한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(1)-1번

1.

일차변환 f에 의하여 점 (x,y)가 점 (x',y')으로 옮겨진다고 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$이므로 $x = \frac{x'}{2}, y = \frac{y'}{3}$이다. 이 식을 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$에 대입하면 $(\frac{x'}{2} - 1)^2 + (\frac{y'}{3} - 2)^2 = 1$이 된다. 따라서 곡선 A_1은 타원이고, A_1의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-6)^2}{3^2} = 1$$

이다.

2.

1번에서와 같은 방법을 반복하면 임의의 자연수 n에 대하여 곡선 A_n은 타원이 되고, 그 방정식은

$$\frac{(x-2^n)^2}{(2^n)^2} + \frac{(y-2 \cdot 3^n)^2}{(3^n)^2} = 1$$

이다. 제시문 <다>에 의해 타원 A_n의 넓이는 $\pi 2^n 3^n = 6^n \pi$ 이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6^n \pi} = \frac{1/6}{1-1/6} = \frac{1}{5}$$

3.

일차변환 $f \circ g$를 나타내는 행렬은 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$이고, 점 (x,y)가 일차변환 $f \circ g$에 의하여 점 (x',y')으로 옮겨진다고 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ -3x \end{pmatrix}$이므로 $x = -\frac{y'}{3}, y = \frac{x'}{2}$이다. 이 식을 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$에 대입하면 $(-\frac{y'}{3} - 1)^2 + (\frac{x'}{2} - 2)^2 = 1$이 된다. 따라서 곡선 B_1은 타원이고, B_1의 방정식은

$$\frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

이다. 타원 B_1을 일차변환 $f \circ g$에 의하여 옮긴 곡선 B_2의 방정식은 $\frac{(-\frac{y}{3} - 4)^2}{2^2} + \frac{(\frac{x}{2} + 3)^2}{3^2} = 1$ 이고, 이를 다시 정리하면

$$\frac{(x+6)^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{(y+12)^2}{2^2 \cdot 3^2} = 1$$

이 된다. 즉, 곡선 B_2는 반지름의 길이가 6인 원이 된다. 위의 과정을 반복하면 임의의 자연수 m에 대하여 곡선 B_{2m-1}은 타원이 되고 곡선 B_{2m}은 원이 된다. 이 때 B_{2m-1}과 B_{2m}의 방정식은 각각

$$B_{2m-1}: \frac{(x-4(-6)^{m-1})^2}{2^2 \cdot 6^{2(m-1)}} + \frac{(y+3(-6)^{m-1})^2}{3^2 \cdot 6^{2(m-1)}} = 1 \quad \text{과} \quad B_{2m} : (x-(-6)^m)^2 + (y-2(-6)^m)^2 = 6^{2m}$$

이다. 따라서 타원 B_{2m-1}의 넓이 S_{2m-1}과 원 B_{2m}의 넓이 S_{2m}은 각각

$$S_{2m-1} = \pi(2 \cdot 6^{m-1})(3 \cdot 6^{m-1}) = 6^{2m-1}\pi \text{와 } S_{2m} = 6^{2m}\pi$$

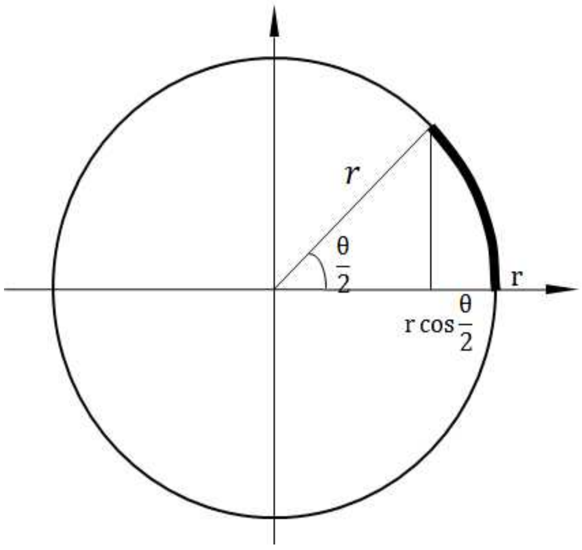
이다. 결국

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{S_n} = \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{\pi}{S_{2m-1}} + \frac{\pi}{S_{2m}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6^n \pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1/6}{1-1/6} = \frac{1}{5}$$

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | 오후(1)-2번

1.



입체 ㉯는 반지름이 r인 원호를 회전하여 얻어지는 입체이므로

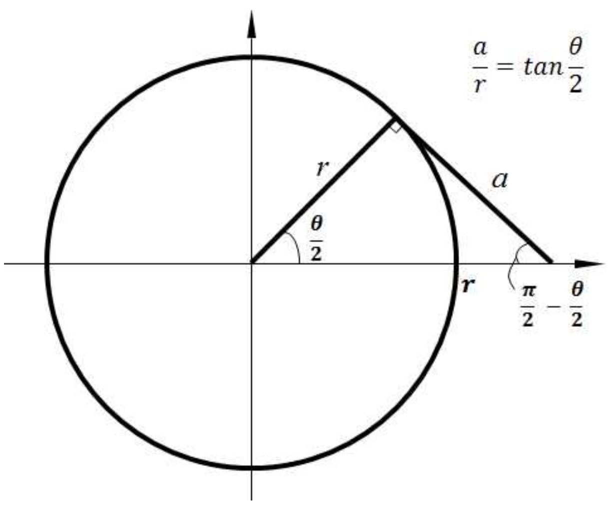
$$A(\theta)=\int_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r}=\pi r^3\left(1-\frac{1}{3}-\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi r^3}{3}\left(2-3\cos\frac{\theta}{2}+\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore A\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi r^3}{3}\left(2-3\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{\pi r^3}{3}\,\frac{16-12\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{8}=\frac{\pi r^3(16-9\sqrt{3})}{24}$$

2.



원뿔 ㉮의 부피를 구하자.

$$\frac{a}{r}=\tan\frac{\theta}{2}$$

원 C의 반지름$=r\sin\frac{\theta}{2}$

원뿔의 높이$=a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=r\tan\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=r\tan\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore$ 원뿔의 부피$=\frac{1}{3}\pi r^2\sin^2\frac{\theta}{2}\,r\tan\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}r^3\sin^3\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$

$$\therefore B(\theta)=\frac{\pi r^3}{3}\left(\sin^3\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}-2+3\cos\frac{\theta}{2}-\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

편의상 $s=\sin\frac{\theta}{2}$, $c=\cos\frac{\theta}{2}$로 쓰자.

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}=\lim_{c\to1+0}\frac{2-3c+c^3}{\frac{s^4}{c}-2+3c-c^3}=\lim_{c\to1+0}\frac{2c-3c^2+c^4}{(1-c^2)^2-2c+3c^2-c^4}$$

$$=\lim_{c\to1+0}\frac{2c-3c^2+c^4}{c^2-2c+1}=\lim_{c\to1+0}\frac{c(c-1)^2(c+2)}{(c-1)^2}=3$$

3.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{2} = \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

$A(X)$의 평균$= \displaystyle\int_0^\pi f(x)A(x)dx \ = \dfrac{\pi r^3}{3}\int_o^\pi \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}(2-3\cos\dfrac{x}{2}+\cos^3\dfrac{x}{2})dx$

$= \dfrac{\pi r^3}{3}\displaystyle\int_0^\pi (2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} - 3\sin\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2}\cos^4\dfrac{x}{2})dx$

정적분의 첫 번째 항$= \displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$

$\cos\dfrac{x}{2} = t \ \Rightarrow \ -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}dx = dt \qquad \sin\dfrac{x}{2}dx = -2dt$

정적분의 나머지 항$= \displaystyle\int_1^0 6t^2 - 2t^4\,dt = \int_0^1 2t^4 - 6t^2\,dt = \left[\dfrac{2}{5}t^5 - 2t^3\right]_0^1 = \dfrac{2}{5} - 2 = \dfrac{-8}{5}$

$\therefore A(X)$의 평균 $= \dfrac{\pi r^3}{3}(2 - \dfrac{8}{5}) = \dfrac{2}{15}\pi r^3$