상 경 계	**한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시** **논 술 예 시 답 안**	2번

1. 주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수에서 2를 뺀 수인 확률변수와 주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수인 확률변수는 동일한 확률분포를 갖는다. 따라서 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 8번 할 때, 나온 수를 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8라 하면

$W=\dfrac{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+(Z_5-2)+(Z_6-2)+(Z_7-2)+(Z_8-2)}{8}=\dfrac{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6+Z_7+Z_8}{8}-1$ 이다.

주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

X의 평균과 분산은 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{1\times2+2\times1+3\times1+4\times1+5\times2}{7}=3$,

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{1^2\times2+2^2\times1+3^2\times1+4^2\times1+5^2\times2}{7}-3^2=\dfrac{18}{7}$ 이다.

$\overline{Z}=\dfrac{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6+Z_7+Z_8}{8}$ 라고 하면 $\mathrm{E}(\overline{Z})=\mathrm{E}(X)=3$, $\mathrm{V}(\overline{Z})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{8}=\dfrac{9}{28}$ 이다.

따라서 확률변수 W의 평균과 분산은 각각

$\mathrm{E}(W)=\mathrm{E}(\overline{Z}-1)=\mathrm{E}(\overline{Z})-1=2$, $\mathrm{V}(W)=\mathrm{V}(\overline{Z}-1)=\mathrm{V}(\overline{Z})=\dfrac{9}{28}$ 이다.

또한 $\mathrm{E}\left(\dfrac{5}{2}W-1\right)=4$, $\dfrac{2521}{\mathrm{V}(-28W+10)}=\dfrac{2521}{(-28)^2\mathrm{V}(W)}=\dfrac{2521}{252}$ 이므로 $4<n<\dfrac{2521}{252}$ 을 만족시키는 자연수 n은 5, 6, 7 8, 9 10이고 그 중 짝수인 자연수 n의 개수는 3이다.

답 : 평균 2, 분산 $\frac{9}{28}$, 3

2. 1번째 대국에서는 바둑기사가 이길 확률이 1이므로 2번째부터 5번째까지 대국 결과를 살펴보면 총 16가지의 경우가 있다. 대국 결과와 상금을 받는 횟수, 확률을 표로 정리하면 다음과 같다. 대국 결과에서 이기는 경우와 지는 경우는 각각 O와 X로 나타낸다.

대국 결과	상금을 받는 횟수	확률	대국 결과	상금을 받는 횟수	확률
OOOOO	4	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{120}$	OXOOO	2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{120}$
OOOOX	3	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{120}$	OXOOX	1	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{120}$
OOOXO	2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{120}$	OXOXO	0	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{120}$
OOOXX	2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{120}$	OXOXX	0	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{120}$
OOXOO	2	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{120}$	OXXOO	1	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{120}$
OOXOX	1	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{120}$	OXXOX	0	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{120}$
OOXXO	1	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{120}$	OXXXO	0	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{120}$
OOXXX	1	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{120}$	OXXXX	0	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{120}$

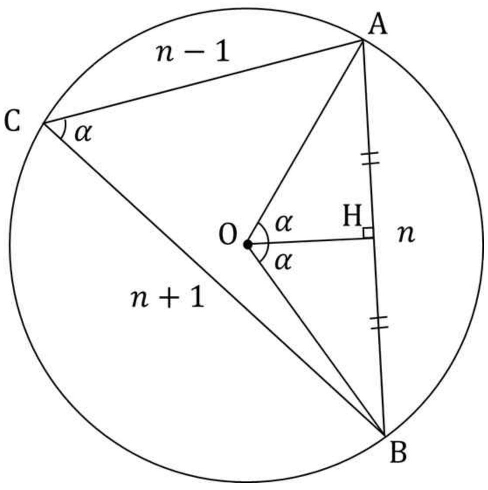
상금을 받는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{53}{120}$	$\frac{44}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{1}{120}$

X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{44}{120}+2\times\dfrac{18}{120}+3\times\dfrac{4}{120}+4\times\dfrac{1}{120}=\dfrac{96}{120}=\dfrac{4}{5}$ 이므로 총 상금의 기댓값은 $720\times\dfrac{4}{5}=576$만 원이다.

답 : 576 만 원

3. 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해



$n^2 = (n+1)^2 + (n-1)^2 - 2(n+1)(n-1)\cos\alpha$ 이고, 정리하면

$\cos\alpha = \dfrac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ 이다. 한편 삼각형 OBH에서

$R\sin\alpha = \dfrac{n}{2}$, 따라서

$$R^2 = \frac{n^2}{4}\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{n^2}{4}\frac{1}{1-\cos^2\alpha} = \frac{n^2}{4}\frac{1}{1-\left(\dfrac{n^2+2}{2(n^2-1)}\right)^2} = \frac{(n^2-1)^2}{3(n^2-4)}$$

이다. 외접원의 넓이는 $S_n = \pi R^2$ 이므로 $\dfrac{S_n}{n^2} = \dfrac{(n^2-1)^2}{3n^2(n^2-4)}\pi$ 이다.

함수 $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{3x^2(x^2-4)}$ 에 대하여, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2-1)^2}{3x^2(x^2-4)} = \dfrac{1}{3}$ 이므로,

구하는 극한값은 $\dfrac{\pi}{3}$ 이다

답 : $\dfrac{\pi}{3}$