• 수학 영역 •

수학 정답

1	③	2	④	3	⑤	4	①	5	⑤
6	②	7	③	8	②	9	④	10	①
11	④	12	③	13	⑤	14	②	15	①
16	⑤	17	④	18	②	19	①	20	③
21	②	22	35	23	5	24	22	25	3
26	9	27	16	28	12	29	15	30	250

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

$$A+B=(x^3+2x^2)+(2x^3-x^2-1)$$
$$=(x^3+2x^3)+(2x^2-x^2)-1$$
$$=3x^3+x^2-1$$

2. [출제의도] 조건의 진리집합을 이해한다.

실수 x에 대한 조건 'x는 음이 아닌 실수이다.'의 진리집합은 $\{x\,|\,x\geq 0\}$이다.

3. [출제의도] 순열의 수를 계산한다.

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

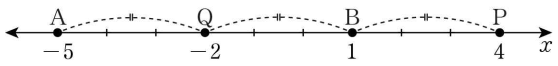
4. [출제의도] 수직선 위의 선분의 외분을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

두 점 A(-5), B(1)에 대하여 선분 AB를 3:1로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{3\times1-1\times(-5)}{3-1}=\frac{3+5}{2}=4$$

[보충 설명]

선분 AB를 3:1로 외분하는 점을 P라 할 때, 세 점 A(-5), B(1), P(4)의 위치는 그림과 같고, 두 점 B(1), Q(-2)는 선분 AP를 삼등분하는 점이다.



5. [출제의도] 복소수의 값을 계산한다.

$$(\sqrt{2}+\sqrt{-2})^2=(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^2$$
$$=\{\sqrt{2}(1+i)\}^2$$
$$=(\sqrt{2})^2(1+i)^2$$
$$=2\times(1+2i+i^2)$$
$$=2\times(1+2i-1)$$
$$=2\times2i=4i$$

6. [출제의도] 곱셈 공식을 이해하여 식의 값을 구한다.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

에서 $a+b=2$, $a^3+b^3=10$이므로

$8=10+3ab\times2$

$6ab=-2$

$ab=-\frac{1}{3}$

7. [출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

직선 $3x+2y-1=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다. 이 직선과 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면, $-\frac{3}{2}\times m=-1$에서 $m=\frac{2}{3}$

점 $(6,\ a)$를 지나고 기울기가 $\frac{2}{3}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{2}{3}(x-6)+a$

이고 이 직선이 원점을 지나므로

$0=\frac{2}{3}\times(0-6)+a=-4+a$

$a=4$

8. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

이차함수 $y=x^2+ax+a^2$의 그래프가 직선 $y=-x$에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+a^2=-x$, 즉

$x^2+(a+1)x+a^2=0$

의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$$D=(a+1)^2-4a^2$$
$$=-3a^2+2a+1$$
$$=-(3a+1)(a-1)=0$$

$a>0$이므로 $a=1$

9. [출제의도] 원의 접선의 방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a,\ 4\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$ax+4\sqrt{3}y=r^2$, $ax+4\sqrt{3}y-r^2=0$

이 접선이 직선

$x-\sqrt{3}y+b=0$

과 일치하므로

$\frac{a}{1}=\frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{-r^2}{b}$

에서

$a=-4$, $r^2=4b$ …… ㉠

한편, 점 $(a,\ 4\sqrt{3})$이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$a^2+(4\sqrt{3})^2=r^2$

$r^2=(-4)^2+(4\sqrt{3})^2=64$

$r>0$이므로 $r=8$

㉠에서 $b=\frac{r^2}{4}=\frac{64}{4}=16$

따라서

$a+b+r=(-4)+16+8=20$

[다른 풀이]

점 $(a,\ 4\sqrt{3})$을 A라 하자.

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식이 $x-\sqrt{3}y+b=0$이므로 이 접선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

원점 O에 대하여 직선 OA는 이 접선과 수직이므로 직선 OA의 기울기는 $-\sqrt{3}$이다.

두 점 O$(0,\ 0)$, A$(a,\ 4\sqrt{3})$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4\sqrt{3}}{a}$이므로

$\frac{4\sqrt{3}}{a}=-\sqrt{3}$

$a=-4$

점 $(-4,\ 4\sqrt{3})$이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$(-4)^2+(4\sqrt{3})^2=16+48=64=r^2$

$r>0$이므로 $r=8$

따라서 원 $x^2+y^2=64$ 위의 점 $(-4,\ 4\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$-4x+4\sqrt{3}y=64$, $x-\sqrt{3}y+16=0$

이고 이 접선이 직선 $x-\sqrt{3}y+b=0$과 일치하므로

$b=16$

따라서

$a+b+r=(-4)+16+8=20$

10. [출제의도] 삼차방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+2x-3$이라 하면 $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)=0$

에서

$x=1$ 또는 $x^2+x+3=0$

$x^2+x+3=0$에서

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$$

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{11}}{2}$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{\sqrt{11}}{2}$

따라서

$a^2b^2=\frac{1}{4}\times\frac{11}{4}=\frac{11}{16}$

11. [출제의도] 집합의 연산 법칙을 이해하여 조건을 만족시키는 집합의 원소의 개수를 구한다.

드모르간의 법칙에 의하여

$$A^C\cup B=(A\cap B^C)^C$$
$$=(A-B)^C$$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

이때

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$

이고 집합 $A\cap B$는 30의 약수 중 3의 배수를 원소로 갖는 집합이므로

$A\cap B=\{3,\ 6,\ 15,\ 30\}$

$n(U)=50$이므로

$$n(A^C\cup B)=n((A-B)^C)$$
$$=n(U)-n(A-B)$$
$$=n(U)-\{n(A)-n(A\cap B)\}$$
$$=50-(8-4)=46$$

12. [출제의도] 순열을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 2학년 학생 4명 중에서 2명이 양 끝에 있는 의자에 앉는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

위의 각각의 경우에 대하여 1학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ①, 2학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ②라 할 때, 조건 (가)를 만족시키도록 나머지 4명의 학생이 4개의 의자에 앉는 경우는 다음 3가지 중 하나이다.

①②①②, ①②②①, ②①②①

1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 의자에 앉는 경우의 수는 위의 3가지 경우 모두

$2!\times2!=4$

로 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times3\times4=144$

[다른 풀이]

먼저 2학년 학생 4명이 일렬로 앉은 후 1학년 학생 2명이 조건을 만족시키도록 앉는 경우를 생각하자.

2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

이때 2학년 학생을 ②라 하자.

②∨②∨②∨②

위의 각각의 경우에 대하여 두 조건 (가), (나)를 만족시키려면 1학년 학생 2명은 ∨ 표시된 3곳 중에서 2곳을 택하여 앉아야 하므로 1학년 학생이 앉는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

13. [출제의도] 함수의 정의를 이해하여 식의 값을 구한다.

조건 (가)에서 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$이다.

조건 (가)에서 g는 상수함수이므로 집합 X의 원소 중 하나를 k라 할 때, $g(x)=k$이다.

조건 (나)에서

$f(x)+g(x)+h(x)=x+k+h(x)=7$

이므로 $h(x)=-x+7-k$이다.

$x \in X$에서 $1 \le x \le 5$이므로
$2-k \le -x+7-k \le 6-k$
이때 $1 \le h(x) \le 5$이어야 하므로
$2-k \ge 1$이고 $6-k \le 5$
에서 $k=1$이다.
즉, $g(x)=1$, $h(x)=-x+6$에서
$g(3)+h(1)=1+5=6$

[다른 풀이]

조건 (가)에서 g는 상수함수이므로
$g(3)=g(1)$이다.
조건 (나)에서 $f(1)+g(1)+h(1)=7$이고
조건 (가)에서 f는 항등함수이므로
$f(1)=1$이다.
따라서

$$\begin{aligned} g(3)+h(1) &= g(1)+h(1) \\ &= 7-f(1) \\ &= 7-1=6 \end{aligned}$$

14. [출제의도] 연립부등식을 이해하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

이차부등식 $x^2+3x-10<0$에서
$(x+5)(x-2)<0$, $-5<x<2$
이 이차부등식을 만족시키는 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0, 1이고 개수는 6이다.

(i) $a=0$인 경우
$ax \ge a^2$에서 $0 \times x \ge 0$이고 이 부등식의 해는 모든 실수이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 6이다. 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a>0$인 경우
$ax \ge a^2$에서 $x \ge a$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 0 또는 1이다. 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$인 경우
$ax \ge a^2$에서 $x \le a$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4이기 위해서는 그 값이 -4, -3, -2, -1이어야 한다. 따라서 정수 a의 값은 -1이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=-1$

15. [출제의도] 항등식의 성질과 인수정리를 이해하여 식의 값을 구한다.

주어진 항등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$-8-4-6-2=0-2a$
$a=10$
$x^3-x^2+3x-2=(x+2)P(x)+10x$에서
$(x+2)P(x)=x^3-x^2-7x-2$
$Q(x)=x^3-x^2-7x-2$라 하면 $Q(-2)=0$이므로 $Q(x)$는 $x+2$를 인수로 갖는다.
이때 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

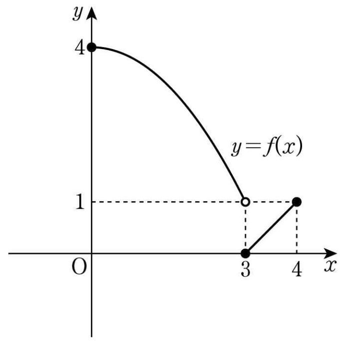
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & -7 & -2 \\ & & -2 & 6 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^3-x^2-7x-2 \\ &= (x+2)(x^2-3x-1) \end{aligned}$$

$(x+2)P(x)=(x+2)(x^2-3x-1)$
이 등식이 x에 대한 항등식이고 $P(x)$가 다항식이므로
$P(x)=x^2-3x-1$
따라서 $P(-2)=4+6-1=9$

16. [출제의도] 일대일대응을 이해하여 식의 값을 구한다.

집합 $\{x \mid 3 \le x \le 4\}$에서 정의된 함수 $y=x-3$의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 1\}$이므로 함수 f가 일대일대응이 되기 위해서는 집합 $\{x \mid 0 \le x < 3\}$에서 정의된 함수 $y=ax^2+b$의 치역이 $\{y \mid 1 < y \le 4\}$이어야 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서 이차함수 $g(x)$를 $g(x)=ax^2+b$라 할 때,
$g(0)=4$, $g(3)=1$이다.
$g(0)=4$에서 $b=4$
$g(3)=1$에서 $9a+b=1$
즉, $a=-\dfrac{1}{3}$

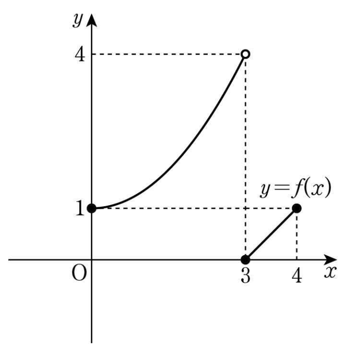
$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^2+4 & (0 \le x < 3) \\ x-3 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

이므로

$$f(1)=-\frac{1}{3}\times 1^2+4=\frac{11}{3}$$

[보충 설명]

위의 풀이에서 이차함수 $g(x)=ax^2+b$에 대하여 $g(0)=1$, $g(3)=4$인 경우에는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



이 경우에는 $f(0)=f(4)=1$이므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다. 또한, 공역의 원소 4가 치역에 속하지 않으므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

17. [출제의도] 이차방정식이 허근을 가질 조건을 이용하여 식의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 허수 z는 x에 대한 이차방정식
$x^2+mx+n=0$ …… ㉠
의 한 근이다. 이때 m, n이 정수이고 z가 허수이므로 방정식 ㉠은 $x=\overline{z}$도 근으로 갖는다.
조건 (나)에서 $z+\overline{z}=8$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$z+\overline{z}=-m=8$
$m=-8$
x에 대한 이차방정식 $x^2-8x+n=0$이 허근을 갖기 위해서는 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다.

$$\begin{aligned} D &= (-8)^2-4n \\ &= 64-4n<0 \end{aligned}$$

$n>16$이므로 정수 n의 최솟값은 17이다.
따라서 $m+n$의 최솟값은
$-8+17=9$

[다른 풀이]

z는 허수이므로 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b \ne 0$)으로 놓을 수 있다.
조건 (나)에서

$$\begin{aligned} z+\overline{z} &= (a+bi)+(a-bi) \\ &= 2a=8 \end{aligned}$$

이므로 $a=4$이다.
조건 (가)에서

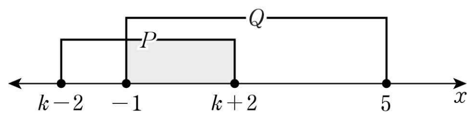
$$\begin{aligned} (4+bi)^2+m(4+bi)+n &= (16+8bi+b^2i^2)+(4m+mbi)+n \\ &= (16+8bi-b^2)+(4m+mbi)+n \\ &= (16-b^2+4m+n)+b(8+m)i \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로
$16-b^2+4m+n=0$ …… ㉠
$b(8+m)=0$ …… ㉡
㉡에서 $b \ne 0$이므로 $m=-8$
㉠에서 $n=16+b^2$이고 $b \ne 0$이므로 $n>16$
그러므로 정수 n의 최솟값은 17이다.
따라서 $m+n$의 최솟값은
$-8+17=9$

18. [출제의도] 명제의 참, 거짓을 이용하여 미지수의 값을 추론한다.

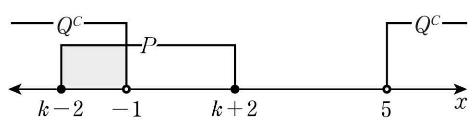
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
조건 p에서
$|x-k| \le 2$, $k-2 \le x \le k+2$
이므로
$P=\{x \mid k-2 \le x \le k+2\}$
조건 q에서
$x^2-4x-5 \le 0$, $(x+1)(x-5) \le 0$
$-1 \le x \le 5$
이므로
$Q=\{x \mid -1 \le x \le 5\}$
이고 이때
$Q^C=\{x \mid x<-1$ 또는 $x>5\}$
이다.
명제 $p \to q$와 명제 $p \to \sim q$가 모두 거짓이므로
$P \not\subset Q$이고 $P \not\subset Q^C$
즉, $P \cap Q^C \ne \varnothing$이고 $P \cap Q \ne \varnothing$ …… ㉠
이어야 한다.
$k-2 \ge -1$이고 $k+2 \le 5$, 즉 $1 \le k \le 3$이면 $P \subset Q$가 되어 조건을 만족시키지 않으므로 다음과 같이 k의 범위를 나누어 생각하자.

(i) $k<1$인 경우
㉠에서 $P \cap Q \ne \varnothing$이므로 [그림 1]과 같이
$-1 \le k+2$, 즉 $k \ge -3$ …… ㉡



[그림 1]

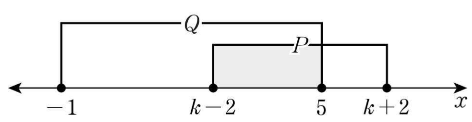
$P \cap Q^C \ne \varnothing$이므로 [그림 2]와 같이
$k-2<-1$, 즉 $k<1$ …… ㉢



[그림 2]

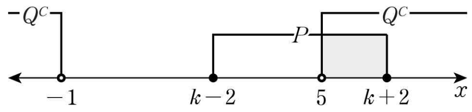
㉡, ㉢에서 $-3 \le k<1$이고 이 부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 -3, -2, -1, 0이다.

(ii) $k>3$인 경우
㉠에서 $P \cap Q \ne \varnothing$이므로 [그림 3]과 같이
$k-2 \le 5$, 즉 $k \le 7$ …… ㉣



[그림 3]

$P \cap Q^C \ne \varnothing$이므로 [그림 4]와 같이
$5<k+2$, 즉 $k>3$ …… ㉤



[그림 4]

㉣, ㉤에서 $3<k \le 7$이고 이 부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 4, 5, 6, 7이다.
(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k의

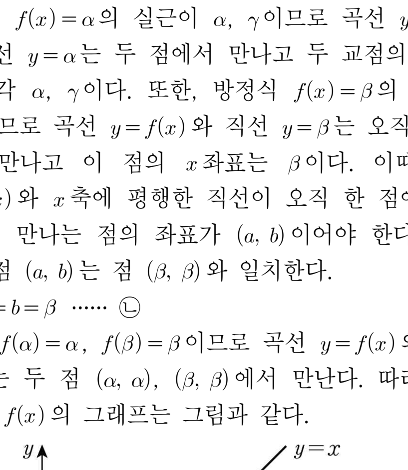
값은 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$이고 그 합은
$-3-2-1+0+4+5+6+7=16$

19. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

조건 (가)에서 $0\in A$
조건 (나)에서 명제 '$a^2-2\notin A$이면 $a\notin A$'가 참이므로 이 명제의 대우 '$a\in A$이면 $a^2-2\in A$'도 참이다.
$0\in A$이므로
$0^2-2=-2\in A$
$-2\in A$이므로
$(-2)^2-2=4-2=2\in A$
$2\in A$이므로
$2^2-2=2\in A$
그러므로 $\{-2,\ 0,\ 2\}\subset A$
조건 (다)에서 $n(A)=4$이므로
$A=\{-2,\ 0,\ 2,\ k\}$ (단, $k\neq-2,\ k\neq0,\ k\neq2$)
라 하자.
$k\in A$이면 $k^2-2\in A$이므로 k^2-2의 값은 $-2,\ 0,\ 2,\ k$ 중 하나이다.
(ⅰ) $k^2-2=-2$인 경우
$k^2=0$에서 $k=0$이 되어 $k\neq0$에 모순이다.
(ⅱ) $k^2-2=0$인 경우
$k^2=2$에서 $k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$
(ⅲ) $k^2-2=2$인 경우
$k^2=4$에서 $k=-2$ 또는 $k=2$가 되어 $k\neq-2$, $k\neq2$에 모순이다.
(ⅳ) $k^2-2=k$인 경우
$k^2-k-2=0$, $(k-2)(k+1)=0$
이고 $k\neq2$이므로
$k=-1$
(ⅰ)~(ⅳ)에서 $k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$ 또는 $k=-1$
따라서 집합 A가 될 수 있는 것은
$\{-2,\ 0,\ 2,\ -\sqrt{2}\}$, $\{-2,\ 0,\ 2,\ \sqrt{2}\}$, $\{-2,\ 0,\ 2,\ -1\}$
이고 개수는 3이다.

20. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

방정식 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$에서
$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ …… ㉠
조건 (나)에서 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$이고 조건 (가)에서 방정식 ㉠의 실근이 α, β, γ뿐이므로 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α, γ이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐이거나, 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β, γ이다.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α, γ이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐인 경우를 생각하자.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α, γ이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\alpha$는 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표는 각각 α, γ이다. 또한, 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\beta$는 오직 한 점에서 만나고 이 점의 x좌표는 β이다. 이때 곡선 $y=f(x)$와 x축에 평행한 직선이 오직 한 점에서 만나려면 만나는 점의 좌표가 $(a,\ b)$이어야 한다. 그러므로 점 $(a,\ b)$는 점 $(\beta,\ \beta)$와 일치한다.
즉, $a=b=\beta$ …… ㉡
한편, $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$에서 만난다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



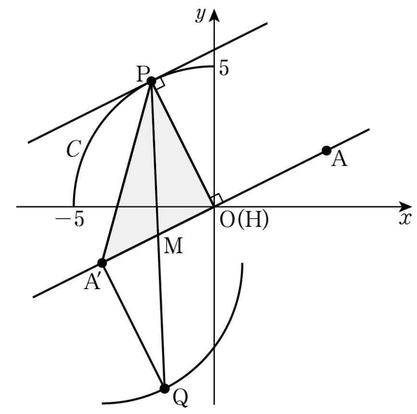
$f(x)=x$에서
$-(x-a)^2+b=x$
㉡에서
$-(x-\beta)^2+\beta=x$,
$(x-\beta)^2+(x-\beta)=0$,
$(x-\beta)(x-\beta+1)=0$,
$x=\beta-1$ 또는 $x=\beta$
$f(\alpha)=\alpha$이고 $\alpha\neq\beta$이므로
$\alpha=\beta-1$
$f(\gamma)=\alpha$이고 $\gamma>\beta=a$이므로
$-\sqrt{\gamma-a}+b=\alpha$,
$-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta=\beta-1$,
$\sqrt{\gamma-\beta}=1$,
$\gamma=\beta+1$
이때 $\alpha+\beta+\gamma=15$이므로
$(\beta-1)+\beta+(\beta+1)=15$
$3\beta=15$, $\beta=5$
$\alpha=\beta-1=4$, $\gamma=\beta+1=6$
따라서 ㉡에서 $a=b=5$이고

$$f(x)=\begin{cases}-(x-5)^2+5 & (x\le5)\\ -\sqrt{x-5}+5 & (x>5)\end{cases}$$

이므로
$f(\alpha+\beta)=f(9)$
$=-\sqrt{9-5}+5$
$=3$
한편, 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β, γ인 경우에도 같은 방법으로 $f(\alpha+\beta)=3$이다.

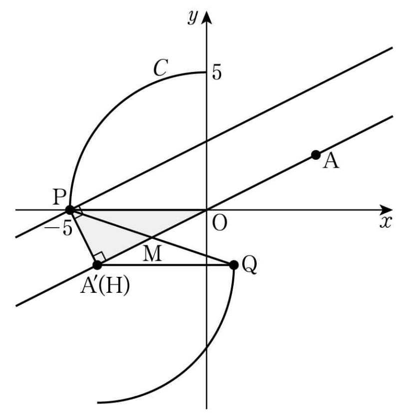
21. [출제의도] 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 삼각형과 관련된 명제의 참, 거짓을 추론한다.

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고 점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 삼각형 APQ의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{x+a+4}{3},\ \dfrac{y+b+2}{3}\right)$
이고 이 점이 원점 O와 일치하므로
$\dfrac{x+a+4}{3}=0$, $\dfrac{y+b+2}{3}=0$
$x=-a-4$, $y=-b-2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(-a-4,\ -b-2)$이다.
ㄱ. 두 점 P, Q의 좌표가 각각
$(a,\ b)$, $(-a-4,\ -b-2)$
이므로 선분 PQ의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{a+(-a-4)}{2},\ \dfrac{b+(-b-2)}{2}\right)$
즉, $(-2,\ -1)$이다. (참)
ㄴ. 점 A′은 점 A(4, 2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 A′의 좌표는
$(-4,\ -2)$
이고
$\overline{\mathrm{A'Q}}=\sqrt{\{-4-(-a-4)\}^2+\{-2-(-b-2)\}^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2}$
이때 점 P는 사분원의 호 C 위의 점이므로
$a^2+b^2=25$
따라서
$\overline{\mathrm{A'Q}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$
이므로 선분 A′Q의 길이는 5로 일정하다. (참)
ㄷ. 선분 OA′의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $(-2,\ -1)$이고 이는 선분 PQ의 중점의 좌표와 일치하므로 사각형 OPA′Q는 평행사변형이다. 즉, 삼각형 A′QP의 넓이는 삼각형 OPA′의 넓이와 같다. 점 P에서 직선 OA′에 내린 수선의 발을 H라 하면
(삼각형 OPA′의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{PH}}$
$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{PH}}$ …… ㉠
이므로 선분 PH의 길이가 최대이면 삼각형 OPA′의 넓이도 최대이고, 선분 PH의 길이가 최소이면 삼각형 OPA′의 넓이도 최소이다.
선분 PH의 길이가 최대일 때는 사분원의 호 C 위의 점 P에서의 접선이 직선 OA′과 평행할 때이다.



[그림 1]

직선 OA′의 기울기는 $\dfrac{0-(-2)}{0-(-4)}=\dfrac{1}{2}$이므로
[그림 1]과 같이 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이 되는 점 P가 반드시 존재하고 이때 $\overline{\mathrm{OP}}=5$이다.
따라서 선분 PH의 길이의 최댓값은 5이므로 ㉠에서 삼각형 OPA′의 넓이의 최댓값은
$M=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times5=5\sqrt{5}$
한편, 선분 PH의 길이가 최소일 때는 [그림 2]와 같이 점 P의 좌표가 $(-5,\ 0)$일 때이다.



[그림 2]

직선 OA′의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$이므로 점 $(-5,\ 0)$과 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|-5-0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$
따라서 선분 PH의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$이므로 ㉠에서 삼각형 OPA′의 넓이의 최솟값은
$m=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$
따라서
$M\times m=5\sqrt{5}\times5=25\sqrt{5}$ (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 원소의 곱을 계산한다.

$A\cap B=\{-7,\ -5\}$
이므로 모든 원소의 곱은
$(-7)\times(-5)=35$

23. [출제의도] 합성함수와 역함수의 값을 계산한다.

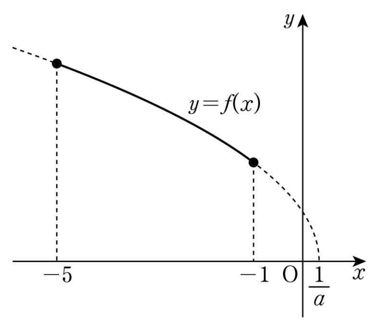
$f(1)=4$, $f(4)=3$이므로
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(4)=3$
$f(2)=1$이므로 $f^{-1}(1)=2$
따라서
$(f\circ f)(1)+f^{-1}(1)=3+2=5$

24. [출제의도] 나머지정리를 이해하여 식의 값을 구한

다.
다항식 $P(x)$를 x^2+3으로 나눈 몫이 $3x+1$, 나머지가 $x+5$이므로
$P(x)=(x^2+3)(3x+1)+x+5$
나머지정리에 의하여 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$P(1)=4\times4+6=22$

25. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

a가 양수이므로 $-5\le x\le -1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $f(x)=\sqrt{-ax+1}$은 $x=-5$일 때 최대이고 최댓값이 4이므로
$f(-5)=4$
$\sqrt{5a+1}=4$
$5a+1=16$
따라서
$a=3$

26. [출제의도] 직선의 평행 조건을 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.

직선 CD의 기울기는 음수이므로
$\frac{q-p}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}<0$에서
$q-p<0$
$\overline{AB}=\overline{CD}$에서
$3=\sqrt{(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(q-p)^2}$
$3^2=(2\sqrt{2})^2+(q-p)^2$
$1=(q-p)^2$
$q-p<0$에서 $q-p=-1$
즉, $q=p-1$
$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$에서 직선 AD의 기울기와 직선 BC의 기울기가 서로 같으므로
$\frac{q-1}{3\sqrt{2}-0}=\frac{p-4}{\sqrt{2}-0}$
$q-1=3p-12$ …… ㉠
$q=p-1$을 ㉠에 대입하면
$p-2=3p-12$
$2p=10$, $p=5$
$q=5-1=4$
따라서
$p+q=9$

27. [출제의도] 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있으므로 5개의 인형을 선택하려면 세 종류 이상의 인형을 선택해야 한다.

(ⅰ) 서로 다른 세 종류의 인형을 각각 1개, 2개, 2개 선택하는 경우
서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류의 인형을 선택하는 경우의 수는
${}_4C_3=4$
위의 각각의 경우에 대하여 세 종류의 인형 중에서 1개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 두 종류의 인형은 각각 2개씩 선택하면 되므로 이때의 경우의 수는
${}_3C_1=3$
따라서 이 경우의 수는
$4\times3=12$

(ⅱ) 서로 다른 네 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 1개, 2개 선택하는 경우
서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 세 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로 이때의 경우의 수는
${}_4C_1=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$12+4=16$

28. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 미지수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

직선 $y=n$이 곡선 $y=x^2-4x+4$와 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-4x+4=n$의 실근과 같다.
$x^2-4x+4=n$
$(x-2)^2=n$
$x-2=\pm\sqrt{n}$
$x=2-\sqrt{n}$ 또는 $x=2+\sqrt{n}$
x_1, x_2 중 작은 것을 α, 큰 것을 β라 하면
$\alpha=2-\sqrt{n}$, $\beta=2+\sqrt{n}$이다.

(ⅰ) $1\le n\le 4$인 경우
$\alpha\ge0$, $\beta>0$이므로

$$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{(2-\sqrt{n})+(2+\sqrt{n})}{2}=2$$

따라서 $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되는 n의 값은 1, 2, 3, 4이므로 개수는 4이다.

(ⅱ) $n>4$인 경우
$\alpha<0<\beta$이므로

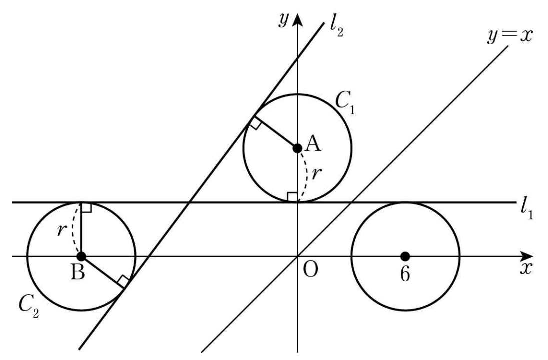
$$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{-\alpha+\beta}{2}=\frac{(\sqrt{n}-2)+(2+\sqrt{n})}{2}=\sqrt{n}$$

따라서 $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되는 100 이하의 자연수 n의 값은 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100이므로 개수는 8이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수는
$4+8=12$

29. [출제의도] 도형의 평행이동과 대칭이동을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

원 $(x-6)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_1, x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0, 6)$, $(6+k, 0)$이고, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 모두 r이다.
점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 Q를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점을 Q′이라 하면 점 P′은 원 C_1 위의 점이고, 점 Q′은 원 C_2 위의 점이다. 이때 두 점 $\mathrm{P}'(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}'(x_2, y_2)$에 대하여 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 값은 직선 P′Q′의 기울기와 같다.
직선 P′Q′의 기울기의 최솟값이 0이므로 그림과 같이 원 C_2의 중심의 x좌표가 $-2r$보다 작고, 두 원 C_1, C_2는 모두 x축에 평행한 직선 l_1에 접한다.
따라서 $6+k<-2r$이고 $r=6-r$, 즉 $r=3$
또한, 직선 P′Q′의 기울기의 최댓값이 $\frac{4}{3}$이므로 그림과 같이 두 원 C_1, C_2는 모두 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선 l_2에 접하고, 이때 원 C_2의 중심의 x좌표는 직선 l_2의 x절편보다 작다.



직선 l_2의 방정식을 $y=\frac{4}{3}x+n$이라 하면 직선 l_2의 y절편은 점 A의 y좌표보다 크므로 $n>6$이다.
점 A(0, 6)과 직선 $y=\frac{4}{3}x+n$, 즉 $4x-3y+3n=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이와 같으므로
$\frac{|0-18+3n|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$
$|3n-18|=15$
$n>6$이므로 $3n-18=15$, $n=11$
즉, 직선 l_2의 방정식은 $4x-3y+33=0$이다.
점 $\mathrm{B}(6+k, 0)$과 직선 $4x-3y+33=0$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이와 같으므로
$\frac{|4(6+k)-0+33|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$
$|4k+57|=15$
$k=-18$ 또는 $k=-\frac{21}{2}$
이때
$6+k=-12$ 또는 $6+k=-\frac{9}{2}$
직선 l_2의 x절편이 $-\frac{33}{4}$이므로 $6+k=-12$이어야 하고, 이는 $6+k<-2r=-6$을 만족시킨다.
즉, $k=-18$이다.
따라서 $|r+k|=|3+(-18)|=|-15|=15$

30. [출제의도] 이차함수와 유리함수의 그래프를 추론하여 미지수의 값을 구한다.

$a<1$, 즉 $1-a>0$이므로
$x\le a$에서 함수 $f(x)=\frac{1-a}{x-1}+2$는 x의 값이 커지면 y의 값은 작아진다. …… ㉠
이때 $x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$를 점근선으로 가지므로
$x\le a$이면 $f(a)\le f(x)<2$ …… ㉡
이다.
조건 (가)에 의하여 $x\le0$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최소이므로 a의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

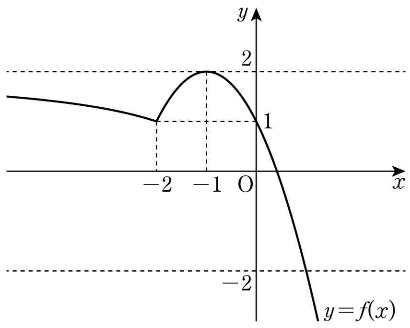
(ⅰ) $-2<a<1$인 경우
㉠에서 $f(-2)>f(a)$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=-2$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x-1}+2 & (x\le-2)\\ bx(x+2)+1 & (x>-2)\end{cases}$$

이다.
㉠에서 $x\le-2$인 모든 실수 x에 대하여
$f(x)\ge f(-2)$이다.
$f(-2)=f(0)=1$이고
$-2<x\le0$에서 $f(x)=bx(x+2)+1$이므로
조건 (가), (나)를 만족시키려면 $b<0$이어야 한다.
한편, 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합이 2이어야 한다.
㉡에서
$f(-2)=1\le f(x)<2$

이므로 $x \le -2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$ 또는 $y=-2$와 만나지 않는다.
$x>-2$에서 함수 $f(x)=bx(x+2)+1(b<0)$의 그래프는 직선 $y=-2$와 한 점에서 만난다.
그러므로 조건 (나)를 만족시키려면 [그림 1]과 같이 함수 $f(x)=bx(x+2)+1$의 그래프는 직선 $y=2$에 접해야 한다.



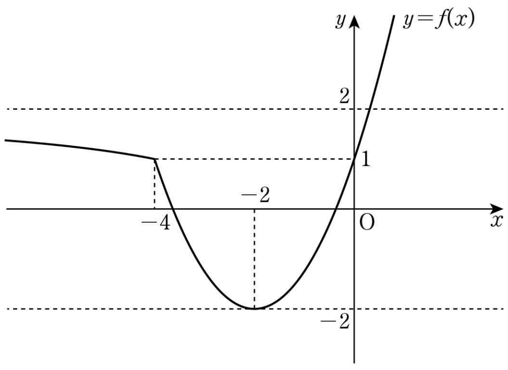
[그림 1]

함수 $f(x)=bx(x+2)+1$은 $x=-1$에서 최대이므로 $f(-1)=2$이다.
$f(-1)=b\times(-1)\times1+1=2$에서 $b=-1$
따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $(-2,\ -1)$이다.

(ⅲ) $a<-2$인 경우
$f(a)=f(0)=1$이고 ㉠, ㉡에서
$x \le a$일 때 $1 \le f(x) < 2$이다.
$a<x\le 0$에서 $f(x)=bx(x-a)+1$이므로 조건 (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최소이어야 한다. 즉, $b>0$이고 $\frac{a}{2}=-2$이어야 한다.
$a=-4$이고, 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-1}+2 & (x\le -4)\\ bx(x+4)+1 & (x>-4)\end{cases}$$

이다.
한편, ㉡에서
$f(-4)=1\le f(x)<2$
이므로 $x\le -4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$ 또는 $y=-2$와 만나지 않는다.
$x>-4$에서 함수 $f(x)=bx(x+4)+1$의 그래프는 직선 $y=2$와 한 점에서 만난다.
그러므로 조건 (나)를 만족시키려면 [그림 2]와 같이 $x>-4$에서 함수 $f(x)=bx(x+4)+1$의 그래프는 직선 $y=-2$에 접해야 한다.



[그림 2]

함수 $f(x)=bx(x+4)+1$은 $x=-2$에서 최소이므로 $f(-2)=-2$이다.
$f(-2)=b\times(-2)\times2+1=-2$에서 $b=\frac{3}{4}$
따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $\left(-4,\ \frac{3}{4}\right)$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$는
$(-2,\ -1)$, $\left(-4,\ \frac{3}{4}\right)$이다.
따라서

$$-40\times(a_1+b_1+a_2+b_2)=-40\times\left\{-2+(-1)+(-4)+\frac{3}{4}\right\}$$
$$=250$$

• 영어 영역 •

정 답

1	①	2	①	3	④	4	③	5	①
6	②	7	②	8	③	9	③	10	②
11	①	12	②	13	②	14	①	15	①
16	③	17	④	18	②	19	②	20	⑤
21	③	22	⑤	23	⑤	24	④	25	③
26	④	27	⑤	28	⑤	29	⑤	30	③
31	④	32	②	33	①	34	④	35	③
36	④	37	③	38	②	39	④	40	①
41	①	42	③	43	⑤	44	④	45	⑤

해 설

1. [출제의도] 담화의 목적을 추론한다.

W: Good morning, students. This is your principal, Ms. Perez. I have an important announcement about our indoor gym. Since its opening, it has been a popular destination for students who'd like to stay fit. However, the gym has been in use for more than 10 years and most sports equipment is now outdated. So, our school has decided to renovate the gym. This means the gym will be temporarily closed until further notice. We apologize for any inconvenience this may cause. Please check our school website for updates on the reopening of the gym. Thank you for your understanding.

principal 교장
announcement 알림
gym 체육관
destination 목적지
equipment 설비
temporarily 일시적으로
inconvenience 불편

2. [출제의도] 대화자의 의견을 추론한다.

M: Grace, did you finish preparing for your hiking trip tomorrow?
W: Almost, Dad. I still don't know which jacket I should wear.
M: When you choose your hiking jacket, make sure you consider the color.
W: How about this brown one? It looks good on me.
M: That does suit you well, but I think you should avoid brown.
W: Why is that?
M: For the sake of your safety, you need to wear a color that stands out from the surroundings. It allows you to be seen easily by others.
W: You mean I should avoid colors that blend in with nature, like browns and greens?
M: Exactly. Safety should always come first.
W: Then I'll go with this bright orange jacket.

safety 안전
surroundings 환경
blend in ~에 섞이다

3. [출제의도] 대화자의 관계를 추론한다.

[Cell phone rings.]
W: Hello. Mia Parsons speaking.
M: Hello. I was told to call you this afternoon.
W: All right. Can I have your name, please?
M: I'm Jonathan Lee.
W: Just a second. *[Pause]* Oh, Mr. Lee. I have good news for you. I was able to fix your issue.
M: That's a relief. The photos on my laptop are precious to me. By the way, what caused the problem?
W: The main board was damaged, so I've replaced it with a new one.
M: That's great. Can I get my laptop sent via a delivery service?
W: Sure. Please give me your address.
M: It's 11367 White Street, Sandville.
W: Okay. You can get it by Tuesday.
M: Thank you so much. If you send me the bill, I'll pay it right away.

relief 안심
precious 귀중한
damaged 손상된
replace 교체하다
bill 청구서

4. [출제의도] 그림과 대화의 일치 여부를 파악한다.

M: Hi, Lucia. Welcome back! How was your vacation?
W: Hi, Andrew. It was great. We rented a guest house.
M: Oh, do you have a picture of it?
W: Yes, look. I chose a sky-themed room for my kids.
M: Wow. The model airplane hanging from the ceiling looks cool.
W: Yeah. And kids never stopped going up and down the slide under the model airplane.
M: I can imagine. This star-shaped lamp on the table goes well with the theme.
W: Isn't the astronaut doll on the bed cute? It was a gift from the guest house.
M: It is. Your kids must have loved the picture of the space shuttle beside the bed.
W: They did. I really recommend this place for your next family trip.
M: Thanks. I should visit there next time.

ceiling 천장
slide 미끄럼틀
astronaut 우주 비행사
space shuttle 우주 왕복선
recommend 추천하다

5. [출제의도] 대화자가 할 일을 추론한다.

W: Dad, our printer is not working again!
M: Really? What do you need to print out?
W: I need a copy of my essay for tomorrow's English class.
M: Okay. Will you pass me the user's manual? Let me take a look.
W: I already did everything it says in the manual. Nothing helped.
M: Then, I can take the printer to the service center on my way out.
W: It might take more than a day to fix it. We'd better think of another way.
M: Hmm.... Then, how about going to the city library? You can use the printers there.
W: Oh, that'd be great, but I have never been there.
M: Don't worry. I'll take you there.
W: Thanks, Dad. Let's go to the library!