계 열 문 항

<가>

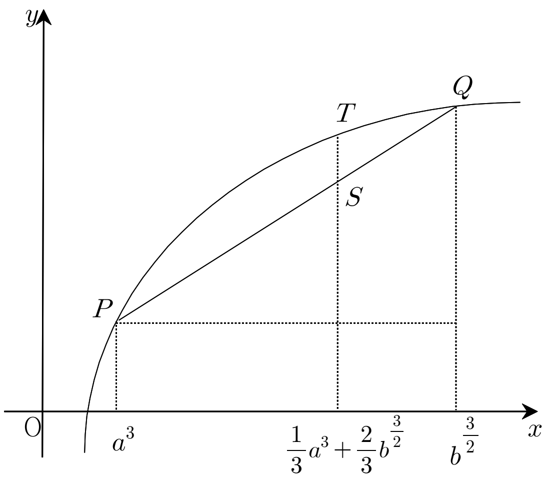
로그함수 $y=\ln x$의 그래프가 위로 볼록하다는 성질을 이용하여 임의의 양수 a, b에 대하여

$$ab \le \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} \qquad (1)$$

이 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

먼저 $a^3 < b^{\frac{3}{2}}$인 경우, <그림 1>과 같이 $y=\ln x$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a^3, \ln a^3)$, $\mathrm{Q}\left(b^{\frac{3}{2}}, \ln b^{\frac{3}{2}}\right)$을 생각하자. $y=\ln x$의 그래프가 위로 볼록하기 때문에 두 점 P, Q 사이의 그래프가 선분 PQ보다 위에 놓여 있다. 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점을 S라고 하면 S의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}\ln a^3 + \frac{2}{3}\ln b^{\frac{3}{2}}\right)$이다. x좌표가 $\frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$인 $y=\ln x$의 그래프 위의 점을 T라 할 때, T의 y좌표는 S의 y좌표 보다 크다. 따라서

$$\ln(ab) = \frac{1}{3}\ln a^3 + \frac{2}{3}\ln b^{\frac{3}{2}} < \ln\left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}\right)$$



<그림 1>

이다. 그러므로

$$ab = e^{\ln(ab)} < e^{\ln\left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$$

이다. $a^3 > b^{\frac{3}{2}}$인 경우도 위와 비슷한 방법으로 $ab < \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$을 보일 수 있다. 한편, $a^3 = b^{\frac{3}{2}}$이면 $a^2 = b$이므로 $ab = a^3 = \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$이다. 따라서 $a^3 = b^{\frac{3}{2}}$일 때 부등식 (1)의 등호가 성립한다.

위와 비슷한 방법을 이용하여 임의의 양수 a, b에 대하여

$$ab \le \frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{4}b^{\frac{4}{3}} \qquad (2)$$

이 성립함을 보일 수 있다.

<나>

닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가하는 삼각함수 $y=\sin x$에 대한 부등식

$$\left(\int_0^t \sin x\,dx\right)^2 \ge \int_0^t \sin^3 x\,dx \qquad (0 \le t \le 1)$$

은 성립한다. 이는

$$u(t) = \left(\int_0^t \sin x\,dx\right)^2 - \int_0^t \sin^3 x\,dx$$

라 두면,

$$u(0) = 0, \qquad u'(t) = 8\cos\frac{t}{2}\sin^5\frac{t}{2} \ge 0$$

로부터 알 수 있다. 단, $u'(t) \ge 0$의 자세한 계산은 생략한다.

한편 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가하는 함수 $y=e^x-1$에 대한 부등식

$$\left(\int_0^t e^x-1\,dx\right)^2 \le \int_0^t (e^x-1)^3\,dx \qquad (0 \le t \le 1)$$

은 성립한다. 이는

$$v(t)=\left(\int_0^t e^x-1\,dx\right)^2-\int_0^t (e^x-1)^3\,dx$$

라 두면,

$$v(0)=0, \quad v'(t)=-(e^t-1)(e^{2t}-4e^t+2t+3) \le 0$$

로부터 알 수 있다. 단, $v'(t) \le 0$의 자세한 계산은 생략한다.

위의 두 함수 $y=\sin x$, $y=e^x-1$과 같이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 닫힌구간 $[0,1]$에서는 증가하며 $f(0)=0$인 함수 $f(x)$를 생각하자. 이 때, 다음을 만족시키는 실수 c가 존재함을 보일 수 있다.

① 구간 $[0,1]$의 모든 실수 x에 대하여, $f'(x) \le c$일 때 부등식

$$\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^2 \ge \int_0^t f(x)^3\,dx \qquad (0 \le t \le 1) \qquad (3)$$

이 성립하고, 구간 $[0,1]$의 모든 실수 x에 대하여, $f'(x) \ge c$일 때 부등식

$$\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^t f(x)^3\,dx \qquad (0 \le t \le 1) \qquad (4)$$

이 성립한다.

적분에 대한 부등식 (3)과 (4)를 수열에 대한 부등식으로 다음과 같이 생각해보자. 증가하는 수열

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots \qquad (\text{단, } a_1=0)$$

에서 임의의 $j \ge 2$에 대하여 $a_j-a_{j-1} \le 1$이면 부등식 (3)처럼

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \ge a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3 \qquad (5)$$

이 성립하고, 임의의 $j \ge 2$에 대하여 $a_j-a_{j-1} \ge 1$이면 부등식 (4)처럼

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \le a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3 \qquad (6)$$

이 성립한다. 실제로 부등식 (5)는 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다. 먼저 $n=1$일 때는 $0^2=0^3$이므로 자명하다. 이제 $n=k$일 때 부등식 (5)가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$a_{k+1}^3+\sum_{j=1}^k a_j^3 \le a_{k+1}^3+\left(\sum_{j=1}^k a_j\right)^2$$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 (5)가 성립하기 위해서는

$$a_{k+1}^3+\left(\sum_{j=1}^k a_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{k+1} a_j\right)^2$$

을 보이면 된다. 그런데

$$\left(\sum_{j=1}^{k+1} a_j\right)^2=\left(\sum_{j=1}^k a_j\right)^2+2a_{k+1}\left(\sum_{j=1}^k a_j\right)+a_{k+1}^2$$

이므로

$$a_{k+1}^3+\left(\sum_{j=1}^k a_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^k a_j\right)^2+2a_{k+1}\left(\sum_{j=1}^k a_j\right)+a_{k+1}^2,$$

즉

$$2\left(\sum_{j=1}^k a_j\right)-\left(a_{k+1}^2-a_{k+1}\right) \ge 0 \qquad (7)$$

을 보이면 된다. 부등식 (7)은 임의의 $j \ge 2$에 대하여 $a_j-a_{j-1} \le 1$임을 이용하여 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다.

<다>

<그림 2>와 같이 평면 위에 직사각형 ABCD와 그 직사각형 내부의 한 점 P가 있을 때 등식

$$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2 \qquad (8)$$

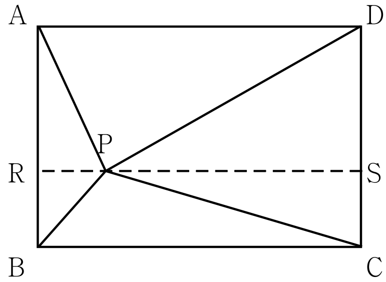
이 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

점 P에서 직선 AB와 직선 CD에 내린 수선의 발을 각각 점 R, S라 할 때, 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{PA}^2=\overline{PR}^2+\overline{RA}^2,\quad \overline{PC}^2=\overline{PS}^2+\overline{SC}^2,$$

$$\overline{PB}^2=\overline{PR}^2+\overline{RB}^2,\quad \overline{PD}^2=\overline{PS}^2+\overline{SD}^2$$

이다. 그런데 직선 AB와 CD는 서로 평행하고 직선 RS는 이 두 직선에 수직이므로 $\overline{RA}=\overline{SD}$이고 $\overline{RB}=\overline{SC}$이다. 따라서 등식 (8)은 성립한다. 점 P가 <그림 2>와는 다르게 직사각형 ABCD의 외부에 있어도 등식 (8)이 성립함을 비슷한 방법으로 보일 수 있다.



<그림 2>

이제 좌표 평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 각각 $1, 2, 3, 4$인 동심원 네 개가 있다고 하자. 위에서 보인 사실을 이용하면 꼭짓점이 이 네 원에 각각 한 개씩 있는 직사각형이 존재하지 않음을 다음과 같이 귀류법을 사용하여 보일 수 있다. 이러한 직사각형 ABCD가 존재한다고 가정하자. 등식 (8)에서 점 P를 원점 O로 두면 등식

$$\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OD}^2 \qquad (9)$$

이 성립한다. 이 때 선분 OA, OB, OC, OD는 네 동심원의 반지름이다. 따라서 등식 (9)에 의하여 반지름의 길이의 최솟값의 제곱과 최댓값의 제곱의 합이 다른 두 반지름의 길이의 제곱의 합과 같아야 한다. 그런데 네 원의 반지름의 길이가 각각 $1, 2, 3, 4$이므로 $1^2+4^2 \neq 2^2+3^2$이 되어 등식 (9)가 성립하지 않는다. 따라서 꼭짓점이 이 네 동심원에 각각 한 개씩 있는 직사각형은 존재하지 않는다.

1-1. 제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오(30점).

1-1(a). $a^4 > b^{\frac{4}{3}}$을 만족시키는 임의의 양수 a, b에 대하여 부등식 (2)가 성립함을 보이시오.

1-1(b). 부등식 (2)를 이용하여, 임의의 양수 x에 대하여 $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$의 최솟값과 이때의 x의 값을 구하시오.

1-2. 제시문 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오(30점).

1-2(a). ①을 만족시키는 실수 c를 구하시오.

1-2(b). 임의의 $j \geq 2$에 대하여 $a_j - a_{j-1} \geq 1$이면 부등식 (6)이 성립함을 보이시오.

1-3. 제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오(40점).

1-3(a). 좌표 평면 위의 세 점 X, Y, Z와 원점 O에 대하여 $|\overrightarrow{OX}|=3$, $|\overrightarrow{OY}|=2$, $|\overrightarrow{OZ}|=4$이고 $\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ}=0$일 때, $|\overrightarrow{XZ}+\overrightarrow{OY}|$의 값을 구하시오.

1-3(b). 좌표 평면 위에 중심이 원점인 동심원 네 개가 있다. 이 네 원의 반지름의 길이가 공차가 양수인 등차수열을 이룬다고 하자. 꼭짓점이 이 네 원에 각각 한 개씩 있는 직사각형이 존재하지 않음을 보이시오.