$\dots\dots \textcircled{9}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$, $\textcircled{9}$ 에 의하여 삼각형 PQR 는 $\overline{PR} = \overline{QR}$ 인 이등변삼각형이다.



위 그림과 같이 선분 PQ 의 중점을 M 이라 하면

$$\overline{RM} = \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{PM}^2}$$

$$= \sqrt{50 - 20}$$

$$= \sqrt{30}$$

이므로 삼각형 PQR 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times \sqrt{30} = 10\sqrt{6}$$

이때 삼각형 PQR 의 xy 평면 위로의 정사

영이 삼각형 OQ_1R_1 이므로 두 평면 PQR
와 OQ_1R_1 이 이루는 예각의 크기를 θ 라
하면

$$\cos\theta = \frac{20}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 삼각형 OQ_1R_1 의 평면 PQR 위로
의 정사영의 넓이는

$$20 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{20}{3}\sqrt{6}$$

이므로

$$p+q = 3 + 20 = 23$$

정답 23