확률과 통계 정답

23	③	24	①	25	②	26	④	27	⑤
28	①	29	24	30	150				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 이항계수 계산하기

다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6\mathrm{C}_r \times (x^2)^{6-r} \times 2^r = {}_6\mathrm{C}_r \times 2^r \times x^{12-2r}$
$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$
x^8의 계수는 $r=2$일 때이다.
따라서 ${}_6\mathrm{C}_2 \times 2^2 = 15 \times 4 = 60$

24. [출제의도] 독립시행의 확률 이해하기

한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 네 눈의 수의 곱이 27의 배수이려면 3의 배수의 눈이 세 번 또는 네 번 나와야 한다.
한 개의 주사위를 한 번 던질 때,
3의 배수의 눈이 나오는 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 $X\ (X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$라 하면
$\mathrm{P}(X=3) = {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$
$\mathrm{P}(X=4) = {}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$
따라서 $\frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \frac{1}{9}$

25. [출제의도] 확률분포 이해하기

주어진 확률분포에서 $a+(a+b)+b=1$
$a+b=\frac{1}{2}$ $\cdots$ ㉠
$\mathrm{E}(X^2) = a+4(a+b)+9b = a+5$
$4a+13b=5$ $\cdots$ ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$
따라서 $b-a=\frac{1}{6}$

26. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

주머니 A에서 임의로 꺼낸 1개의 공이 흰 공인 사건을 X, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공인 사건을 Y라 하자.
$\mathrm{P}(X) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X^C) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
(i) 주머니 A에서 임의로 꺼낸 공이 흰 공일 때 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은
$1-\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = 1-\frac{1}{35} = \frac{34}{35}$
(ii) 주머니 A에서 임의로 꺼낸 공이 검은 공일 때 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은
$1-\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = 1-\frac{4}{35} = \frac{31}{35}$
따라서 (i), (ii)에 의하여
$\mathrm{P}(Y) = \mathrm{P}(X\cap Y) + \mathrm{P}(X^C \cap Y)$
$= \mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X) + \mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)$
$= \frac{1}{3}\times\frac{34}{35} + \frac{2}{3}\times\frac{31}{35} = \frac{32}{35}$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

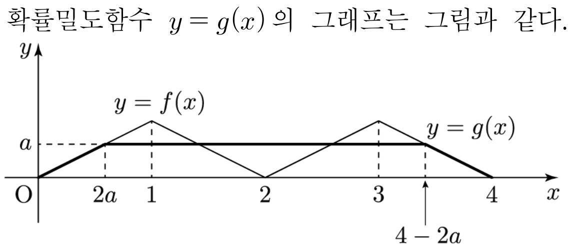
주어진 7장의 카드를 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하려면 1, 2와 2, 2는 각각 서로 이웃하지 않아야 한다.
(i) 1, 1이 서로 이웃하지 않는 경우
0, 0, 0 사이와 양 끝에 1, 1, 2, 2를 하나씩 넣는 경우의 수와 같으므로
$\frac{4!}{2!\,2!} = 6$
(ii) 1, 1이 서로 이웃하는 경우
0, 0, 0 사이와 양 끝에 1, 1을 이웃하게 넣는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$
남은 자리에 2, 2를 하나씩 넣는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$
그러므로 $4\times3=12$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $6+12=18$

28. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

$a_k \le k$를 만족시키는 자연수 $k\ (1\le k\le 5)$의 최솟값이 3인 사건을 A,
$a_1+a_2 = a_4+a_5$인 사건을 B라 하자.
$a_k \le k$를 만족시키는 자연수 $k\ (1\le k\le 5)$의 최솟값이 3이면, $a_1>1$, $a_2>2$, $a_3\le3$이다.
(I) $a_3=1$이고 $a_1>1$, $a_2>2$일 확률은
$\frac{3\times3\times2!}{5!} = \frac{3}{20}$
(II) $a_3=2$이고 $a_1>1$, $a_2>2$일 확률은
$\frac{3\times2\times2!}{5!} = \frac{1}{10}$
(III) $a_3=3$이고 $a_1>1$, $a_2>2$일 확률은
$\frac{2\times2\times2!}{5!} = \frac{1}{15}$
(I), (II), (III)에 의하여
$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} = \frac{9+6+4}{60} = \frac{19}{60}$
$a_1+a_2=a_4+a_5$이면
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$에서
$a_3 = 15-2(a_1+a_2) = 2\{7-(a_1+a_2)\}+1$
이므로 a_3의 값은 홀수이다.
(i) $a_3=1$인 경우
$a_1+a_2=7$이므로 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$는
$(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$
(ii) $a_3=3$인 경우
$a_1+a_2=6$이므로 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$는 $(2,\ 4)$
(i), (ii)에 의하여
$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{(3+1)\times2!}{5!} = \frac{1}{15}$
따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{19}{60}} = \frac{4}{19}$

29. [출제의도] 연속확률변수의 확률밀도함수를 활용하여 추론하기

$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0$이므로
$g(x)=f(x)$ 또는 $g(x)=a$
조건 (가)와 (나)에 의하여
확률밀도함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\mathrm{P}(0\le Y\le4)=1$이므로
$\frac{1}{2}\times2a\times a+(4-4a)\times a+\frac{1}{2}\times2a\times a=1$
$2a^2-4a+1=0$, $a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$
$0<a<\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $1<5a<2$
$\mathrm{P}(0\le Y\le 5a)$
$=\mathrm{P}(0\le Y\le 2a)+\mathrm{P}(2a\le Y\le 5a)$
$=\frac{1}{2}\times2a\times a+3a\times a=4a^2$
$=4\times\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 6-4\sqrt{2}$
따라서 $p=6$, $q=4$이므로 $p\times q=24$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 순서쌍 $(f(1),\ f(7))$은
$(1,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 7)$
조건 (나)에 의하여 $f(1)\le f(3)\le f(5)\le f(7)$
이고 $f(2)\le f(4)\le f(6)$
조건 (다)에 의하여 $|f(2)-f(1)|$과
$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)$의 값은
모두 3의 배수인 자연수이다.
(i) $f(1)=1$, $f(7)=4$인 경우
$f(3)+f(5)=4$ 또는 $f(3)+f(5)=7$
순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는
$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 4)$
$f(1)=1$이므로 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=7$
$f(2)=4$이면
순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_2$,
$f(2)=7$이면
순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$
${}_4\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=10+1=11$
그러므로 $3\times11=33$
(ii) $f(1)=2$, $f(7)=5$인 경우
$f(3)+f(5)=5$ 또는 $f(3)+f(5)=8$
순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는
$(2,\ 3)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$
$f(1)=2$이므로 $f(2)=5$
순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$
그러므로 $3\times6=18$
(iii) $f(1)=3$, $f(7)=6$인 경우
$f(3)+f(5)=6$ 또는 $f(3)+f(5)=9$
또는 $f(3)+f(5)=12$
순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는
$(3,\ 3)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 5)$, $(6,\ 6)$
$f(1)=3$이므로 $f(2)=6$
순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2=3$
그러므로 $4\times3=12$
(iv) $f(1)=4$, $f(7)=7$인 경우
$f(3)+f(5)=10$ 또는 $f(3)+f(5)=13$
순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는
$(4,\ 6)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 7)$
$f(1)=4$이므로 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=7$
$f(2)=1$이면
순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_7\mathrm{H}_2$
$f(2)=7$이면
순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$
${}_7\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=28+1=29$
그러므로 $3\times29=87$
따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여
$33+18+12+87=150$