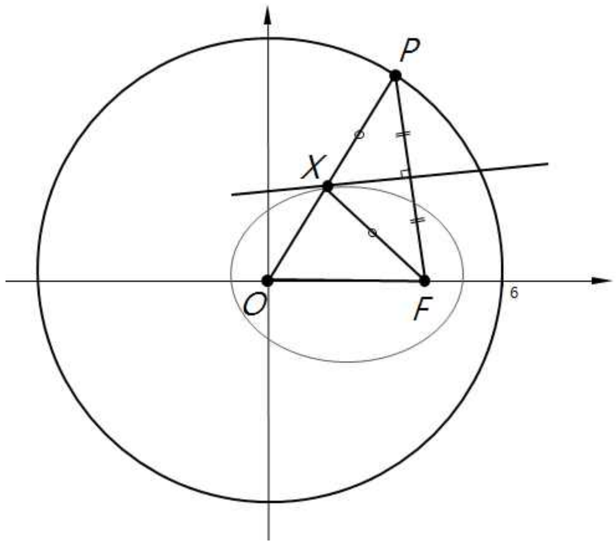
한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-1번

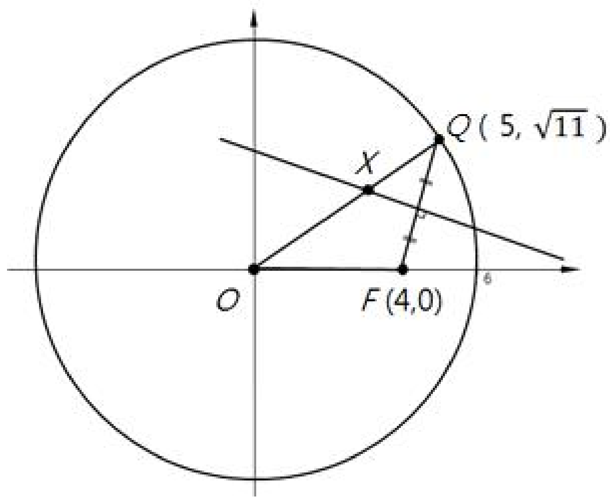
1.



(1) 원 위의 임의의 점 P에 대해 점 X는 항상 $\overline{XP}=\overline{XF}$을 만족하고 $\overline{OX}+\overline{XF}=\overline{OX}+\overline{XP}=\overline{OP}=6$으로 일정하므로 점 X의 자취 C는 두 점 O와 F로부터 거리의 합이 6인 점들의 집합, 즉 타원이다.

(2) 이 타원 C는 초점이 $(-2,0)$과 $(2,0)$이고 거리의 합이 6인 타원인 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$를 x축으로 2만큼 평행 이동한 타원이므로 그 방정식은 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 이다.

2.

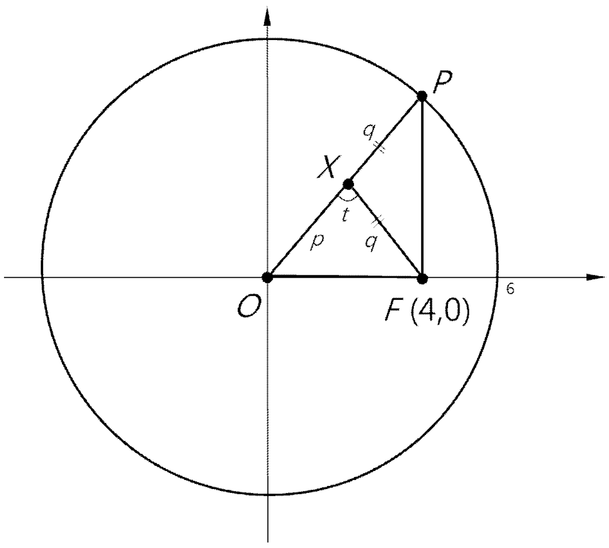


(1) 선분 QF의 중점은 $\left(\frac{9}{2},\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$이고 기울기는 $\sqrt{11}$이므로 선분 QF의 수직이등분선의 방정식은 $y-\frac{\sqrt{11}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{11}}\left(x-\frac{9}{2}\right)$이고 정리하면 $y=-\frac{1}{\sqrt{11}}x+\frac{10}{\sqrt{11}}$ 이다. 따라서 $a=-\frac{1}{\sqrt{11}}, b=\frac{10}{\sqrt{11}}$ 이다.

(2) X의 자취인 타원 C의 방정식과 (1)에서 구한 수직이등분선의 방정식으로부터 y를 소거하면 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}x+\frac{10}{\sqrt{11}}\right)^2}{5}=1$이다.

이를 정리 하면 x에 대한 이차방정식 $64x^2-400x+625=0$를 얻는다. 그 판별식은 $D/4=200^2-64\cdot625=0$이므로 선분PF의 수직이등분선은 타원의 접선이다.

3.



(1) $\angle OPF$가 최대이면 $\angle OXF$도 최대이다.

$\angle OXF = t$ $(0 < t < \pi)$, $\overline{OX} = p, \overline{FX} = q$ 라 하면 $\triangle OXF$ 에서

$4^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos t = (p+q)^2 - 2pq - 2pq\cos t$ 이고

$p + q = 6$ 이므로 $\cos t = \dfrac{10}{pq} - 1$ 이다.

(2) $\angle OXF = t$가 최대이면 $\cos t = \dfrac{10}{pq} - 1$ 은 최소이고 이때 pq는 최대이다. 합이 6으로 일정한 두 양수 p, q의 곱은 $p = q$일 때 최대이고 이때, $p = q = 3$이다. 따라서 $\angle OPF$가 최대($\angle OXF$가 최대)일 때, $\triangle OXF$는 각 변의 길이가 $3, 3, 4$ 인 이등변삼각형이므로 그 넓이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-2번

1. 제시문에서 주어진 함수 $f(x)$를 적분하면,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \cos^2 t\,dt + \int_0^{2\pi-x} \sin^2 t\,dt = \int_0^x \frac{\cos 2t+1}{2}\,dt + \int_0^{2\pi-x} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_0^x + \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi-x} = \frac{1}{2}\sin 2x + \pi \end{aligned}$$

이므로, 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $a = \frac{1}{2} + \pi$이다. 제시문에서 주어진 함수 $g(x)$를 미분하면,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x + \sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin x) \\ &= |\cos x|\cos x - |\sin x|\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{aligned}$$

이므로, $g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\pi}{4}$이다. 따라서 $g(x)$의 최댓값은 $b = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$이다.

(※ $C = g(0) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$)

그러므로 $a - b = \frac{3}{4}\pi$이다.

2. $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$인 경우는 $g'(x) = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1$이므로, $g(x) = -x + C = -x + \frac{3}{4}\pi$이다.

(※ $g(\frac{\pi}{2}) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + C,\ C = \frac{3}{4}\pi$)

따라서 $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$에서 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \pi \ge |-x + \frac{\pi}{2}| = |g(x) - \frac{\pi}{4}|$이다.

구하고자 하는 회전체의 부피 V는 곡선 $y = f(x)$와 세 직선 $y=0,\ x=0,\ x=\pi$로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피 V_1에서 $y = g(x) - \frac{\pi}{4}$와 세 직선 $y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피 V_2를 뺀 값이다. 즉, $V = V_1 - V_2$이다.

먼저 부피 V_1을 구하면,

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_0^\pi f(x)^2\,dx = \pi\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \pi\right)^2 dx \\ &= \pi\int_0^\pi \left(\frac{1}{4}\sin^2 2x + \pi\sin 2x + \pi^2\right)dx = \pi\int_0^\pi \left(\frac{1}{4}\frac{1-\cos 4x}{2} + \pi\sin 2x + \pi^2\right)dx \\ &= \pi\left(\left[\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x)\right]_0^\pi - \left[\frac{\pi}{2}\cos 2x\right]_0^\pi + \left[\pi^2 x\right]_0^\pi\right) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \pi^4 \end{aligned}$$

이고, $V_2 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2x\,dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}\sin 4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}$이다.

그러므로, $V = V_1 - V_2 = (\frac{\pi^2}{8} + \pi^4) - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \pi^4$이다.

3. $g'(x) = |\cos x|\cos x - |\sin x|\sin x$이므로,

① $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$인 경우는 문항1에서 $g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\pi}{4}$임을 알 수 있다.

② $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$인 경우는 문항2에서 $g(x) = -x + \frac{3}{4}\pi$임을 알 수 있다.

③ $\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$인 경우

$g'(x) = -\cos^2 x + \sin^2 x = -\cos 2x$이므로, $g(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + C = -\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\pi}{4}$이다.

(※ $g(\pi) = \int_0^{-1} \sqrt{1-t^2}\,dt = -\frac{\pi}{4} = C$)

④ $\frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi$인 경우

$g'(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$이므로, $g(x) = x + C = x - \frac{7}{4}\pi$이다.

(※ $g(2\pi) = \int_0^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} = 2\pi + C$, $C = -\frac{7}{4}\pi$)

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - (-x + \frac{3}{4}\pi)\right)dx \\
&\quad + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{\pi}{4} - (-\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\pi}{4})\right)dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\frac{\pi}{4} - (x - \frac{7}{4}\pi)\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\pi}{2}\right)dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} (2\pi - x)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{2}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[-\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{\pi}{2}x\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + \left[2\pi x - \frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\pi^2
\end{aligned}
$$