확률과 통계 정답

23	②	24	④	25	③	26	④	27	⑤
28	②	29	5	30	133				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 이항계수 계산하기

$(4x+1)^6$ 의 전개식의 일반항은
$_6\mathrm{C}_r \times (4x)^{6-r} \times 1^r = {_6\mathrm{C}_r} \times 4^{6-r} \times x^{6-r}$
$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$
x 의 계수는 $r=5$ 일 때 $_6\mathrm{C}_5 \times 4 = {_6\mathrm{C}_1} \times 4 = 24$

24. [출제의도] 이항분포의 분산 이해하기

이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$에서 $\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$,
$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2n}{9}$
$\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\times\frac{n}{3}-1=17$
$n=18$
따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{2\times18}{9}=4$

25. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

8 개의 공 중 임의로 4 개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 $_8\mathrm{C}_4$
(i) 꺼낸 공 중 검은 공이 0 개일 확률은
$\frac{_4\mathrm{C}_4}{_8\mathrm{C}_4}=\frac{1}{70}$
(ii) 꺼낸 공 중 검은 공이 1 개일 확률은
$\frac{_4\mathrm{C}_1\times{_4\mathrm{C}_3}}{_8\mathrm{C}_4}=\frac{16}{70}$
따라서 꺼낸 공 중 검은 공이 2 개 이상일 확률은
$1-\left(\frac{1}{70}+\frac{16}{70}\right)=\frac{53}{70}$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

(i) 한 개의 문자를 3 개 선택하는 경우
$_3\mathrm{C}_1\times\frac{5!}{3!}=60$
(ii) 두 개의 문자를 각각 2 개씩 선택하는 경우
$_3\mathrm{C}_2\times\frac{5!}{2!\times2!}=90$
따라서 경우의 수는 $90+60=150$

27. [출제의도] 확률의 곱셈법칙 이해하기

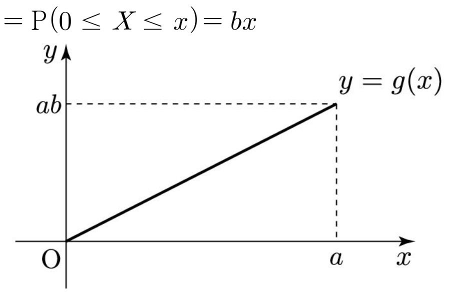
3 개의 동전을 동시에 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 3 인 사건을 X, 주머니에서 임의로 꺼낸 2 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 사건을 Y라 하자.
$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$
주머니 A 에서 임의로 꺼낸 2 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 다음과 같다.
(i) 1 이 적혀 있는 카드를 2 장 꺼내는 경우의 확률은
$\frac{_2\mathrm{C}_2}{_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$
(ii) 1 과 2 가 적혀 있는 카드를 각각 1 장씩 꺼내는 경우의 확률은
$\frac{_2\mathrm{C}_1\times{_2\mathrm{C}_1}}{_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$
(iii) 2 와 3 이 적혀 있는 카드를 각각 1 장씩 꺼내는 경우의 확률은
$\frac{_2\mathrm{C}_1\times{_2\mathrm{C}_1}}{_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$
$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{3}{5}$
$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{40}$
주머니 B 에서 임의로 꺼낸 2 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 3 과 4 가 적혀 있는 카드를 각각 1 장씩 꺼내는 경우이다.
$\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{_2\mathrm{C}_1\times{_2\mathrm{C}_1}}{_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$
$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)$
$=\frac{7}{8}\times\frac{4}{15}=\frac{7}{30}$
$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)$
$=\frac{3}{40}+\frac{7}{30}=\frac{37}{120}$

28. [출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

조건 (가)에서
$\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$ 의 값이 자연수인 경우는 세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 하나의 수가 1 또는 4 이고 나머지 두 수가 서로 같은 경우이다.
조건 (나)에 의하여
(i) $f(3)=1$ 인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 1,\ 1)$
순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 $_5\mathrm{H}_3$
그러므로 $1\times{_5\mathrm{H}_3}={_7\mathrm{C}_3}=35$
(ii) $f(3)=2$ 인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 2,\ 2)$
순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 $_4\mathrm{H}_3$
그러므로 $1\times{_4\mathrm{H}_3}={_6\mathrm{C}_3}=20$
(iii) $f(3)=3$ 인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 3,\ 3)$
순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 $_3\mathrm{H}_3$
그러므로 $1\times{_3\mathrm{H}_3}={_5\mathrm{C}_3}=10$
(iv) $f(3)=4$ 인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 4)$, $(3,\ 3,\ 4)$, $(4,\ 4,\ 4)$
순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 $_2\mathrm{H}_3$
그러므로 $5\times{_2\mathrm{H}_3}=5\times{_4\mathrm{C}_3}=20$
(v) $f(3)=5$ 인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 5,\ 5)$, $(4,\ 5,\ 5)$
순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 $_1\mathrm{H}_3$
그러므로 $2\times{_1\mathrm{H}_3}=2\times{_3\mathrm{C}_3}=2$
따라서 (i) ~ (v)에 의하여 함수 f 의 개수는
$35+20+10+20+2=87$

29. [출제의도] 연속확률변수의 확률밀도함수의 성질을 활용하여 문제 해결하기

확률밀도함수의 성질에 의하여
$\mathrm{P}(0\le X\le a)=1$ 에서 $ab=1$ $\cdots$ ㉠
$g(x)=\mathrm{P}(0\le X\le x)=bx$



확률밀도함수의 성질에 의하여
$\mathrm{P}(0\le Y\le a)=\frac{1}{2}\times a\times ab=\frac{a^2b}{2}=1$ $\cdots$ ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=2$, $b=\frac{1}{2}$
그러므로 $g(x)=\frac{1}{2}x$ 에서
$\mathrm{P}(0\le Y\le c)=\frac{1}{2}\times c\times\frac{c}{2}=\frac{c^2}{4}=\frac{1}{2}$, $c^2=2$
따라서 $(a+b)\times c^2=\left(2+\frac{1}{2}\right)\times2=5$

30. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

정육면체 모양의 상자를 한 번 던져 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 각각 1, 2 일 확률은 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ 이다.
$a_1+a_2+a_3>a_4+a_5+a_6$ 일 사건을 A,
$a_1=a_4=1$ 일 사건을 B 라 하자.
$a_1+a_2+a_3>a_4+a_5+a_6\ge3$
(I) $a_1+a_2+a_3=4$ 인 경우
$a_1+a_2+a_3=4$ 일 확률은 $_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$
$a_4+a_5+a_6=3$ 일 확률은 $_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3^3}$
그러므로 $_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3^3}=\frac{6}{3^6}$
(II) $a_1+a_2+a_3=5$ 인 경우
$a_1+a_2+a_3=5$ 일 확률은 $_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$
$3\le a_4+a_5+a_6\le4$ 일 확률은
$_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^3+{_3\mathrm{C}_1}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{3^3}$
그러므로 $_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{7}{3^3}=\frac{84}{3^6}$
(III) $a_1+a_2+a_3=6$ 인 경우
$a_1+a_2+a_3=6$ 일 확률은 $_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3$
$3\le a_4+a_5+a_6\le5$ 일 확률은
$_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^3+{_3\mathrm{C}_1}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)+{_3\mathrm{C}_2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{19}{3^3}$
그러므로 $_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{19}{3^3}=\frac{152}{3^6}$
(I), (II), (III)에 의하여
$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{3^6}+\frac{84}{3^6}+\frac{152}{3^6}=\frac{242}{3^6}$
$a_1=a_4=1$ 이면 $a_2+a_3>a_5+a_6\ge2$ 이다.
(i) $a_1=a_4=1$ 이고 $a_2+a_3=3$ 인 경우
$a_1=a_4=1$ 일 확률은 $_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$
$a_2+a_3=3$ 일 확률은 $_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3^2}$
$a_5+a_6=2$ 일 확률은 $_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$
그러므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{4}{3^2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{3^6}$
(ii) $a_1=a_4=1$ 이고 $a_2+a_3=4$ 인 경우
$a_1=a_4=1$ 일 확률은 $_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$
$a_2+a_3=4$ 일 확률은 $_2\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$
$2\le a_5+a_6\le3$ 일 확률은
$_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^2+{_2\mathrm{C}_1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3^2}$
그러므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{5}{3^2}=\frac{20}{3^6}$
(i), (ii)에 의하여
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{3^6}+\frac{20}{3^6}=\frac{24}{3^6}$
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{24}{242}=\frac{12}{121}$
따라서 $p=121$, $q=12$ 이므로 $p+q=133$