| 한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 | | |
|---|---|---|
| 상 경 계 | **논 술 예 시 답 안** | 2번 |

1.

$f'(x)=12(x^3+2ax^2+(a^2+3a)x+3a^2)=12(x+a)(x^2+ax+3a)$ 이므로 $a^2-12a>0$ 이면

그 실근은 $-a$, $\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-12a}}{2}$ 이고 $x=-a$, $\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-12a}}{2}$ 에서 극값을 갖는다.

$a<0$ 인 경우 $x$가 열린구간 $\left(-a, \dfrac{-a+\sqrt{a^2-12a}}{2}\right)$ 에 있으면 $f'(x)<0$ 가 된다.

$a=0$ 인 경우 $x$가 열린구간 $(-1,0)$ 에 있으면 $f'(x)<0$ 가 된다.

$0<a<12$ 인 경우 실근은 $-a$이며 $-a\le-1$ 이면 $x$가 열린구간 $(-1,\infty)$ 에 있으면 $f'(x)>0$ 가 되므로, 이 경우 $1\le a<12$ 이고 가장 작은 실수는 $a=1$ 이다.

2.

$a=-1$, $b=12$ 일 때,

$f(x)=3x^4-8x^3-12x^2+36x+12$ 이고 $f'(x)=12(x-1)(x^2-x-3)$ 이므로 $f'(2)=-12$ 이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,f(2))$ 에서 접선의 식은 $g(x)=-12x+44$ 이다.

만나는 점에 대한 $c$, $d$는 $f(x)=g(x)$ 의 해이다.

방정식 $f(x)=g(x)$ 로부터 $F(x)=f(x)-g(x)=3x^4-8x^3-12x^2+48x-32=0$ 의 해를 구하면 된다.

$F'(x)=12(x-2)(x^2-2)$ 이므로 $x=-\sqrt{2}$ 에서 극솟값 $F(-\sqrt{2})=-32\sqrt{2}-44$, $x=\sqrt{2}$ 에서 극댓값 $F(\sqrt{2})=32\sqrt{2}-44$, $x=2$ 에서 극솟값 $F(2)=0$ 을 갖는다.

$F(-3)=175$, $F(-2)=-64$, $F(1)=-1$, $F(\sqrt{2})>0$ 이므로 구하고자 하는 정수는 $m=-2$, $n=1$ 이다.

따라서 넓이는 $\displaystyle\int_{-2}^{1}(-F(x))dx=-\frac{3}{5}x^5+2x^4+4x^3-24x^2+32x\Big|_{-2}^{1}=174-\frac{99}{5}=154+\frac{1}{5}=\frac{771}{5}$ 가 된다.

3.

$a=1$, $b=16$일 때는 함수 $f(x)=3x^4+8x^3+24x^2+36x+16$ 이며

$f'(x)=12x^3+24x^2+48x+36=12(x+1)(x^2+x+3)=0$ 이므로

$x=-1$ 에서 극값이 하나 존재하며,

$f(-1)=-1$ 이고 구간 $(-1,\infty)$ 에서는 $f'(x)>0$ 이므로 $[-1,\infty)$ 에서는 역함수 $h(x)$가 존재하고 함수 $f(x)$ 의 그래프는 점 $(-1,-1)$, $(0,16)$ 을 지난다. 따라서 $s=-1$ 이다.

$\displaystyle\int_{s}^{16}h(x)dx=\int_{-1}^{16}h(x)dx=\int_{-1}^{0}(-(f(x)+1))dx=-\left(\frac{3}{5}x^5+2x^4+8x^3+18x^2+16x+x\right)\Big|_{-1}^{0}=-\frac{28}{5}$ 이다.