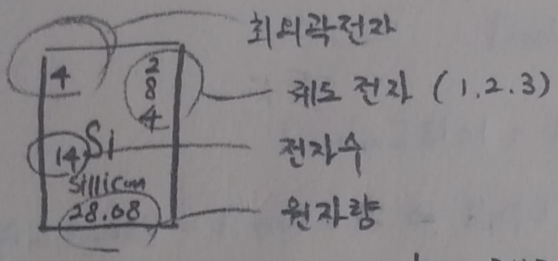
<물리전자공학> 과제3   20.11.08   20190863 차범수.

1번: 중요 용어 정리.

2번: plank 법칙, 광양자 이론, Compton 효과, 광전효과, 물질파,
Davisson - Germer 실험.

1.6 원자 및 고체의 전자 구조.

원자의 구성: $\underbrace{\text{전자, 중성자, 양성자}}_{\text{핵}}$.



원자 번호 Z = 양성자수 = 전자수

원자량 번호 $M = Z + N$ (중성자수)

보어의 원자 모형 – 원자의 궤도에 일정수의 전자가 존재.

		질량	전하량
전자	e	$m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg $= 5.5 \times 10^{-4}$ amu	-1.6×10^{-19} C
양성자	p	$M \fallingdotseq 1.6 \times 10^{-27}$ kg $= 1$ amu	1.6×10^{-19} C
중성자	n	동일.	0

전하량이 기준이 되는 전자

질량이 기준이 되는 중. 양성자.

박테리아 10^{-6} kg

1.6.1 소립자

○ 음극선의 발견 1879

크룩스 ; 기체 방전 튜브 → 음극으로부터 입자의 흐름 발생 : 음극선 (CRT)

○ 양극선 발견 1886

골드 스타인

○ H 이온 (양성자)

러더퍼드.

○ 전자 명명 1879

스토니 : 음극선의 기본 단위 : 전자. electron

○ 전자의 비전하 측정 1897

톰슨 ; 많은 기체와 다양한 전극에서 일정한 비전하를 관찰

전자는 모든 물질에 존재함을 규정

전계 E, 자속밀도 B $\longrightarrow$ 비전하 $\frac{e}{m}$

로렌츠 힘 $F = e(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) = eE - evB$

$\boxed{E = vB}$ ∴ 힘의 균형

→ 전자의 운동에너지

$$eV = \frac{1}{2}mv^2$$

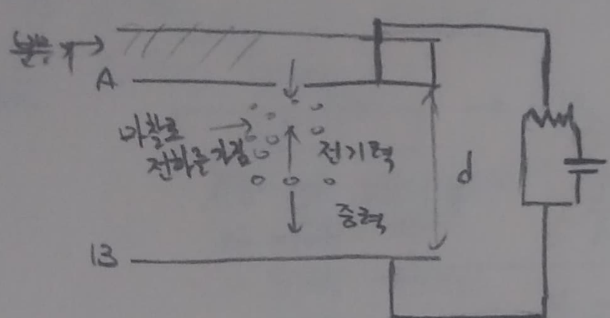
→ 전자의 속도 $v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ $\quad E = \sqrt{\frac{2eV}{m}}\,B$

$$\Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} = 1.759 \times 10^{11}\ [C/kg] \text{ 일정}$$

$[q/m]$

- 전자의 전하량 측정 1909

밀리컨 : 기름방울 실험 →



(전기력 = 중력)

전기력 $F(e) = eE = eV/d\ [N]$

중력 $F(g) = mg\ [N]$

전하량 $e = 1.6 \times 10^{-19}\ [C]$

비전하 $\frac{e}{m} = 1.759 \times 10^{11}\ [C/kg]$

밀리컨의 전하량

$e = 1.6 \times 10^{-19}\ [C]$

전자의 질량

$m = 9.1 \times 10^{-31}\ [kg]$

- 중성자의 발견 1932

채드윅 : α입자를 대상에 투사하여 양성자와 질량이 같고 중성이며, 투과력이 매우 강한 방사성 소립자 : 중성자.

1.6.2

양자론은 실험적 관찰로부터 발전.

→ 빛의 입자성, 파동성 (이중성)

☆ ○ 광자, planck 법칙

e : 전하량의 기본 값

h : 광의 기본에너지

프랑크 (M.plank) → 불연속적 값을 갖는 양자 : 광자

광자에너지 : $h\nu$ 하나. ($h = 6.63 \times 10^{-34}$ [Js] , ν : 광의 주파수) → 주파수 값을 가지는 입자

(에너지 양자의 크기) 에너지. ↳ 프랑크 상수

$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi\nu$

1개의 photon의 에너지

$2\pi f$ 주파수 성분.

ω : 각주파수

각주파수를 만들기 위해 h를 2π로 나눈다.

$1J = 1kg \cdot 1m$

→ $1J = 10^{34} \cdot 1s$

: 1초 동안 10^{34}개의 에너지 양자들이 나옴.

정리

$\Rightarrow E = h\nu = \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi\nu$

$= \hbar\omega$ → 선적분할 경우 $\hbar$로 사용

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$

[A] $I = \frac{dq}{dt}$ $1C = 6.25 \times 10^{18}$ 개 / 1초

photon.

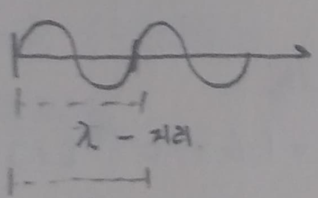
☆ ○ 광양자이론

☆ $E = h\nu = \hbar\omega = mc^2$, ☆ $c = \lambda \cdot \nu$

○ ☆ $p = mv = mc = \frac{E}{c} = \frac{E}{\lambda \cdot \nu} = \frac{h\nu}{\lambda\nu} = \frac{h}{\lambda}$: 물리량을 가진 광자. 에너지, 속도

$v = \frac{x}{t} = \frac{거}{시}$ $\frac{1}{시간} = \nu$

공이 파동을 가지고 진행



λ - 거리

T - 시간

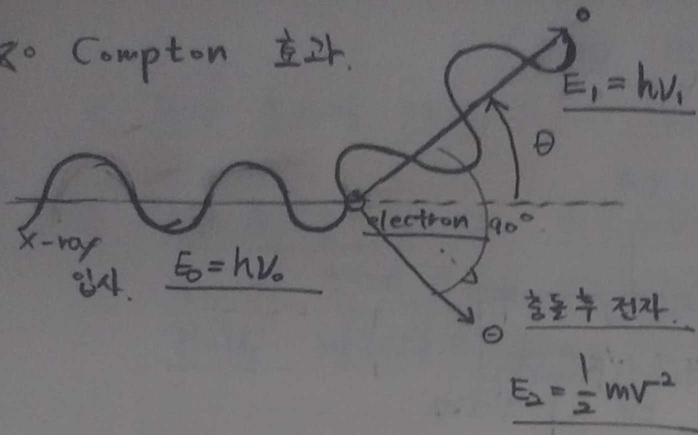
속도 $= \frac{\lambda}{T}$ → 거리 → 시간

$\frac{1}{T} = f = \nu$

C 속도 $= \lambda\nu$ (λf)

광의 속도

☆ Compton 효과



◦ 광의 입자성을 주장한 아인슈타인의 광양자 이론은 Compton에 의해 증명.

☆ 충돌전·후의 운동량

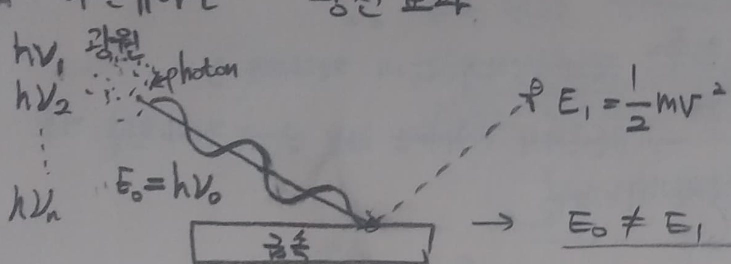
→ $E_0 = E_1 + E_2$; 탄성 충돌 ◦ 충돌 후 손실된 에너지는 전자가 가진 운동 에너지와 같다

⇒ $h\nu_0 = h_1\nu + \frac{1}{2}mv^2$

◦ $\Delta E = E_0 - E_1$ 만큼의 에너지는 파장의 변화로 나타나며 Compton은 이 파장의 변화를 측정.

☆ ◦ 아인슈타인 광전 효과

◦ 광반사
◦ 광흡수
◦ 복사열



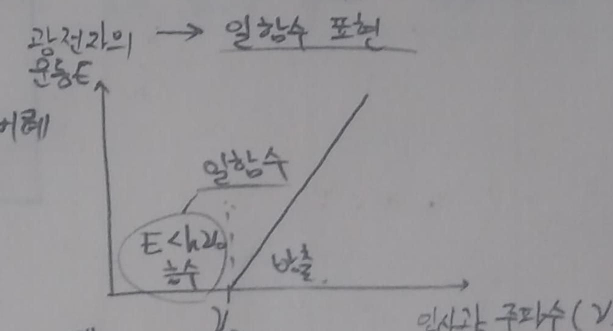
→ $E_0 \neq E_1$; 에너지 손실 발생 (금속에 어떤 일을 해주었을 것이다)

photon에 의해 전자가 튀겨 나간다

◦ 그 전자의 에너지는 입사하는 photon의 에너지에 비례

$E_0 = h\nu_0 \rightarrow E_1 = \frac{1}{2}mv^2$

금속(소재)에 달라지는 일정량의
광전자의 → 일함수 표현



< 광의 에너지 >는..

(O) ① photon 하나의 에너지 → 입사광 photon의 에너지 1개 $E_0 = h\nu_0$

or

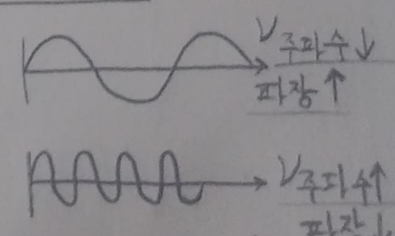
(×) ② photon 의 개수 → 광의 밝기 결정 (럭스, 칸델라 등)

☆ 전자하나의 에너지는 photon 하나의 에너지에 의해 결정 (입사하는 광의 파장에 따라)

◦ 단색광(진동수 유일)이 진공 중에 놓인 금속판의 표면에 입사되면 금속 내의 전자는 광에너지를 흡수하여 진공으로 튀어나오는 현상 (emission)

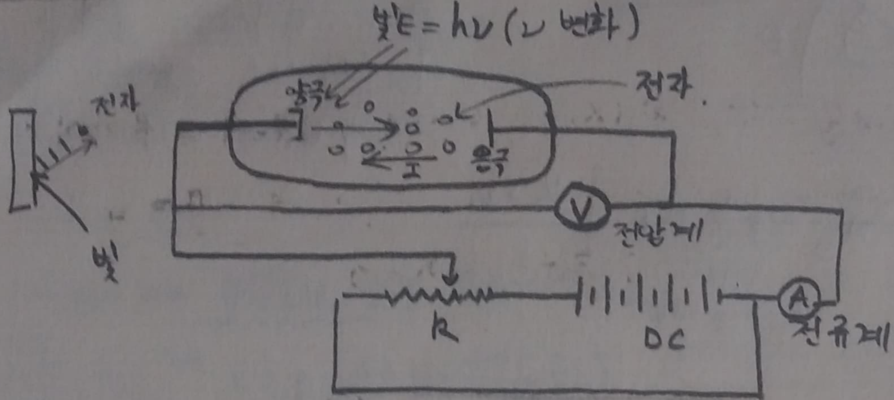
→ 광전자 발생 photo electron

상수, $C = \lambda \cdot \nu$
① ↓ ↑
② ↑ ↓

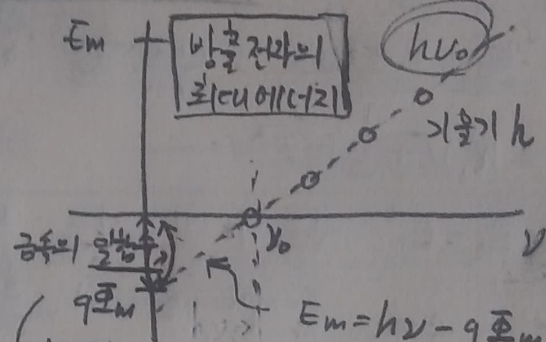


$h \cdot \nu_0$ 고유 진동수 이상일 경우에 전자방출.

(아인슈타인의 광전효과 실험과 빛의 입자성)



$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{방출에너지} = E_m = \underbrace{h\nu}_{입사광} - \underbrace{q\Phi_m}_{일함수}$$



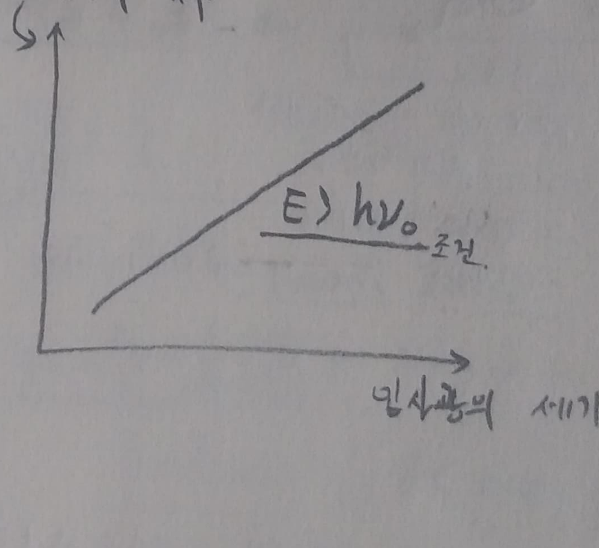
$J = \Sigma QNV$

전위에너지

$E = Q \cdot V$

$= q\Phi_m$ 금속의 일함수 값에 전하량을 곱.

→ 금속안에서 해줘야만 하는 일 → 전자 방출 가능



< 광전 효과의 성질 >

① 광전 효과를 일으키는 최저 진동수가 있으며, 금속의 고유값이다.
즉, 이 한계 주파수 이상의 진동수인 광만이 금속 표면에서
전자를 방출시킬수 있으며 이 최소한의 에너지는 $h\nu_0$ (일함수) 이다.
$= q\phi_w$

② 방출된 전자의 운동에너지는 입사광의 진동수 (주파수)가 클수록 커지며,
빛의 세기와는 관계없다. $E_0 = h\nu_0 \rightarrow E_1 = \frac{1}{2}mv^2$
$(E > h\nu_0)$

단, 빛의 세기는 금속의 일함수보다 큰 에너지를 가지는 전제하에
방출되는 전자의 양에 비례한다.

∴ 금속 내의 전자가 광자와 충돌하여 $h\nu$ 인 에너지를
얻어 금속의 일함수 ($h\nu_0 = e\Phi_m$)을 뛰어넘어
외부로 나오면 광전자의 운동에너지는

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_m = h\nu - q\Phi_m$$ 이며,

에너지 보존 법칙을 통해 원리적으로 이해 가능

$$E = h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + q\Phi_w$$

☆ 물질파.

- 드 브로이의 물질파는 빛의 이중성을 표현

→ 움직이는 입자는 고유한 파장 (λ)을 가진다. ☆

- $E = h\nu = mc^2$

, $c = \lambda\nu$, $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$E = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = mc^2 \longrightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda} = mc^2$

plank. Einstein

(질량 m) $\frac{h}{\lambda} = mc$

(입자성) 운동량 → $p = \frac{h}{\lambda} = mc = mv$

광 → 입자라면 속도를 가진다

드 브로이
- 파장 $\lambda = h\frac{c}{E} = h\frac{c}{mc^2} = \frac{h}{mc} = \frac{h}{p}$ ⟶ ☆ 움직이는 입자는 고유한 파장 λ를 가진다

v

질량 m인 입자가 속도 v로 운동할 때

드 브로이 파장은

$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{mv}$; $m \left(= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)$

정지질량.

예제 1) 질량 : 46g 속력 : 30 m/s 골프공 → 드 브로이 파장?

주의!

단위 변환

$v \ll c$ $m = m_0$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \, [Js] \, (m^2 s / s^2)}{0.046\,kg \cdot 30\,m/s}$$

☆ $J = [F \cdot m]$

$ma \rightarrow (kg \cdot m/s^2) \cdot m$

$= \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

☆☆☆ 단위 표시

☆ $Js = kg\,m^2 s / s^2$

$$\frac{\frac{kg\,m^2 s}{s^2}}{\frac{kg \cdot m}{s}} = m$$

$= 4.8 \times 10^{-34} \, [m]$

예제 2) 속력이 10^7 m/s 인 전자의 드 브로이 파장은?

$v \ll c$ (광속) $m = m_0 = 9.1 \times 10^{-31}$ kg

\# 전자의 정지 질량

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 10^7} \frac{\cancel{\mathrm{kg}}\, m^2 s / s^2}{\cancel{\mathrm{kg}}\, \cancel{m/s}}$$

$$= 7.3 \times 10^{-11}\ [\mathrm{m}]$$

Js → $J = F \cdot m = ma \cdot m$

$= \mathrm{kg} \cdot (m/s^2) \cdot m$

$= \mathrm{kg}\, m^2/s^2$

$\mathrm{Js} = \mathrm{kg}\, m^2 s / s^2$

$= \mathrm{kg}\, m^2/s$

※ 이 값은 원자의 크기와 비슷함

(수소 원자의 반지름 5.3×10^{-11} m)

→ 원자의 구조와 운동을 파악하기 위해

전자의 파동성이 중요함.

10^{-10} [m] = 1 [Å]

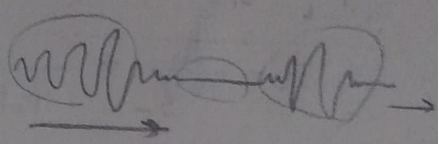
0.7 [Å] ≈ 1 [Å]

(드 브로이 파의 속력)

- 위상속도 -

$w = \lambda \cdot \nu$

$\lambda = \frac{h}{mv}$ ——— ①



군속도

↕

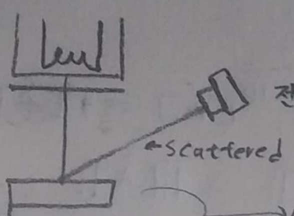
$h\nu = mc^2 = E$, $\nu = \frac{mc^2}{h}$ --- ②

$\Rightarrow w = \lambda\nu = \frac{h}{mv} \cdot \frac{mc^2}{h} = \frac{c^2}{v} = \frac{c}{v} \cdot c$ ← 위상속도

◦ w는 위상속도이며 물리적 의미를 가지지 않는다
드 브로이 파의 군속도는 v이다

☆ (Davisson - Germer 의 드 브로이파 증명)

금속 → 전자 방출 방법 ① 광전효과
② 열전자
③ 2차 전자



일정한 각을 가지고 반사가 일어난다 ?
→ 전자들이 회절을 한다
입자회절 (Diffraction) : 회절은 뉴턴의 입자 운동과 전혀 관련이 없다
⇒ 드 브로이 파가 입자성을 가진다

◦ 증명 실험에서 ① 입사각과 산란각은 Bragg에 대해 65°의 각을 일정하게 가지며 Bragg 면의 간격은 0.91 Å이다

Bragg 공식. $n\lambda = 2d\sin\theta$

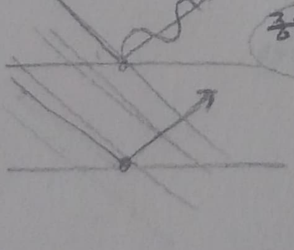
$n=1$ 가장 반사가 많음

$\lambda = 2 \times 0.091\ nm \times \sin 65°$

$= 0.165\ nm$

$= 1.65\ Å$

0.91 Å
$= 0.91 \times 10^{-10}\ m$
$= 0.091 \times 10^{-9}\ m$



중첩되는 파 = 밝기 ↑

→ 파장의 특성을 가지고 있다는 것을 증명해야 한다

증명 실험 ②.

54eV의 에너지는 전자의 정지에너지 $m_0c^2 = 5\times10^5$ eV에 비해 무시할 수 있으므로 상대론적 고찰은 필요없다.

→ 전자의 운동 에너지 K는 $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$2K = \frac{(\overset{p}{mv})^2}{m} \quad // p = mc = mv$$

$$mv = \sqrt{2Km}$$

$$= [\underbrace{2}\times\underbrace{9.1\times10^{-31}kg}_{m}\times\underbrace{54eV\times1.6\times10^{-19}J/eV}_{K}]^{\frac{1}{2}}$$

J로 변환

$$= 4.0\times10^{-24}\ kg\cdot m/s$$

$$\frac{kg\ m^2/s^2}{kg\,m/s}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}\ J\cdot s}{4.0\times10^{-24}\ kg\cdot m/s} = 0.166\ nm = 1.66\ \mathring{A}$$

실제 관측치 1.65 Å과 거의 일치함

⇒ 물질파는 물질에 대한 드브로이파 이론이 실을 잘 증명함.

전자의 정지질량: m_e

정지에너지

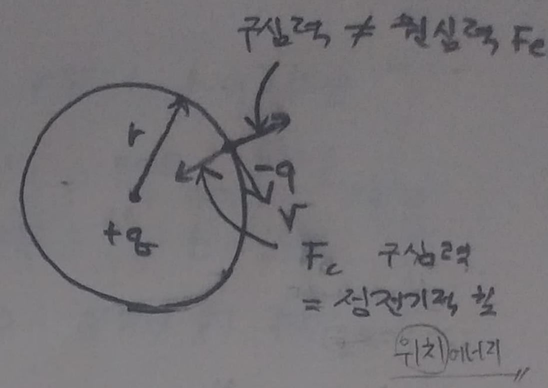
$$m_ec^2 = 9.1\times10^{-31}kg\times(3\times10^8 m/s)^2$$
$$= 9.1\times10^{-31}kg\times9\times10^{16}m^2/s^2$$
$$= 81.9\times10^{15}\ kg\cdot m^2/s^2$$
$$= 8.19\times10^{14}J$$

$$\Rightarrow 8.19\times10^{14}\cancel{J}\times\frac{1eV}{1.6\times10^{-19}\cancel{J}}$$ → eV로 변환

$$= 5\times10^5\ eV$$

전자의 정지 에너지

(보어모델의 증명)



① n 번째 궤도 반경. r_n

→ 안정된 궤도 운동에 대해 $F_e = F_c$ 이므로

방향

$$\underbrace{-\frac{q^2}{k r_n^2}}_{\text{정전기적 힘}} = \underbrace{-\frac{m v^2}{r_n}}_{\text{구심력.}} \qquad (1.7)$$

궤도운동 전자의 각운동량. $P_\theta = m v r_n = n\hbar$ (1.8)

식(1.7)에 $m^2 v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{r_n}$, $m v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m r_n^2}$ 을 대입.

$$\frac{q^2}{k r_n^2} = \frac{n^2\hbar^2}{m r_n^3}$$

$k = 4\pi\varepsilon_0 = 4\pi \times 8.854\times10^{-12}$ F/m

따라서 궤도 반경 $r_n = \frac{k n^2 \hbar^2}{m q^2} = \frac{4\pi\times 8.854\times10^{-12} \times \left(\frac{6.63\times10^{-34}}{2\pi}\right)^2 Js^2}{(9.1\times10^{-31})kg \times (1.6\times10^{-19})^2 C^2} \cdot n^2$

F/m.

$= \left[\frac{F/m \cdot Js}{kg\cdot C^2}\right] = \left[\frac{\frac{A^2}{kg\, m^3}\cdot\frac{kg^2\, m^4}{s^2}}{\frac{kg\cdot A^2}{s^2}}\right] = [m]$

$= 5.18 \times 10^{-9}\, n^2$ m

$= 0.518\times10^{-10}\, n^2$ m

$= 0.518\, n^2$ Å

F (farad) = $s^4 A^2 m^{-2} kg^{-1}$

1C (columb) = A/s

J = F·m = m a·m

= kg·m/s²·m

$\boxed{= kg\, m^2/s^2}$

Js = kg·m²/s

$(Js)^2 = kg^2\, m^4/s^2$

F/m = C²/N·m²

$= \frac{A^2/s^2}{\frac{kg\, m}{s^2} m^2} = \frac{A^2/s^2}{kg\, m^3/s^2}$

$= A^2/kg\cdot m^3$

② n번째 궤도운동 전자의 총에너지 E_n

운동에너지 (K.E.) $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{n^2\hbar^2}{mr_n^2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2\hbar^2}{m}\right)\frac{m^2q^4}{k^2n^2\hbar^4} = \frac{mq^4}{2k^2n^2\hbar^2}$

$p_\theta = mvr_n = n\hbar$

$(mv)^2 = \frac{(n\hbar)^2}{r_n^2}$

$v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r_n^2}$

$r_n = \frac{kn^2\hbar^2}{mq^2}$

포텐셜 에너지 (P.E.) : 힘 × 거리 $= (F_e \times r_n)$

$= -\frac{q^2}{kr_n} = -\frac{mq^4}{k^2n^2\hbar^2}$

총에너지 (T.E) $= E_n =$ (K.E.) + (P.E.)

$1\,eV = 1.602 \times 10^{-19}\,J$ $(kg\,m^2s^{-2})$

$= -\frac{mq^4}{2k^2n^2\hbar^2} = -13.6\frac{1}{n^2}\,[eV]$

$1\,J = 6.24 \times 10^{18}\,eV$

$(kg\ C^4)$

단위. $\frac{\frac{kg \cdot A^4}{s^4 \cdot s^?}}{\frac{A^4}{kg^2 m^6} \cdot n^2 \cdot \frac{kg^2 m^4}{s^2}} = \frac{\frac{kg}{s^2}}{\frac{n^2}{m^2}} = \frac{kg \cdot m^2 s^{-2}}{n^2}$ J

$(F/m)^{-1}$ $(Js)^2$

$= \boxed{상수}\ \frac{1}{n^2}\,J$

to eV?

CV

$= A/s \cdot kg\,m^2s^{-3}A^{-1}$

$\frac{A}{s} \cdot \frac{kg}{s^3} \cdot \frac{1}{A}\,m^2$

$= \frac{kg}{s^4}\,m^2$

$= kg\,m^2s^{-2}$

$= J$

③ 두 궤도 사이를 천이할 때 발생될 수 있는 빛의 주파수 ν_{21}

n_2로부터 n_1으로의 천이 에너지와 천이 주파수는 다음과 같다.

$E_{n2} - E_{n1} = \frac{mq^4}{2k^2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = 13.6\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)\,[eV]$

$\nu_{21} = \frac{E_{n2} - E_{n1}}{h} = \left[\frac{mq^4}{2k^2\hbar^2 h}\right]\left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right]$

궤도 반경 $r_n = 0.518\,Å$

전자의 총에너지 $E_n = -13.58\frac{1}{n^2}\,[eV]$

- 따라서 양자수 증가에 따라 궤도 사이의 간격은 n^2에 비례하여 궤도 간격이 점차 커진다
- 반면에 그에 해당하는 에너지 차이는 $\frac{1}{n^2}$에 비례하여 점차 감소한다

1.7 양자역학의 기초.

양자역학의 발전 (1920~)

- 하이젠베르크 '행렬 접근법' (행렬 역학) → 귀납적
- 슈뢰딩거 '파동 역학' (덜 수학적) → 연역적

1.7.1

- 하이젠베르크 불확실성 원리.

☆ 운동하는 입자의 위치와 운동량을 동시에 측정할 경우의 불확실한 관계.

$$\boxed{\begin{array}{c} \underset{\text{위치}}{\Delta x}\,\underset{\text{운동량}}{\Delta p} \geq \hbar \quad \hbar\text{의 값보다 크다.} \\ \dfrac{h}{2\pi} = \dfrac{6.63\times10^{-34}\,[J\cdot s]}{2\pi} = 1.06\times10^{-34}\,[Js] \end{array}}$$

Kg m²/s

☆

$\Delta x \downarrow \rightarrow \Delta p \uparrow \quad \geq \hbar \left(=\frac{\hbar}{2}\right)$

$\Delta p \downarrow \rightarrow \Delta x \uparrow \quad \geq \hbar$

동시에 측정하기 매우 어렵다 (파동성)

- 일정 속도 v를 갖는 입자에 대해 불확실 정도를 표현하면,

$$\Delta p \Delta x = \Delta p v \Delta t \rightarrow \left(v = \frac{\Delta x}{\Delta t},\ \Delta x = v\Delta t\right)$$

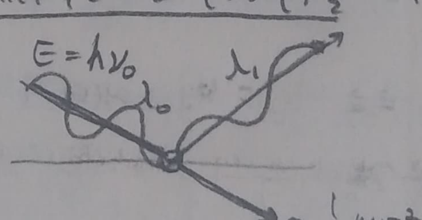
이때 $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ $(mv)^2$, $\frac{dE}{dp} = \frac{p}{m}$, $\Delta E = \frac{1}{m}p\Delta p = v\Delta p$ (mv)

$\Delta E = v\Delta p = \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta p$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \quad \left(\frac{\hbar}{2}\right)$$

$\Delta E \Delta t = \Delta x \Delta p \geq \hbar$

☆ 즉, 한정된 시간 동안 입자의 에너지 (또는 주파수)를 측정할 때 정확도에 제한이 있다



- $\Delta \nu = \frac{1}{\Delta t}$, $\Delta E = h\Delta\nu = \frac{h}{\Delta t}$, $\Delta t \Delta E = h$

$$\Rightarrow \Delta t \Delta E \geq \hbar \left(\Rightarrow \frac{\hbar}{2}\right)$$

불확실성 원리 - 파동성에 기초 (드 브로이 파)
De Broglie

1927 하이젠베르크

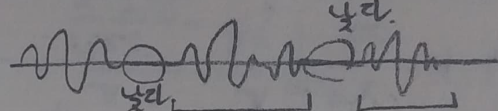
우리는 현재를 모르기에 미래도 알 수 없다

→ 움직이는 입자를 파동으로 생각하는 것은 위치나 운동량과 같은 입자성을 나타내는 물리량을 측정하는데 그 정확성에 원리적 한계 존재

$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

cf + 파군 (wave packet) : 진동수가 약간 다른 두 음파가 동시에 발생되면 진폭이 주기적으로 변한다 → 맥놀이 현상

㉠ ① λ
② $p = mv$

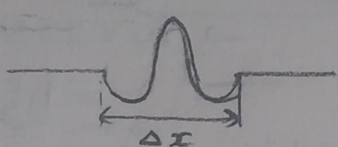


전자가 존재할 확률이 높다

wave packet을 통한 이해

Δx

1) 파군이 좁을 수록 입자의 위치는 정확히 정의할수 있다. ○
파군이 좁을수록 파의 파장은 명확히 정의할수 없다 X



Δx : small
Δp : large

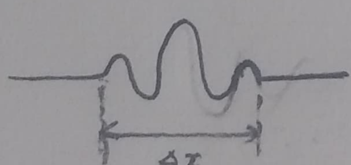
$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

부정확.

→ 운동량이 부정확.

2) 파군이 넓을수록 입자의 위치는 정확히 정의할수 없다 X
파군이 넓을수록 파의 파장은 정확히 정의된다 ○



Δx : large
Δp : small

$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
Δx ≥ Δp가 일정량의 오차를 가진다

$\lambda = \frac{h}{mv} (=p)$

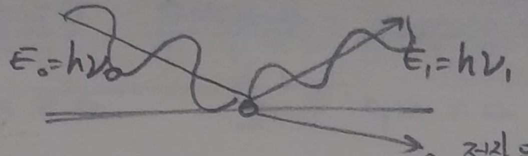
정확

→ 운동량이 정확.

불확정성 원리 2 - 입자성에 기초 (compton 효과)

- 어느 순간 어떤 물체의 위치와 운동량을 측정할 때는 물체에 어떤 작용을 가함 (ex) compton 효과).

전자의 위치와 운동량. 측정



⊖ 전자의 최종운동량

$E = \frac{1}{2}mv^2$

2π안에 주기가 몇개?

cf. ◦ 각주파수 $\omega = 2\pi\nu \left(= 2\pi \cdot \frac{1}{T}\right)$

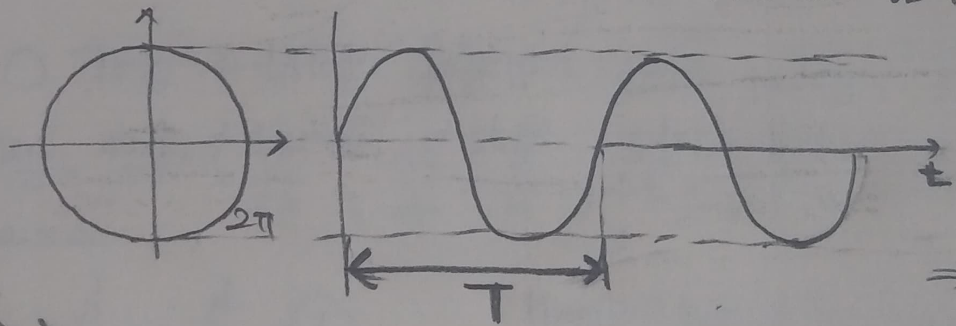
◦ 파수 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{v}{\nu}} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{\omega}{v}$

$\omega = 1 \rightarrow \frac{1}{v}$ radian/m

$c = \lambda\nu$ [m/s]

$\nu = f = \frac{1}{T}$

파수의 단위. [radian/m] 입자가 1m 진행할 때 변화하는 radian 값의 변화량.



한 주기
$T = 2\pi$
$\Rightarrow \omega = 2\pi\nu$
$= 1$ [radian/s]

◦ 각주파수 ω의 단위 [radian/s]

⇒ 입자가 1초 진행할 때 변화하는 radian 값의 변화량.

문제: 양성자의 위치가 ±10^{-11} m 정확도 일 때 (측정됨) 1초후 양성자의
±0.1 Å
유치의 불확정성은? ($v \ll c$)

Sol) 양성자 ±0.1 Å → $\Delta x \downarrow$ $\Delta p \uparrow$ — 운동량의 부정확?
$p = mv$
$= m\Delta v$ 속도의 부정확으로 이어짐
→ 1초후 위치에 큰 오차가 발생

t=0. 위치의 불확정성 Δx_0.

$$\Delta x_0 \Delta p \ge \frac{\hbar}{2}, \xrightarrow{\text{이항}} \Delta p \ge \frac{\hbar}{2\Delta x_0}, \quad \Delta p = \Delta(mv) = m\Delta v$$

대입

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m_0} \quad ; \quad \Delta p \ge \frac{\hbar}{2\Delta x_0}$$

$$\hookrightarrow \Delta v \ge \frac{\hbar}{2m_0 \Delta x_0}, \quad \Delta v = \frac{\Delta x}{t} \rightarrow \Delta x = \Delta v\, t$$

Δx_0: 10^{-11} m, 속력, 위치 (거리?), 시간

$$\frac{\Delta x}{t} \ge \frac{\hbar}{2m_0 \Delta x_0}$$

$$\boxed{\Delta x \ge \frac{\hbar t}{2m_0 \Delta x_0}}$$

F.m
m.a m
kg m/s^2 . m
kg m^2/s

$$\Rightarrow \Delta x \ge \frac{\hbar t}{2m_0 \Delta x_0} = \frac{1.054 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} \cdot 1\text{s}}{2 \cdot (1.672 \times 10^{-21}\ \text{kg})(10^{-11}\ \text{m})}$$

$$= 3.15 \times 10^3 \cdot \frac{(\cancel{\text{kg}}\ \text{m}^{\cancel{2}}/\cancel{\text{s}^2}) \cdot \cancel{\text{s}} \cdot \cancel{\text{s}}}{\cancel{\text{kg}} \cdot \cancel{\text{m}}}$$

$$= 3.15 \times 10^3\ \text{m}$$

$$= 3.15\ \text{km}$$

Δx.

→ 불확정성은 3.15 km, 처음의 파동이 작았기 때문에
1초후 위치의 불확정성은 급격히으로 커짐

(입자의 미래)

고전역학: 입자의 초기 위치와 운동량이 주어지면 입자의 미래가 결정됨
(과거)
양자역학: 입자의 초기 상태가 불분명하므로 (〃) 입자의 미래도 불분명함.

수소 원자의 반지름이 5.3×10^{-11} m 가 아니고
가장 발견하기 쉬운 값이 5.3×10^{-11} m 라는 것이다.

1.7.2. 확률밀도 함수

∘ 단위체적에서 한 입자를 발견할 수 있는 확률

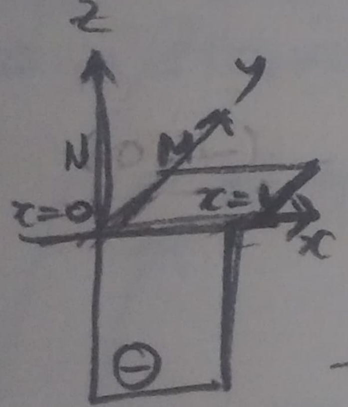
(변의길이)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1 \qquad p(x):\ \text{확률밀도함수}$$

if) 입자가 갖는 물리량 $f(x)$ $(-\infty, \infty)$

$$\rightarrow \text{평균값(기대값)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,p(x)\,dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,p(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx}$$

if)



$$\iiint_{z\,y\,x} p(x)\,dx\,dy\,dz = 1$$

☆ 슈뢰딩거 파동방정식

① 물리학적 공간의 입자는 파동함수 $\psi(x, y, z, t)$로 표현

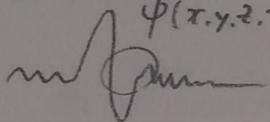
ψ와 일차 도함수 ψ'은 연속, 유한, 단일 값이다

↳ 미분가능한 값을 가진다.

② 입자가 갖는 물리량인 에너지, 운동량 E, p는 추상적 양자역학 매개변수와 관련된다. ∇는 3차원 미분연산자 그래디언트.

operators 연산자

$\psi(x, y, z, t)$ 파동함수



$$\psi(x.y.z.t) \quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hookrightarrow \Delta V \rightarrow \Delta p$$

위치와 시간 → 속도 → 운동량

표1.8

고전적 변수	역학적 매개변수 연산자
$x, f(x)$	$x, f(x)$
$p(x)$	$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $-i\hbar\nabla$
E	$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $i\hbar\nabla_t$

③ 미소체적소 dv에서 파동함수 $\psi(x, y, z, t)$의 입자를 발견할 확률

$\psi^*\psi\, dx\,dy\,dz$로 $\psi^*\psi$는 확률밀도 함수로 정규화된다

표준화

켤레복소수

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi\, \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dv} = 1, \quad \psi^*\psi = |\psi|^2 \text{ 이다}$$

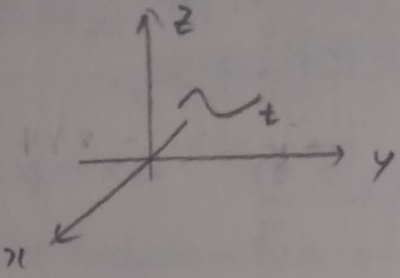
∘ 임의의 변수 Q의 평균값 $\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* Q_{op}\, dx\,dy\,dz$

☆ 파동함수 ψ

- 물리적으로 어떤 의미도 가지지 않지만 (ex) 물질파),
  특정한 장소에서 특정시간에 계산한 그 절대크기의 곱 $\psi\psi^* = |\psi|^2$
  그 순간 그 곳에서 입자를 발견할 확률에 비례한다

⇒ 입자의 운동량, 각운동량, 에너지 등은 ψ로 부터 알 수 있는 양이다

$\psi(x, y, z, t)$



- 정규화 ($|\psi|^2 = \psi\psi^*$) : ψ가 확률밀도 함수 p와 동일하다는 전제 하에

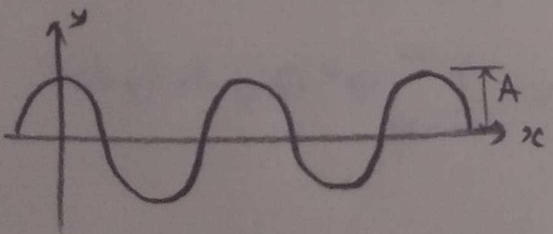
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dV = 1$$; 모든 시간에 입자는 공간어디에선가 존재

☆ 양자역학에서 정규화가 가장 기본이 된다.

- 주어진 영역에서 입자를 발견할 확률 p (x_1, x_2)

$$p = \int_{x_1}^{x_2} |\psi|^2 \, dx$$

- 팽팽한 현의 예.



$$y = A\cos\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$ (+ ; 방향 $-x$, − ; 방향 $+x$)

- 자유입자에 대해, 단일진폭 A, 단일 각진동수 ω, 진행 방향 $+x$

$$y = Ae^{-j\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - jA\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

(오일러 공식)

- ◦(슈뢰딩거 파동 방정식)

양자역학에서 파동함수 ψ가 일반적인 파동운동의 변수 y에 해당한다면

$$\psi = Ae^{-j\omega(t-\frac{x}{v})}$$: + 방향

$\omega = 2\pi\nu$, $v = \lambda\nu$

① $\psi = Ae^{-j2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})}$

↑ 고전역학

↓ 양자역학

$E = h\nu = 2\pi\hbar\nu$, $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$ ※ De Brosile 물결파

※ plank 상수.

② $\psi = Ae^{-\frac{j}{\hbar}(Et - px)}$

→ ②식을 x로 편미분을 두 번 하면

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \quad ①$$

t로 미분하면

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -j\frac{E}{\hbar}\psi \quad ②$$

→ 광속에 비해 작은 속도로 운동하는 입자의 총 에너지는.

$$E_{total} = E_k + E_p$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad ③$$

→ 양변에 ψ를 곱하면

$$E\psi = \frac{p^2\psi}{2m} + V\psi \quad ④$$

식 ①, ② 에서

$$\boxed{E\psi = \frac{p^2\psi}{2m} + V\psi} \Leftarrow \quad E\psi = -\frac{\hbar}{j}\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad ⑤ \leftarrow ①$$

$$p^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad ⑥ \leftarrow ②$$

식 ⑤. ⑥을 ④에 대입.

$$j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

☆ 1 차원에서 $\psi(x,t)$인 슈뢰딩거 파동 방정식

$$☆ \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \text{ //}$$

time - dependant S.W.

☆ 3 차원. $\psi(x, y, z, t)$ 슈뢰딩거 파동방정식

표1.8

$$\underbrace{j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}_{E} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right.}_{P} + \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V\psi$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \to \nabla^2 \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to \nabla_t$$

$$☆ \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\nabla_t\psi \text{ //}$$

◦ (시독립 파동방정식)

$$\psi = Ae^{-\frac{j}{\hbar}(Et - px)} = Ae^{-j\frac{E}{\hbar}t} \cdot \underbrace{e^{+j\frac{p}{\hbar}x}}_{\phi} = \phi e^{-j\frac{E}{\hbar}t}$$

$$E\phi e^{-j\frac{E}{\hbar}t} = -\frac{\hbar^2}{2m}e^{-j\frac{E}{\hbar}t}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + V\phi e^{-j\frac{E}{\hbar}t}$$

$$\leftarrow j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

시종속 1차원 슈뢰딩거 기본 방정식

$e^{-j\frac{E}{\hbar}t}$ 로 양변을 나누면

1차원 시독립 파동방정식 $\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0}$; 정상 상태 일차원

시독립 time-independent ..

3차원 시독립 파동방정식

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar}(E-V)\phi = 0$$

◦ (시간 종속 파동방정식)

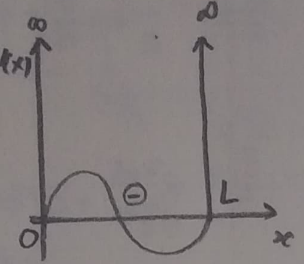
$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + \frac{iE}{\hbar}\Phi(t) = 0$$

3.번 슈뢰딩거 시독립 파동방정식으로부터 전위 우물 조건을 적용하여 파동함수를 구한다고 할 때
얻을 수 있는 파동방정식, 해인 파동함수를 구한다고 할 때
해의 의미

4번: 원자 번호 14인 실리콘의 전자 배치를 구하되
양자수를 구하는 과정으로 도출

1.7.4

☆ 전위 우물의 경계 조건.



∘ $0 < x < L$ $V(x) = 0$, $\psi(x)$

포텐셜 = 0. (전위) 존재

∘ $x = 0, L$: $V(x) = \infty$, $\psi(x) = 0$.

존재 X

☆ 전위 우물 문제에 대한 파동방정식의 해와 의미

→ 우물내 $(0<x<L)$ 에서 문제.

시독립 · 자유입자 파동방정식

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

By $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi(x) = 0$

$(V(x) = 0)$

$\boxed{\text{일반해} \quad \psi = B\cos kx + A\sin kx}$

$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ $(k \neq 0)$

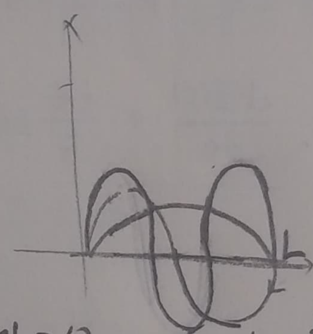
가능한 해

$\psi_{(x)} = B\cos kx$, $\psi_{(x)} = A\sin kx$

$\psi(0) = 0$ → $\boxed{\psi_{(x)} = A\sin kx}$

경계조건 → $\psi(L) = 0$ → $\psi(L) = A\sin kL = 0$

$\boxed{k = \frac{n\pi}{L}}$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$



$k = \frac{2n\pi}{2L} = \frac{n\pi}{L}$

주기가 몇 L인 파장이 존재하는가?

☆ 양자화에너지.

$$k = \underbrace{\frac{n\pi}{L} = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}}_{\text{시독립 파동 방정식으로}} \Rightarrow \boxed{E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}$$

point) 전위우물안에 존재할 수 있는 입자의 양자화 에너지 진동

☆☆ 의미) 시독립 파동방정식으로부터 전위 우물안에 존재할 수 있는 입자의 양자화에너지와 진폭을 구할 수 있다.

☆ 진폭 A의 결정

$$\psi = A\sin kx = A\sin\frac{n\pi}{L}$$

$$\int_0^L |\psi|^2 dx = A^2\int_0^L \sin^2\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

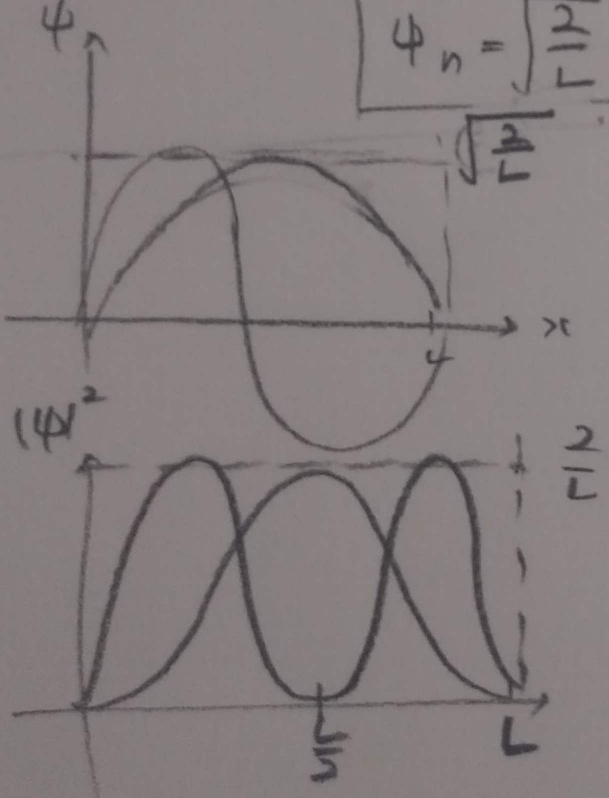
$$= A^2\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2(n\pi/L)x}{4n\pi/L}\right]_0^L = A^2\frac{L}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\sqrt{\frac{2}{L}}}$$

진폭 결정

n에 대한 파동방정식

$$\boxed{\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x}$$ (n=1, 2 ·· 정수배)

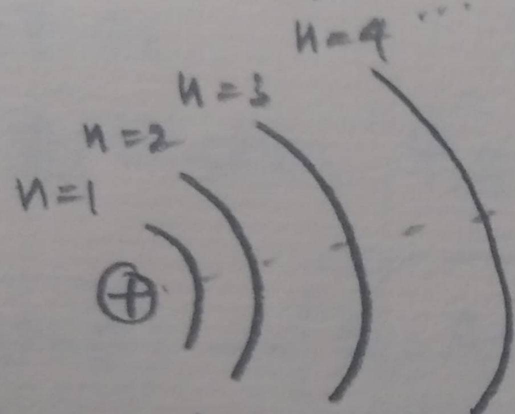


↳ n의 값이 커짐에 따라 전체 길이에서 입자를 발견할 확률이 일정해진다

☆ 1.7.6. 수소 원자 양자수

$$E_n = -13.6\,(\mathrm{eV}) \cdot \frac{1}{n^2} \Leftarrow \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ mvr &= \frac{h}{2\pi}\cdot n = n\hbar \\ r_n &= \frac{\varepsilon h^2}{\pi m e^2}\cdot n^2 \end{aligned} \right) \quad E_n = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$E_1 = -13.6\,\mathrm{eV}$



$E_1 = -13.6\,\mathrm{eV}$

$E_2 = -13.6 \cdot \frac{1}{2^2} = 3.4\,\mathrm{eV}$

$E_3 = -1.5\,\mathrm{eV}$

→ 바깥쪽 궤도로 갈수록 E가 0에 가까워진다

$n = \infty$, $E_\infty = -13.6\,(\mathrm{eV}) \cdot \frac{1}{\infty} = 0$.

⇒ zero potential

☆ 영전위 (가장 바깥쪽 궤도)

• 스펙트럼

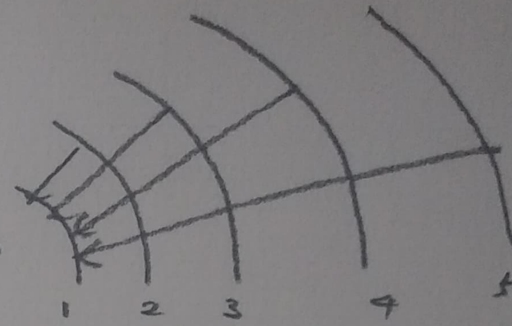
$$E_n = -13.6\,(eV)\cdot\frac{1}{n^2}$$

f=1
final orbit 1

$$E_{2\to1} = -13.6(eV)\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right)$$
$$= 10.2\,(eV)$$
$$= h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

주파수 상수 파장 (광의 색)

→ 스펙트럼



$$E_{3\to1} = -13.6(eV)\cdot\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{1^2}\right) = 12.1\,(eV)$$

$$E_{\infty\to1} = -13.6\left(-\frac{1}{1^2}\right) = 13.6\,eV$$

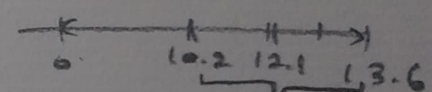
→ f=1 일때 값이 10.2 ~ 13.6 (eV) 만이 나올 수 있다

10.2, 12.1, 13.6 (eV)
① ② ⑤

※ 스펙트럼이 나오는 범위가 제한되어 있다

f=2
final orbit 2

$$E_{3\to2} = -13.6\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}\right) = 1.9\,(eV)$$



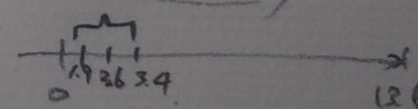
라이만 계열

$$E_{4\to2} = -13.6\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^2}\right) = 2.6\,(eV)$$

$$E_{\infty\to2} = -13.6\left(-\frac{1}{2^2}\right) = 3.4\,(eV)$$

발머 계열

1.9, 2.6, 3.4 (eV)

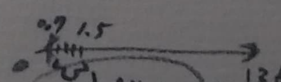


f=3.

$$E_{4\to3} = -13.6\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{3^2}\right) = 0.7\,(eV)$$

$$E_{\infty\to3} = -13.6\left(-\frac{1}{3^2}\right) = 1.5\,eV.$$

0.7, 1.5 (eV)



파셴 계열

→ 파장들은 스펙트럼을 가지고 있다

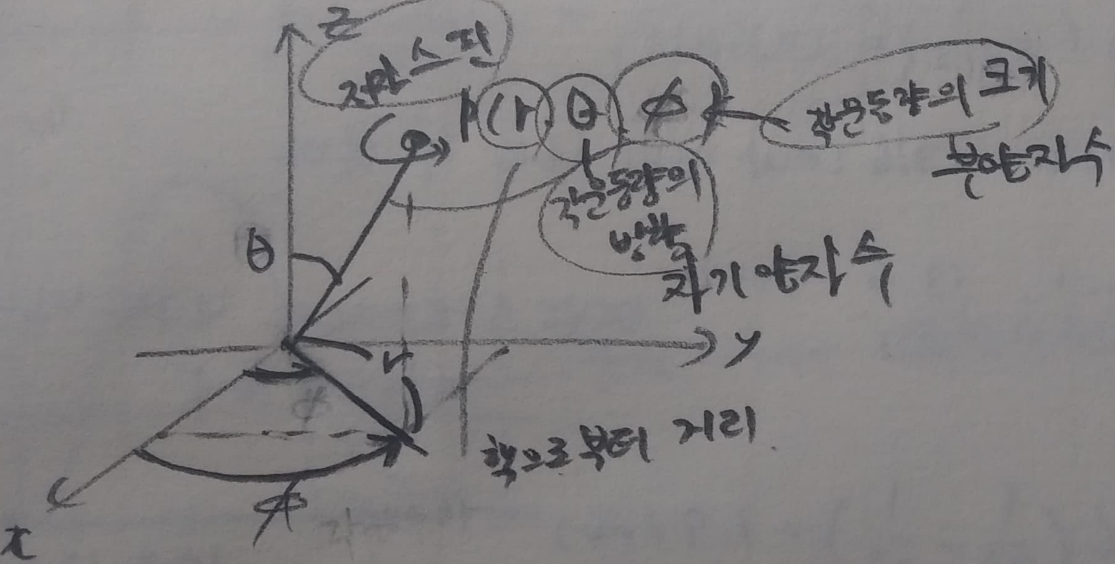
☆ (전자의 양자수)

1. 주양자수 n (n은 양의 정수) ○ 전자의 에너지 결정

2. 부양자수 l (l은 0 및 양의 정수) ○ 각운동량을 결정
   $0 \le l \le n-1$

3. 자기양자수 m_l (m은 정수) $-l \le m \le +l$ ○ 궤도면의 자장 방향에 대한 기울기 결정
   각운동 (방향)

4. 스핀 양자수 $m_s = \pm\frac{1}{2}$ ○ 자전 (고유 각운동량) 결정



$P(r, \theta, \phi) \rightarrow Q(n, l, m, s)$

좌표 / 에너지의 좌표

4. ☆ 수소 원자 양자수 H

주양자수 $n=1$

$n=1,2,3\cdots$

부양자수 $l=0$

s

$0 \le l \le n-1$

자기양자수 $m_l=0$

$-l \le m_l \le +l$

전자스핀 $\boxed{\uparrow\downarrow}$

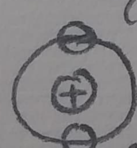
$\pm\frac{1}{2}$ $\uparrow\downarrow$

$+$ $-$

$1s^2$

②

(1.0.0.↑)



(1.0.0.↓)

$n=2$

$l=0,1$

s p

$m_l=0,-1,0,+1$

s p

$\boxed{\uparrow\downarrow}$ $\boxed{\uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow}$

$2s$. $2p^6$

⑧

$n=3$

$l=0,1,2$

s

$m_l=\boxed{0}, -1, 0, +1$

$-2, -1, 0, 2$

$\boxed{\uparrow\downarrow}$ $\boxed{\uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow}$

$3s^2$ $3p^6$

$2p^2$

④

원자 번호 14

$1s^{(2)}, 2s^{(2)}, 2p^{(6)}, 3s^{(2)}, 2p^{(2)}$ →

$_{14}Si$

양자수 : 14