2018학년도 경찰대학 1차시험 (수 학)

※ 총 6쪽 25문항(3점 5문항, 4점 15문항, 5점 5문항)입니다.

[1~20] 각 문항의 답을 하나만 고르시오.

1. $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{121\sqrt{120}+120\sqrt{121}}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{9}{10}$　② $\dfrac{10}{11}$　③ $\dfrac{11}{10}$　④ $\dfrac{12}{11}$　⑤ $\dfrac{6}{5}$

2. $a^2+b^2=4$ 인 복소수 $z=a+bi$ 에 대하여 $\dfrac{i}{z-1}$ 가 양의 실수일 때, z^2의 값은? (단, a, b는 실수이다.) [3점]

① $-2+2\sqrt{3}i$　② $2+2\sqrt{3}i$　③ $2-2\sqrt{3}i$
④ $2\sqrt{3}+2i$　⑤ $2\sqrt{3}-2i$

3. 입학정원이 35명인 A학과는 올해 대학수학능력시험 4개 영역 표준점수의 총합을 기준으로 하여 성적순에 의하여 신입생을 선발한다. 올해 A학과에 지원한 수험생이 500명이고 이들의 성적은 평균 500점, 표준편차 30점인 정규분포를 따른다고 할 때, A학과에 합격하기 위한 최저점수를 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 530　② 535　③ 540　④ 545　⑤ 550

4. 직선 $y=\dfrac{1}{2}(x+1)$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$과 $\mathrm{P}\left(t, \dfrac{t+1}{2}\right)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=\dfrac{1}{2}(x+1)$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AP}}}$의 값은? [3점]

① $\sqrt{3}$　② 2　③ $\sqrt{5}$　④ $\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{7}$

5. 10 이하인 세 자연수 a, b, c에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n+b^n}{a^{2n}+b^{2n}}=1$$

을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

6. 양수 a, b가 $ab+a+2b=7$을 만족시킬 때, ab의 최댓값은? [4점]

① $6-2\sqrt{2}$ ② $8-2\sqrt{2}$ ③ $9-4\sqrt{2}$
④ $11-6\sqrt{2}$ ⑤ $13-8\sqrt{2}$

7. 다항식 $x^{10}+x^5+3$을

$$x^2+x+1,\quad x^2-x+1,\quad (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

로 나눈 나머지를 각각 $r_1(x), r_2(x), r_3(x)$라 할 때, $r_1(x)r_2(x)r_3(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는? [4점]

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

8. 두 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(3, 0)$에 대하여 점 P가 곡선 $y=2x^2$ 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2$의 최솟값은? [4점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

9. 함수 $y=\frac{1}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx+n\,(m<0)$이 한 점에서 만나고, 그 만나는 점은 제 1사분면에 있다. 직선 $y=mx+n$이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이가 1이다. $m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이고, O는 원점이다.) [4점]

① $2(3-4\sqrt{2})$ ② $2(3\sqrt{2}-4)$ ③ $2(4\sqrt{2}-3)$
④ $3\sqrt{2}-4$ ⑤ $4\sqrt{2}-3$

10. 실수 p에 대하여 이차방정식 $x^2-2px+p-1=0$의 두 실근을 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$라 할 때, $\int_{\alpha}^{\beta}|x-p|\,dx$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

11. 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -4)$, $\mathrm{B}(3,0)$과 연립부등식 $\begin{cases} y \le 1-x^2 \\ y \ge x^2-1 \end{cases}$의 영역에 속하는 점 $\mathrm{P}(x,y)$에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{13}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{17}{3}$

12. 720의 모든 양의 약수를 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{30}$이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{30}\log_2 a_k$의 값은? (단, $\log_{10}2=0.30$, $\log_{10}3=0.48$로 계산한다.) [4점]

① 140 ② 143 ③ 146 ④ 149 ⑤ 152

13. $1, 2, 3, 4, 5$의 숫자가 각각 적힌 5개의 공을 모두 3개의 상자 A, B, C에 넣으려고 한다. 각 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 11 이하가 되도록 공을 상자에 넣는 방법의 수는? (단, 빈 상자의 경우에는 넣어진 공에 적힌 수의 합을 0으로 생각한다.) [4점]

① 190 ② 195 ③ 200 ④ 205 ⑤ 210

14. 홀수의 눈이 나올 때까지 주사위를 던지는 시행을 반복한다. 10회 이하에서 1의 눈이 나와 시행을 멈출 확률은? [4점]

① $\frac{335}{1024}$ ② $\frac{337}{1024}$ ③ $\frac{339}{1024}$ ④ $\frac{341}{1024}$ ⑤ $\frac{343}{1024}$

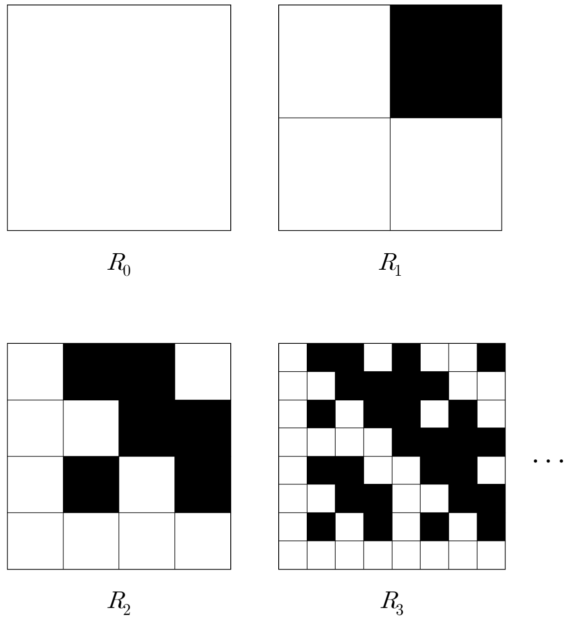
15. 방정식 $2x^2 = x + 3[x]$의 실근의 개수를 p, 모든 실근의 합을 q라 할 때, pq의 값은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.) [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 흰색 정사각형 R_0을 사등분하여 오른쪽 위의 한 정사각형을 검은색으로 칠한 전체 도형을 R_1이라 하고, R_1의 검은 부분의 넓이를 S_1이라 하자.

R_1의 각 정사각형을 사등분하여 얻은 도형이 이면 으로, 이면 으로 모두 바꾼 후 얻은 전체 도형을 R_2라 하고, R_2의 검은 부분의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 전체 도형 R_n의 검은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, S_{10}의 값은? [4점]



① $\frac{257}{512}$ ② $\frac{511}{1024}$ ③ $\frac{513}{1024}$ ④ $\frac{1023}{2048}$ ⑤ $\frac{1025}{2048}$

17. 음이 아닌 정수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1인 n차 다항함수 $P_n(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$
(나) 음이 아닌 서로 다른 정수 m, n에 대하여
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=0$$

$\int_0^1 P_3(x)dx$의 값은? [5점]

① $-\frac{1}{20}$ ② $-\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{20}$

18. 함수
$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{100}\right]+\left[x+\frac{2}{100}\right]+\cdots+\left[x+\frac{99}{100}\right]$$
에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.) [5점]

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{4}{3}\right)=133$
ㄴ. 자연수 n에 대하여 $f\left(x+\frac{n}{2}\right)=f(x)+50n$
ㄷ. 자연수 n에 대하여 $\frac{n}{100}\le x<\frac{n+1}{100}$일 때,
$f(f(x)-1)=nf(x)-1$
을 만족시키는 자연수 n의 개수는 1이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 첫째항이 1이고 공비가 $r\,(r>0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{17}|x-a_n|$은 $x=16$에서 최솟값을 갖는다. 그 최솟값을 m이라 할 때, rm의 값은? [5점]

① $15(30+31\sqrt{2})$ ② $15(31+30\sqrt{2})$ ③ $15(31-15\sqrt{2})$
④ $30(31-15\sqrt{2})$ ⑤ $30(31+15\sqrt{2})$

20. 미분가능한 함수 $f(x), g(x)$가
$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),\quad f(1)=1$$
$$g(x+y)=g(x)g(y)+f(x)f(y),\quad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=0$$
을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [5점]

<보 기>

ㄱ. $f'(x)=f'(0)g(x)$
ㄴ. $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.
ㄷ. $\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=1$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21～25] 각 문항의 답을 답안지에 기재하시오.

21. $\log_m 2 = \dfrac{n}{100}$ 을 만족시키는 자연수의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [3점]

22. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \ (n \geq 1)$$

을 만족시킬 때, $A = \sum_{k=1}^{9} a_k a_{k+1}$, $B = \sum_{k=1}^{9} \dfrac{1}{a_k a_{k+1}}$ 이라 하자. AB의 값을 구하시오. [4점]

23. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 집합 X로의 함수 $f(x)$가

$$(f \circ f \circ f)(x) = x$$

를 만족시킬 때, 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

24. $1 \leq k < l < m \leq 10$ 인 세 자연수 k, l, m에 대하여 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = (x+1)^k x^l (x-1)^m$$

일 때, $x = 0$에서 $f(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 순서쌍 (k, l, m)의 개수를 구하시오. [4점]

25. 함수 $f(x) = (x-1)^4 (x+1)$에 대하여 이차함수 $g(x)$, $h(x)$가

$$f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)^2 h(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $g(2) + h(2)$의 값을 구하시오. [5점]

※ 확인사항

▷ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입・표기했는지 확인하시오.