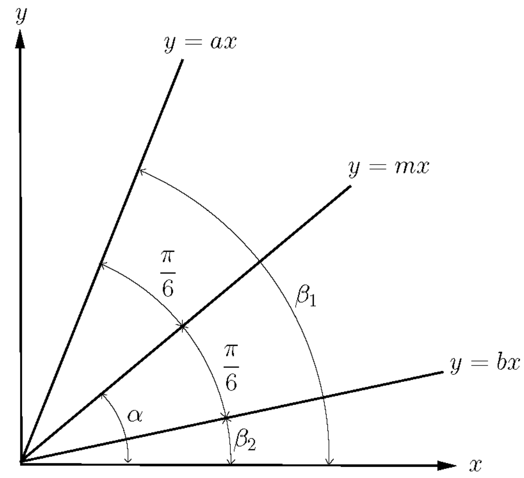
한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-1번



위의 그림에서 $\tan\alpha=m,\ \tan\beta_1=a,\ \tan\beta_2=b$ 이다.

탄젠트 함수의 덧셈공식에 의하여 다음 관계식을 얻는다.

▶ $a=\tan\beta_1=\tan(\alpha+\frac{\pi}{6})=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}}=\dfrac{m+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-m\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}m+1}{\sqrt{3}-m},$

▶ $b=\tan\beta_2=\tan(\alpha-\frac{\pi}{6})=\dfrac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}}=\dfrac{m-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+m\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}+m}$

(1) $a+b=\dfrac{\sqrt{3}m+1}{\sqrt{3}-m}+\dfrac{\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}+m}=\dfrac{(\sqrt{3}m+1)(\sqrt{3}+m)+(\sqrt{3}m-1)(\sqrt{3}-m)}{(\sqrt{3}-m)(\sqrt{3}+m)}$

$=\dfrac{3m+\sqrt{3}+\sqrt{3}m^2+m+3m-\sqrt{3}-\sqrt{3}m^2+m}{3-m^2}$

$=\dfrac{8m}{3-m^2}\geq 0$

따라서, $m^2\neq 3$과 $m(m^2-3)\leq 0$이고, 이 부등식을 만족시키는 m의 범위를 구하면

$m<-\sqrt{3},\ \ 0\leq m<\sqrt{3}$ -------------------- ㉠

이다. ㉠과 $|m|\leq N$을 만족시키는 m의 개수 $f(N)$은 $(N-1)+2=N+1$ 이다.

그러므로, 극한값은 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{f(N)}{2N+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2N+1}=\frac{1}{2}$이다.

(2) $ab=\dfrac{\sqrt{3}m+1}{\sqrt{3}-m}\cdot\dfrac{\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}+m}=\dfrac{3m^2-1}{3-m^2}\geq k>0$

① $|m|\geq 2$인 경우

$3m^2-1\leq k(3-m^2)\Rightarrow(k+3)m^2-(3k+1)\leq 0$

$\Rightarrow m^2\leq\dfrac{3k+1}{k+3}=\dfrac{3(k+3)-8}{k+3}=3-\dfrac{8}{k+3}$

$\Rightarrow |m|<\sqrt{3}$

$\therefore\ |m|\geq 2$과 $|m|<\sqrt{3}$을 동시에 만족시키는 정수 m은 없다.

② $|m|\leq 1$인 경우

$3m^2-1\geq k(3-m^2)\Rightarrow(k+3)m^2\geq 3k+1$

$\Rightarrow m^2\geq\dfrac{3k+1}{k+3}=3-\dfrac{8}{k+3}$

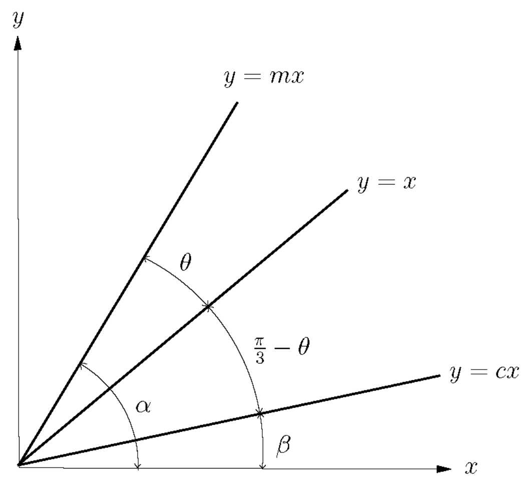
$$\Rightarrow m \le -\sqrt{\frac{3k+1}{k+3}} \text{ 또는 } m \ge \sqrt{\frac{3k+1}{k+3}}$$

▶ $k=1$ 이면, $m \ge 1$ 또는 $m \le -1$ 이다.

$\therefore\ m=1,\ -1$ 이다.

▶ $k \ge 2$ 이면, $|m| \le 1$ 과 $m^2 \ge \dfrac{3k+1}{k+3}$ 을 만족시키는 m은 없다.

(3)



$\tan\dfrac{\pi}{3}=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{m-c}{1+mc}=\sqrt{3}$ 이므로, $m-c=\sqrt{3}(1+mc)$이다.

따라서 $c=\dfrac{m-\sqrt{3}}{\sqrt{3}m+1}$이다.

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오전-2번

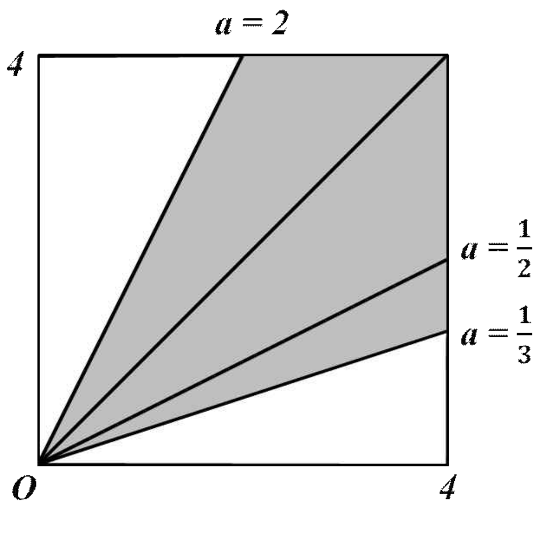
1.

점 5개를 포함하는 직선의 갯수 : 12
점 4개만을 포함하는 직선의 갯수 : 4
점 3개만을 포함하는 직선의 갯수 : 16

$$12\times {}_5C_3+4\times {}_4C_3+16=12\times \frac{5!}{3!\times 2!}+4\times 4+16=120+16+16=152$$

$$\text{확률} = 1-\frac{152}{{}_{25}C_3}=1-\frac{152}{2300}=\frac{2148}{2300}=\frac{537}{575}$$

2.

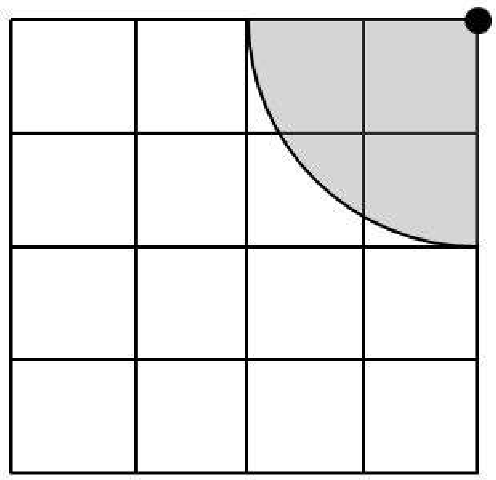


$y=ax$가 영역 R과 겹치는 부분을 살펴보면 그림과 같다.
$0\le a\le 1$일 때 겹치는 부분의 길이는 $(0,0)$과 $(4,4a)$사이의 거리이다.
$4\sqrt{1+a^2}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$이면 $a=\frac{1}{3}$이므로, $Y\ge\frac{4\sqrt{10}}{3}$일 확률은

$$P(Y\ge\frac{4\sqrt{10}}{3})=\int_{\frac{1}{3}}^{2}\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{2}x)dx=\frac{\pi}{4}\frac{2}{\pi}\left[-\cos(\frac{\pi}{2}x)\right]_{\frac{1}{3}}^{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

[별해] $1-\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{2}x)dx$ 를 구하여도 된다.

3.



반지름이 x일때 영역의 넓이 : $\frac{\pi}{4}x^2$

$$E(Z) = \int_0^2 (\frac{\pi}{4}x^2)(\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{2}x))dx = \frac{\pi^2}{16}\underbrace{\int_0^2 x^2\sin(\frac{\pi}{2}x)dx}_{\bigstar}$$

$$\left(x^2\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)' = 2x\cos(\frac{\pi}{2}x) - \frac{\pi}{2}x^2\sin(\frac{\pi}{2}x)$$ 이므로

$$\bigstar = \frac{2}{\pi}\left(2\int_0^2 x\cos(\frac{\pi}{2}x)dx - \left[x^2\cos(\frac{\pi}{2}x)\right]_0^2\right)$$

$$\left(x\sin(\frac{\pi}{2}x)\right)' = \sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{\pi}{2}x\cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$\int_0^2 x\cos(\frac{\pi}{2}x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x\sin(\frac{\pi}{2}x)\right]_0^2 - \int_0^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)\right]_0^2 = \frac{4}{\pi^2}(-1-1) = -\frac{8}{\pi^2}$$

$$\bigstar = \frac{2}{\pi}\left(2(-\frac{8}{\pi^2})+4\right) = \frac{2}{\pi}(4-\frac{16}{\pi^2})$$

$$\therefore E(Z) = \frac{\pi^2}{16}\frac{2}{\pi}(4-\frac{16}{\pi^2}) = \frac{\pi}{8}(4-\frac{16}{\pi^2}) = \frac{\pi}{2}(1-\frac{4}{\pi^2}) = \frac{\pi^2-4}{2\pi}$$