**문제 2번** (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

$E(X)=\frac{1}{3}\times(1+2+3)=2$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$=\frac{1}{3}\times(1+4+9)-2^2$

$=\frac{2}{3}$ $\left(\sigma(X)=\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$\bar{X}\sim N\left(m,\frac{\sigma^2}{n}\right)=N\left(2,\frac{1}{54}\times\frac{2}{3}\right)=N\left(2,\left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$

$E(-2\bar{X})=(-2)\times E(\bar{X})=(-2)\times 2=-4$

$V(-2\bar{X})=(-2)^2\times V(\bar{X})=4\times\frac{1}{81}=\frac{4}{81}$

$P\left(-2\bar{X}\geq-\frac{11}{3}\right)=P\left(\bar{X}\leq\frac{11}{6}\right)=P\left(Z\leq\frac{\frac{11}{6}-2}{\frac{1}{9}}\right)$

$=P(Z\leq-1.5)=P(Z\geq1.5)=0.5-P(0\leq Z\leq1.5)$

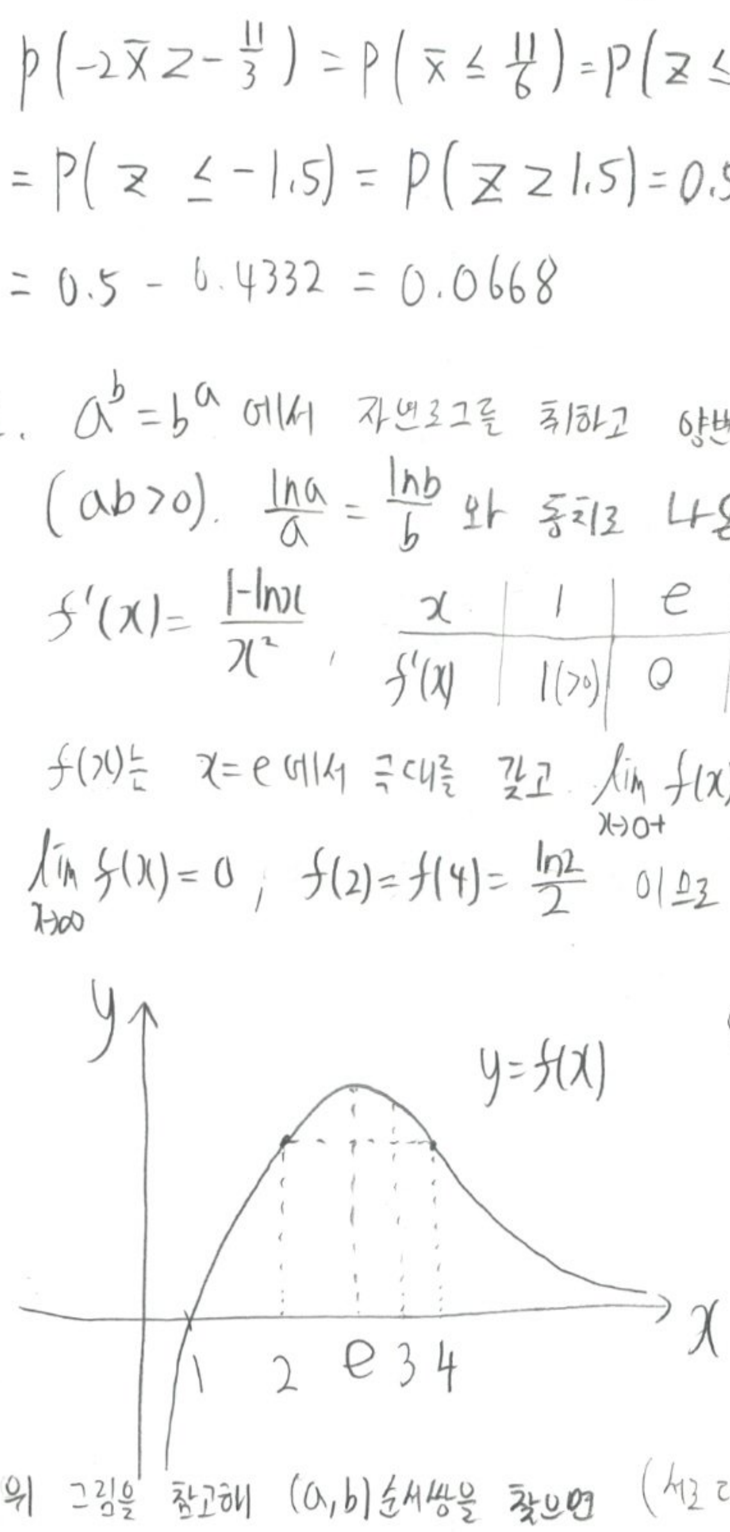
$=0.5-0.4332=0.0668$

2. $a^b=b^a$ 에서 자연로그를 취하고 양변을 $ab$로 나누면 $(ab>0)$. $\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}$ 와 동치로 나온다.

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

| $x$ | 1 | $e$ | 3 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $1(>0)$ | 0 | $\frac{1-\ln 3}{9}(<0)$ |

$f(x)$는 $x=e$ 에서 극대를 갖고 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ ; $f(2)=f(4)=\frac{\ln 2}{2}$ 이므로 $y=f(x)$를 그리면




옆과 같다.

위 그림을 참고해 $(a,b)$ 순서쌍을 찾으면 (서로 다른 양의 정수쌍) (2,4) (4,2) 뿐임을 알 수 있다.

($\because$ $a<e<b$ or $a>e>b$를 만족해야 조건을 만족할 수 있는데 $a,b$ 중 작은 것이 1이면 나머지는 1이어야 함숫값이 같아지므로 안되고, 2일 때는 성립하고, 3이면 정의역 $x>e$에서 $f(x)$가 감소하므로 함숫값 같은게 존재하지 않는다)

3. 원 위에 정 $n$각형을 놓고 각 점을 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$이라 부르자. 또 원의 중심 O 에 대해 $\angle a_1Oa_2=\theta$ 라 하면 $n\theta=2\pi$. 또 $\overline{Oa_i}=r\ (i=1\sim n)$ 이라 하면 정 $n$각형 둘레 길이 $=n\times\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)=1$,

$f(n)=n\times\left(S_{\triangle a_1Oa_2}\right)=n\times\frac{1}{2}r^2\sin\theta$

$f(12)=12\times\frac{1}{2}\times r^2\sin\theta$ ; $24r\sin\frac{\theta}{2}=1$, $12\theta=2\pi$

이므로 정리하면 $r\times\left(\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right)=\frac{1}{24}$ $\left(\because \sin15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos30^\circ}{2}}\right)$

$f(12)=6r^2\sin30^\circ=3r^2=\frac{2+\sqrt{3}}{48}$.

$n\theta=2\pi$ 에서 $\lim_{n\to\infty}\theta=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}=0$

$nr\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$ 에서 $\lim_{n\to\infty}n\theta\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\times r=\lim_{n\to\infty}2\pi\times\frac{1}{2}\times r=\frac{1}{2}$ ; $\lim_{n\to\infty}r=\frac{1}{2\pi}$

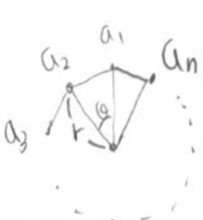
$f(n)=\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times n\theta$

$=\pi\times r^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}$

$\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\pi\times r^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}$

$=\pi\times\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\times1$

$=\frac{1}{4\pi}$



이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

## 문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[2-1]

한장의 카드를 꺼낼때 각 카드가 뽑힐 확률은 $\frac{1}{3}$로 같다

54회 반복하면 카드 1, 2, 3 이 각각 18회씩 나온다

$E(\bar{X}) = \frac{18\times1 + 18\times2 + 18\times3}{54} = 2$ 이다.

$E(-2\bar{X}) = -2E(\bar{X}) = -4$ 이다

$V(-2\bar{X}) = 4V(\bar{X})$ 이다.

$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 = \frac{1}{81}$

따라서 $V(-2\bar{X}) = 4V(\bar{X}) = \frac{4}{81}$ 이다.

$P(-2\bar{X} \geq -\frac{11}{3}) = P(Z \geq 1.5) = 0.0668$ 이다.

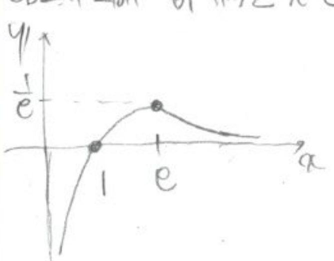
[2-2]

$a^b = b^a$ 에 ln을 씌우면 $b\ln a = a\ln b$, $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ 이다. ($a, b$는 서로다른 양의 정수)

$f(x)$를 미분하면 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ 이다

| $x$ | 0 | ... | $\frac{1}{e}$ | ... |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ |

증감표에 의해 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$를 갖고 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ 이므로 그래프 개형은 다음과 같다.




$f(a) = f(b)$ 이어야 한다

① $a < b$ 일때

$1 < a < e$ 여야하고 $a$는 양의 정수이므로 $a = 2$ 이다

$\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln 2}{2}$ 를 만족하는 $b = 4$ 이다

② $b < a$ 일때

$1 < b < e$ 여야하고 $b$는 양의 정수이므로 $b = 2$ 이다

$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln 2}{2}$ 를 만족하는 $a = 4$ 이다

따라서 구하는 순서쌍$(a, b)$는 $(2, 4), (4, 2)$ 이다

[2-3]

반지름이 R인 원에 정 n각형이 내접한다고 하자

원의 중심을 기준으로 정n각형을 하나의 각의 크기가 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변 삼각형으로 n등분한다

중심각이 $\frac{2\pi}{n}$ 이므로 사인법칙에 의해 $\frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{\pi}{n})} = 2R$ 이 성립한다 $R = \frac{1}{2n\sin(\frac{\pi}{n})}$

이때 정n각형의 넓이 $f(n) = \frac{1}{2}\times R^2 \times \sin(\frac{2\pi}{n}) \times n = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4n^2\sin^2(\frac{\pi}{n})}\times\sin(\frac{2\pi}{n})\times n$

$= \frac{1}{4n\tan(\frac{\pi}{n})}$ 이다

$f(12) = \frac{1}{48\tan(\frac{\pi}{12})}$ 이다.

$\tan(\frac{\pi}{12}) = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ 이므로

$f(12) = \frac{1}{48}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{48}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\tan(\frac{\pi}{n})}\times\frac{1}{\pi}$ 이다.

$\frac{\pi}{n} = x$로 치환하자

$\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\tan(\frac{\pi}{n})}\times\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4\pi}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{1}{4\pi}$ 이다

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨