

2024학년도 모의논술고사

자연계열



성명	
전형	
수험번호	



[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 주어진 질문에 답하시오.

(가) 음이 아닌 정수의 집합을 U 라고 할 때, 1보다 큰 두 자연수 a, b 에 대하여 U 의 부분집합 $S(a, b)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$S(a, b) = \{am + bn \mid m, n \text{은 } U \text{의 원소}\}$$

두 자연수 a, b 가 모두 1보다 크므로 1은 $S(a, b)$ 의 원소가 아니며 ab 는 $S(a, b)$ 의 원소임을 알 수 있다. 예를 들어 $a = 2, b = 3$ 이라면 $S(2, 3)$ 에는 모든 양의 2의 배수와 양의 3의 배수가 포함된다. 또, 1보다 큰 모든 홀수 c 에 대하여 $c = 2k + 1$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 $c - 3 = 2k - 2 = 2(k - 1)$ 이고 $c = 2(k - 1) + 3$ 은 $S(2, 3)$ 의 원소이다. 따라서

$$S(2, 3) = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\} = U - \{1\} \text{ 이다.}$$

(나) 자연수 n 에 대하여 X_n 은 n 이하의 자연수의 집합이다. 정의역과 공역이 모두 X_n 인 함수 f 에 대해 다음과 같은 <조건>을 생각하자.

<조건>

정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = f(x)$ 이다.

예를 들어 집합 $X_2 = \{1, 2\}$ 일 때, $f: X_2 \rightarrow X_2$ 가 상수함수 또는 항등함수라면 <조건>을 만족하지만, 그렇지 않으면 <조건>을 만족하지 않는다.

[문제 1-1](30점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하시오.

- (1) 집합 $A = \{x \mid x \in U \text{ 그리고 } x \leq 2024\}$ 일 때, $S(2, 3)$ 에 대한 결과를 이용하여 $n(A \cap S(10, 15))$ 를 구하시오.
- (2) 명제 ‘ a 이상의 모든 자연수 x 에 대하여 $x \in S(3, 4)$ 이다.’가 참이 되도록 하는 자연수 a 의 최솟값을 구하시오.
- (3) 명제 ‘어떤 양의 7의 배수는 $S(2, b)$ 의 원소가 아니다.’가 거짓이 되도록 하는 2보다 큰 자연수 b 를 모두 구하시오.

[문제 1-2](20점) 제시문 (나)를 읽고 물음에 답하시오.

- (1) 함수 $f: X_n \rightarrow X_n$ 가 <조건>을 만족하면 f 의 치역은 $\{x \in X_n \mid f(x) = x\}$ 임을 증명하시오.
- (2) <조건>을 만족하는 함수 $f: X_3 \rightarrow X_3$ 의 개수를 구하시오.



[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 주어진 질문에 답하시오.

(가) 다음과 같은 게임을 생각해보자.

<동전 던지기 게임>

- ① 게임의 모든 참가자는 동전을 던지기 전에 자신이 가진 점수의 일부 또는 전부를 제시한다.
- ② 심판이 한 개의 동전을 던지고
 - 동전의 앞면이 나오면 각 참가자는 제시한 점수만큼을 더 얻는다.
 - 동전의 뒷면이 나오면 각 참가자는 제시한 점수의 반을 잃는다.

예를 들어 아주가 100점을 가지고 <동전 던지기 게임>에 참가하였다고 하자. 아주가 자신이 가진 점수 100점 중 50점을 제시했다면, 동전의 앞면이 나왔을 때는 $50점 + 50점 \times 2 = 150점$ 이 되고 동전의 뒷면이 나왔을 때에는 $50점 + 50점 \div 2 = 75점$ 이 된다.

장투와 새넌은 각각 100점을 가지고 연속한 50번의 <동전 던지기 게임>에 참가하였다. 매 게임마다 ①의 과정에서 장투는 자신이 가진 점수의 전부를 제시했고, 새넌은 자신이 가진 점수의 반을 제시했다. 50번의 게임에서 다음과 같이 홀수 번째 게임에서는 앞면, 짝수 번째 게임에서는 뒷면이 나왔다.

1	2	3	4	5	...	49	50
앞면	뒷면	앞면	뒷면	앞면	...	앞면	뒷면

k 번($1 \leq k \leq 50$)의 게임 후 장투의 점수를 x_k 그리고 새넌의 점수를 y_k 라고 하자.

(나) 펀드나 포트폴리오의 광고를 보면 연평균 수익률로 몇 년간 수익률의 산술평균을 제시하는 경우가 있다. 그러나 산술평균으로 나타낸 수익률은 실제 수익률보다 높아서 예상한 만큼 수익을 얻을 수 없다. 예를 들어 S펀드 상품에 투자하여 2021년에는 40%의 수익, 2022년에는 20%의 손실이 발생했다고 가정해보자. 산술평균으로 수익률을 계산하면 연평균 수익률은 10%가 되며 2년간 수익률은 연평균 수익률의 2배인 20%가 된다. 그러나 실제로 S펀드 상품에 2021년 초에 100만원을 투자했다면 2022년 말에는 112만원이 되어 있을 것이다. 따라서 원금 대비 2년간 실제 수익률은 12%로 산술평균으로 계산된 수익률인 20%보다 낮다는 것을 알 수 있다.

그렇다면 실제 연평균 수익률은 어떻게 계산할까? 투자 원금을 A , n 년 후의 평가 금액을 a_n 이라할 때, 실제 연평균 수익률은 다음 식을 만족하는 r 의 값이다.

$$A(1+r)^n = a_n$$



[문제 2-1](40점) 제시문 (가)를 읽고 다음에 답하시오.

- (1) x_{50} 을 구하시오.
- (2) 수열 $\{y_n\}$ 에 대하여 $\frac{y_{2n}}{y_{2n-1}}$ ($1 \leq n \leq 25$)과 $\frac{y_{2n+1}}{y_{2n}}$ ($1 \leq n \leq 24$)의 값을 각각 구하시오.
- (3) y_{50} 을 구하시오.
- (4) 아주가 100점을 가지고 장투와 새년이 참가한 50번의 <동전 던지기 게임>에 참가하였고 매 게임마다 ①의 과정에서 자신이 가진 점수에 α ($0 \leq \alpha \leq 1$)를 곱한 값을 제시한다고 할 때, 50회의 게임 후 아주의 점수가 최대가 되는 α 를 구하시오.

[문제 2-2](10점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 아래의 상용로그표를 이용하여 50번의 <동전 던지기 게임>에 대한 새년의 실제 게임당 평균 수익률을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 로 계산하며 게임당 평균 수익률의 소수점 이하 3번째 자리에서 버린다.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374