

수학영역 나형 정답 및 풀이

| | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| 01. ⑤ | 02. ④ | 03. ⑤ | 04. ① | 05. ③ |
| 06. ④ | 07. ② | 08. ④ | 09. ③ | 10. ① |
| 11. ② | 12. ① | 13. ② | 14. ③ | 15. ④ |
| 16. ② | 17. ① | 18. ② | 19. ③ | 20. ③ |
| 21. ⑤ | 22. 6 | 23. 9 | 24. 10 | 25. 64 |
| 26. 3 | 27. 74 | 28. 58 | 29. 15 | 30. 38 |

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8} \times 4^{\frac{3}{2}} &= (2^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= 2^1 \times 2^3 \\ &= 2^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 7 \text{이므로} \\ f'(0) &= 7 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 등차중항을 이용하여 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 a_2 는 a_1 과 a_3 의 등차중항이므로

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

정답 ⑤

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_3 = 20$$

에서

$$a_1 + (a_1 + 2d) = 20$$

$$a_1 + d = 10$$

따라서

$$a_2 = a_1 + d = 10$$

4. 출제의도 : 함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 3x \\ &= 6 \end{aligned}$$

정답 ①

5. 출제의도 : 사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2 \times 15$$

따라서

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= 2 \times 15 \times \sin B \\ &= 2 \times 15 \times \frac{7}{10} = 21 \end{aligned}$$

정답 ③

6. 출제의도 : 확률의 기본 성질을 이용하여 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

에서

$$1 = P(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

따라서

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$P(A \cup B) = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P(B - A) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

7. 출제의도 : 함수의 그래프로부터 좌극한값과 우극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \rightarrow 1+$ 일 때, $f(x) \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1$$

또, $x \rightarrow 3-$ 일 때, $f(x) \rightarrow 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 2$$

따라서,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 1 - 2 = -1$$

정답 ②

8. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(1+2x)^4$ 의 일반항은

$${}_4C_r (2x)^r = {}_4C_r 2^r x^r \text{ (단, } r=0, 1, 2, 3, 4)$$

이때 x^2 의 계수는 $r=2$ 일 때이다.

따라서 구하는 x^2 의 계수는

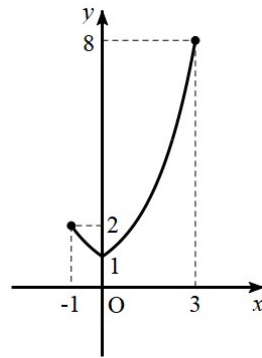
$${}_4C_2 \times 2^2 = 6 \times 4 = 24$$

정답 ④

9. 출제의도 : 절댓값이 포함된 지수함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 8을 갖고, $x=0$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $8+1=9$

정답 ③

10. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수가 극대일 조건을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1 \text{이므로}$$

$$f'(x) = -x^2 + 4x + m$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극대이므로 $f'(3)=0$ 이다.

따라서

$$f'(3) = -9 + 12 + m = m + 3 = 0$$

이므로

$$m = -3$$

정답 ①

11. 출제의도 : 직선의 기울기를 이용하여 로그 계산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_4 2 = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

원점과 점 $(2, \frac{1}{2})$ 을 지나는 직선의 기울

기는 $\frac{1}{4}$ 이다.

이때 원점과 점 $(4, \log_2 a)$ 를 지나는 직선

의 기울기도 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$\frac{\log_2 a}{4} = \frac{1}{4} \text{ 에서 } \log_2 a = 1$$

따라서 $a = 2$

정답 ②

12. 출제의도 : 원순열의 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

1학년 학생 2명을 한 묶음으로, 2학년 학생 2명을 한 묶음으로 생각하고 3학년 학생 3명과 함께 원형으로 배열하는 경우의 수는 회전하여 일치하는 것을 고려하면

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이때 1학년 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!, 2학년 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2! \times 2! = 96$$

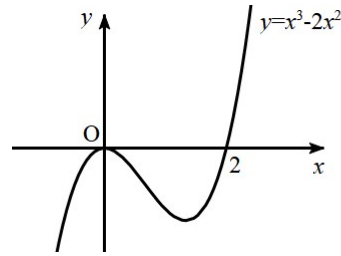
정답 ①

13. 출제의도 : 적분을 이용하여 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = x^3 - 2x^2 \\ = x^2(x - 2)$$

곡선 $y = x^3 - 2x^2$ 은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^2 |x^3 - 2x^2| dx$$

$$= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

정답 ②

14. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_1 = 1 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = a_1 + 1 = 2$$

$$a_4 = 2 \text{ 이므로}$$

$$a_{11} = 2a_4 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_{12} = -a_4 + 2 = -2 + 2 = 0$$

$$a_{13} = a_4 + 1 = 2 + 1 = 3$$

따라서

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5 + 0 + 3 = 8$$

정답 ③

15. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 속도가 주어져 있을 때 위치를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$v(t) = -4t + 5$$

이므로

점 P의 시각 t에서의 위치를 x(t)라 하면

$$x(t) = -2t^2 + 5t + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$\text{이때 } x(3) = 11 \text{이므로}$$

$$-2 \times 9 + 5 \times 3 + C = 11$$

에서

$$C = 14$$

따라서

$$x(0) = C = 14$$

정답 ④

16. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|a-3| + |b-3| = 2$ 인 사건을 A, $a=b$ 인 사건을 B라 하자.

(i) P(A)

$|a-3| = 0$ 이고 $|b-3| = 2$ 일 때, 순서쌍 (a, b)는

(3, 1), (3, 5)

$|a-3| = 1$ 이고 $|b-3| = 1$ 일 때, 순서쌍 (a, b)는

(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)

$|a-3| = 2$ 이고 $|b-3| = 0$ 일 때, 순서쌍 (a, b)는

(1, 3), (5, 3)

그러므로

$$P(A) = \frac{2+4+2}{6 \times 6} = \frac{8}{36}$$

(ii) P(B)

$a=b$ 일 확률이므로

$$P(B) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{6}{36}$$

(iii) P(A ∩ B)

(i), (ii)에서 두 사건 A와 B를 동시에 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

(2, 2), (4, 4)

그러므로

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6 \times 6} = \frac{2}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{8}{36} + \frac{6}{36} - \frac{2}{36} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

정답 ②

17. 출제의도 : 정적분을 이용하여 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1 f(t) dt = k \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = 4x^3 + kx$$

이때

$$k = \int_0^1 (4t^3 + kt) dt$$

$$= \left[t^4 + \frac{k}{2} t^2 \right]_0^1$$

$$= 1 + \frac{k}{2}$$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 2x$ 이므로

$$f(1) = 4 + 2 = 6$$

정답 ①

18. 출제의도 : 등차수열의 일반항과 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_k = -16, S_{k+2} = -12$$

에서

$$S_{k+2} - S_k = a_{k+1} + a_{k+2} = 4$$

이고, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$$a_1 + 2k + a_1 + 2(k+1) = 4$$

$$a_1 + 2k + 1 = 2$$

$$a_1 = 1 - 2k \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

이때 $S_k = -16$ 에서

$$\frac{k\{2a_1 + 2(k-1)\}}{2} = -16$$

$$k(a_1 + k - 1) = -16$$

여기에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$-k^2 = -16$$

k 는 자연수이므로

$$k = 4$$

이고,

$$a_1 = 1 - 2k = -7$$

따라서

$$a_{2k} = a_8$$

$$= -7 + 7 \times 2$$

$$= 7$$

정답 ②

19. 출제의도 : 미분을 이용하여 주어진 방정식이 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 + a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 12x$$

$$= 6x(x+2)$$

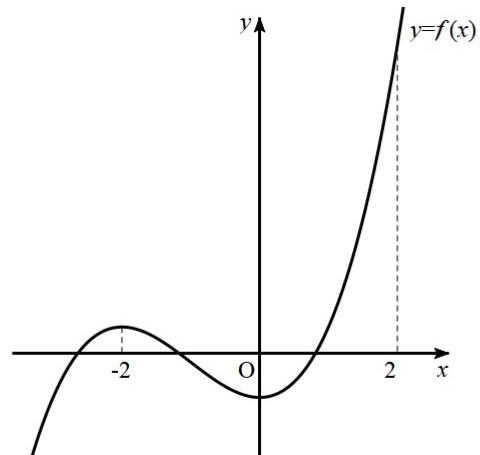
이때 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

이고, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---------|-----|-------|-----|-----|-----|
| x | ... | -2 | ... | 0 | ... |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $8+a$ | ↘ | a | ↗ |

그러므로 방정식 $f(x) = 0$ 이 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $f(2) = 40 + a$ 이므로 $f(2) > f(-2)$ 이다.

그러므로 조건을 만족시키기 위해서는 $f(-2) \geq 0$ 이고 $f(0) < 0$ 이어야 한다.

$$f(-2) \geq 0 \text{에서}$$

$$8 + a \geq 0, a \geq -8 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

또, $f(0) < 0$ 에서

$$a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

따라서 $\textcircled{7}$, \textcircled{L} 에서

$$-8 \leq a < 0$$

이므로 구하는 정수 a 의 개수는 8이다.

정답 ③

20. 출제의도 : 조합의 수를 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있는 사건을 A , 꺼낸 공 중 검은 공이 2개인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은

$$P(B|A)$$

이고, 이 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$${}_8C_4$$

이다.

이때 사건 A 가 일어나는 경우는 수가 같은 것이 3만 있는 경우, 수가 같은 것이 4만 있는 경우, 3, 4가 적힌 흰 공과 3, 4가 적힌 검은 공을 동시에 꺼내는 경우로 나누어 생각할 수 있으므로

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{{}_6C_2 - 1}{{}_8C_4} + \frac{{}_6C_2 - 1}{{}_8C_4} + \frac{1}{{}_8C_4} \\ &= \frac{14}{70} + \frac{14}{70} + \frac{1}{70} = \frac{29}{70} \end{aligned}$$

한편, 사건 A 와 사건 B 가 동시에 일어나는 경우는 수가 같은 것이 3만 있고 검은 공이 2개인 경우, 수가 같은 것이 4만 있고 검은 공이 2개인 경우, 3, 4가 적힌 흰 공과 3, 4가 적힌 검은 공을 동시에 꺼내는 경우로 나누어 생각할 수 있으므로

$$P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1 - 1}{{}_8C_4} + \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1 - 1}{{}_8C_4} + \frac{1}{{}_8C_4} \\ &= \frac{8}{70} + \frac{8}{70} + \frac{1}{70} = \frac{17}{70} \end{aligned}$$

따라서

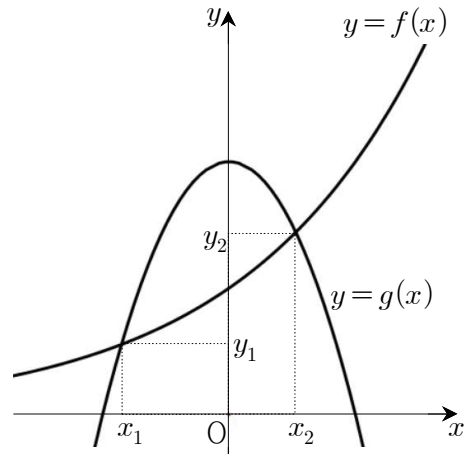
$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{17}{70}}{\frac{29}{70}} = \frac{17}{29} \end{aligned}$$

정답 ③

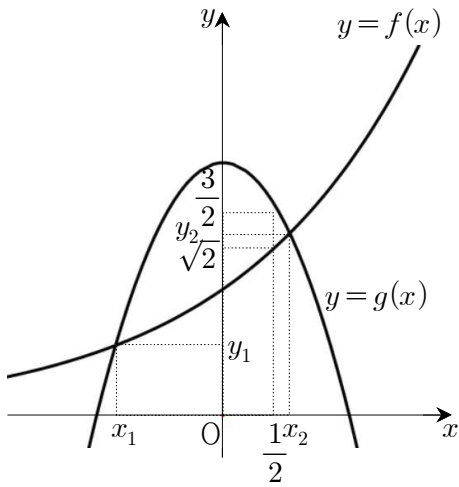
21. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 이차함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 2^x$, $g(x) = -2x^2 + 2$ 로 놓으면 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{2}, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{ 이므로} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &< g\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$



$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \text{ 이므로 } y_2 > \sqrt{2}$$

$$\text{즉, } y_1 y_2 > \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

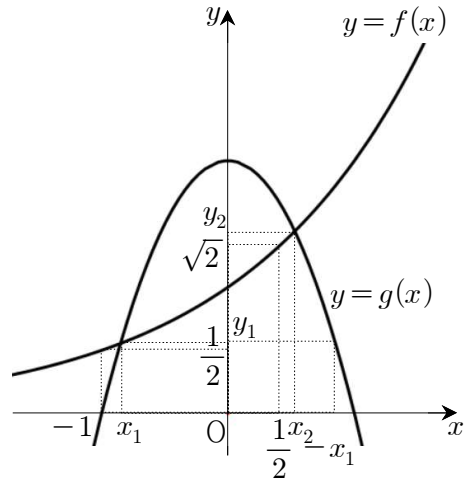
또, 그림과 같이 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 $-x_1 > x_2$ 이다.

즉, $x_2 > \frac{1}{2}$ 이다. (참)

ㄴ. 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

이고, 두 점 $(0, 1), (1, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기는 1



$$\text{즉 } x_1 + x_2 < 0$$

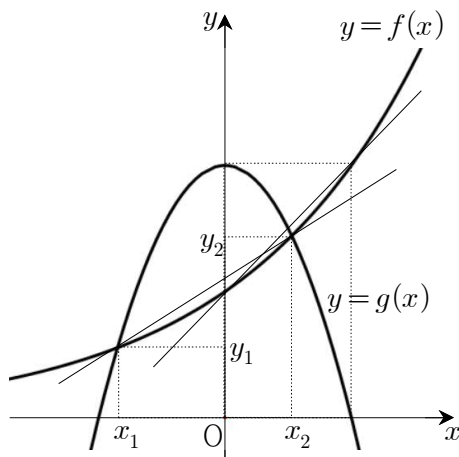
이때, $y_1 = 2^{x_1}, y_2 = 2^{x_2}$ 이므로

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= 2^{x_1} \times 2^{x_2} \\ &= 2^{x_1 + x_2} < 2^0 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤



두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 기울기가 1 보다 작으므로

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1 \text{에서}$$

$$y_2 - y_1 < x_2 - x_1 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. } f(-1) = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } y_1 > \frac{1}{2}$$

22. 출제의도 : 삼각함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 실수 x 에 대하여

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

이므로 함수 $f(x) = 5 \sin x + 1$ 의 최댓값은

$$5 \times 1 + 1 = 6$$

정답 6

23. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 합
숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int f'(x) dx \\
&= \int (x^3 + x) dx \\
&= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C
\end{aligned}$$

(단, C 는 적분상수)

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 3$ 이므로

$$f(2) = 4 + 2 + 3 = 9$$

정답 9

24. 출제의도 : 미분계수를 이용하여 접
선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y' = 3x^2 - 12x$$

이므로 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$3 \times 1^2 - 12 \times 1 = -9$$

따라서 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = -9(x - 1)$$

$$y = -9x + 10$$

이 접선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a = -9 \times 0 + 10 = 10$$

정답 10

25. 출제의도 : 등비수열의 일반항과 합
을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수
있는가?

정답풀이 :

$a_1 = 1$ 이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r
라 하면

$$a_n = 1 \times r^{n-1} = r^{n-1}$$

이때

$$\begin{aligned}
\frac{S_6}{S_3} &= \frac{\frac{r^6 - 1}{r - 1}}{\frac{r^3 - 1}{r - 1}} \\
&= \frac{r^6 - 1}{r^3 - 1} \\
&= \frac{(r^3 + 1)(r^3 - 1)}{r^3 - 1} \\
&= r^3 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}
\end{aligned}$$

또,

$$2a_4 - 7 = 2r^3 - 7 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} 과 \textcircled{B} 이 같아야 하므로

$$r^3 + 1 = 2r^3 - 7$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

따라서

$$a_7 = 2^6 = 64$$

정답 64

26. 출제의도 : 평균변화율과 미분계수를
이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는
가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0에서 a 까지
변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}
\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} &= \frac{a^3 - 3a^2 + 5a}{a} \\
&= a^2 - 3a + 5
\end{aligned}$$

또, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ 이므로

$$f'(2) = 12 - 12 + 5 = 5$$

따라서 $a^2 - 3a + 5 = 5$ 에서

$$a(a-3) = 0$$

$$a = 0 \text{ 또는 } a = 3$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 3$$

정답 3

27. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6$$

$$= {}_9C_6$$

$$= {}_9C_3$$

$$= 84$$

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍의 개수는 방정식 $a+b+c+d=6$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수와 같다. 이 개수는

$$a = a' + 1, b = b' + 1, c = c' + 1, d = d' + 1$$

이라 하면

$a' + b' + c' + d' = 2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d' 의 모든 순서쌍 (a', b', c', d') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2$$

$$= {}_5C_2$$

$$= 10$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$84 - 10 = 74$$

정답 74

28. 출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$n = 1 \text{ 일 때 } \frac{1}{a_1} = 9$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \frac{4n-3}{a_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4k-3}{a_k} \\ &= 2n^2 + 7n - \{2(n-1)^2 + 7(n-1)\} \\ &= 4n + 5 \end{aligned}$$

이것은 $n = 1$ 일 때도 성립하므로

$$\frac{4n-3}{a_n} = 4n + 5 \quad (n \geq 1)$$

$$\text{즉, } a_n = \frac{4n-3}{4n+5} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} a_5 \times a_7 \times a_9 &= \frac{17}{25} \times \frac{25}{33} \times \frac{33}{41} \\ &= \frac{17}{41} \end{aligned}$$

따라서 $p + q = 41 + 17 = 58$

정답 58

29. 출제의도 : 중복순열과 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수 및 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

집합 A 에서 A 로의 모든 함수의 개수는

$${}_4H_4 = 4^4 = 256$$

조건을 만족시키는 함수의 개수는 조건 (가)에 의하여 다음 네 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f(1) = f(2) = 3$ 인 경우

조건 (나)를 만족시키기 위하여 정의역의 원소 3, 4의 함숫값은 1, 2, 4 중에서 서로 다른 2개를 택하여 순서대로 짝지으면 된다. 그러므로 이 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

(ii) $f(1)=f(2)=4$ 인 경우

(i)과 마찬가지로 생각하면 이 경우의 수는

$$6$$

(iii) $f(1)=3, f(2)=4$ 인 경우

조건 (나)를 만족시키기 위하여 치역의 원소의 개수가 3이 되어야 하므로 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

㉠ $f(3)$ 의 값이 3 또는 4인 경우 $f(4)$ 의 값은 1 또는 2가 되어야 하므로 이 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

㉡ $f(4)$ 의 값이 3 또는 4인 경우 $f(3)$ 의 값은 1 또는 2가 되어야 하므로 이 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

㉢ $f(3), f(4)$ 의 값이 모두 1이거나 모두 2인 경우의 수는

$$2$$

그러므로 이 경우의 수는

$$4 + 4 + 2 = 10$$

(iv) $f(1)=4, f(2)=3$ 인 경우

(iii)과 마찬가지로 생각하면 이 경우의 수는

$$10$$

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$$6 + 6 + 10 + 10 = 32$$

따라서

$$p = \frac{32}{256} = \frac{1}{8}$$

이므로

$$120p = 120 \times \frac{1}{8} = 15$$

정답 15

30. 출제의도 : 미분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이차함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극대이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=-1$ 에서 대칭이다. 그러므로

$$f(-2) = f(0) = h(0)$$

이때 $h(0)=k$ 라 하면 $f(x)$ 는

$$f(x) = ax(x+2) + k$$

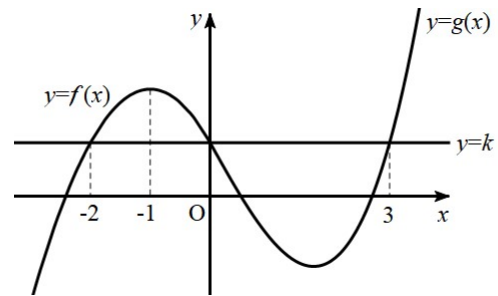
$$= ax^2 + 2ax + k \quad (a < 0)$$

로 놓을 수 있다.

한편, $g(x)$ 가 삼차함수이므로 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=0$ 에서의 곡선 $y=g(x)$ 에 접하는 접선의 기울기는 음수이어야 한다.

또, 방정식 $h(x)=h(0)$ 의 모든 실근이 합이 1이어야 하므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$$g(x) = px(x-3)(x-q) + k$$

$$= p\{x^3 - (q+3)x^2 + 3qx\} + k$$

한편, $g(x)$ 의 이차항의 계수가 0이므로

$$q = -3$$

이고

$$g(x) = p(x^3 - 9x) + k$$

이때, $g'(x) = p(3x^2 - 9)$ 이므로 $g'(x) = 0$ 에서

$$x = \sqrt{3} \text{ 또는 } x = -\sqrt{3}$$

그러므로 함수 $h(x)$ 는 $x = \sqrt{3}$ 에서 극소이다.

한편, $x=0$ 에서의 곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 기울기와 $x=0$ 에서의 곡선 $y=g(x)$ 의 접선의 기울기가 같아야 하고

$$f'(x) = 2ax + 2a, \quad g'(x) = p(3x^2 - 9) \text{ 이므로}$$

로
 $2a = -9p$ ㉠
 또, 구간 $[-2, 3]$ 에서 $h(x)$ 의 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $g(\sqrt{3})$ 이므로 ㉠을 이용하면

$$\begin{aligned} f(-1) - g(\sqrt{3}) &= (-a+k) - (-6\sqrt{3}p+k) \\ &= -a + 6\sqrt{3}p \\ &= \frac{9}{2}p + 6\sqrt{3}p \\ &= \frac{9+12\sqrt{3}}{2}p \\ &= 3+4\sqrt{3} \end{aligned}$$

그러므로

$$p = \frac{2}{3}$$

이고

$$a = -\frac{9}{2}p = -3$$

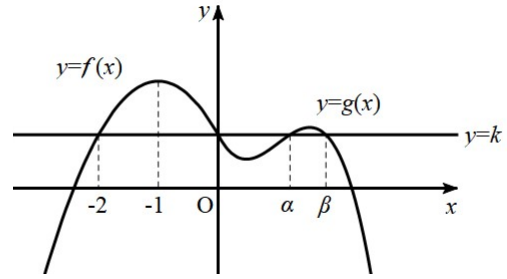
따라서

$$f'(x) = -6x - 6, \quad g'(x) = 2x^2 - 6$$

이므로

$$\begin{aligned} h'(-3) + h'(4) &= f'(-3) + g'(4) \\ &= 12 + 26 = 38 \end{aligned}$$

(ii) $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수인 경우



$$g(x) = px(x-\alpha)(x-\beta) + k \quad (\alpha + \beta = 3)$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} g(x) &= p\{x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x\} + k \\ &= p\{x^3 - 3x^2 + \alpha\beta x\} + k \end{aligned}$$

이므로 이차항의 계수가 0이 아니다.
 그러므로 이러한 경우는 없다.

따라서 (i)에서 구하는 값은 38이다.

정답 38