

제2교시

수학 영역(가형)



5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2, -1)$, $\vec{b}=(1, 3)$ 에 대하여 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{2x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

3. 함수 $f(x)=\ln(x^3+1)-2x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(B^c)=\frac{1}{4}, \quad P(A \cap B^c)=\frac{1}{6}$$

일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? (단, B^c 은 B 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{19}{24}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{21}{24}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

5. 함수 $f(x)=(e^x-1)(x+2)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h-2)}{h}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{e^2}-3$ ② $\frac{3}{e^2}-2$ ③ $\frac{3}{e}-2$
 ④ $\frac{3}{e^2}+3$ ⑤ $\frac{3}{e}+3$

6. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x=3\cos t, \quad y=4\sin t$$

일 때, 점 P의 속도 \vec{v} 와 가속도 \vec{a} 에 대하여 $|\vec{v}|^2+|\vec{a}|^2$ 의 값은? [3점]

- ① 9 ② 16 ③ 25 ④ 36 ⑤ 49

7. 7개의 문자 a, a, b, b, c, d, e 를 일렬로 나열할 때, 세 문자 c, d, e 중 어느 2개의 문자도 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 360 ② 365 ③ 370 ④ 375 ⑤ 380

8. 부등식

$$\log_2|x^2-4| + \log_2 3 \leq 5$$

를 만족시키는 정수 x 의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 두 점근선과 직선 $x=2a$ 가 만나는

두 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB의 길이가 16일 때,
이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, a, b 는 양의 상수이다.) [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

10. 실수 a 에 대하여 $0 \leq x \leq 2$ 에서 x 에 대한 방정식

$$3 \sin(2\pi x) - a = 0$$

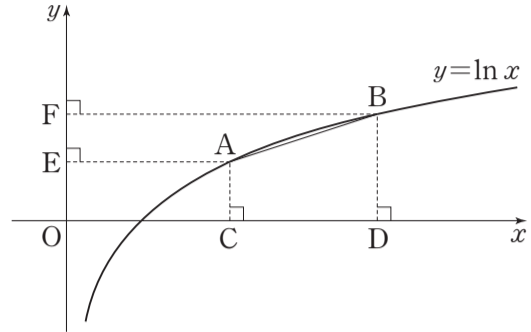
의 실근의 개수를 $f(a)$ 라 하자. 집합 $A = \{f(a) | a \text{는 실수}\}$ 의
모든 원소의 합은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

11. $\int_0^1 \frac{\sin \frac{\pi}{3} x}{\cos^2 \frac{\pi}{3} x} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

12. 그림과 같이 곡선 $y = \ln x$ 위의 두 점 $A(a, \ln a)$, $B(2a, \ln 2a)$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D 라 하고, y 축에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하자. 사각형 $ACDB$ 의 넓이가 사각형 $ABFE$ 의 넓이의 2배일 때, 상수 a 의 값은? (단, $a > 1$) [3점]



- ① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

13. 서로 다른 두 주사위를 던져 나온 눈의 수를 각각 a, b 라 할 때, 곡선 $y=x^2+ax+b$ 와 직선 $y=x-1$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 확률은? [3점]

- ① $\frac{7}{36}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{11}{36}$

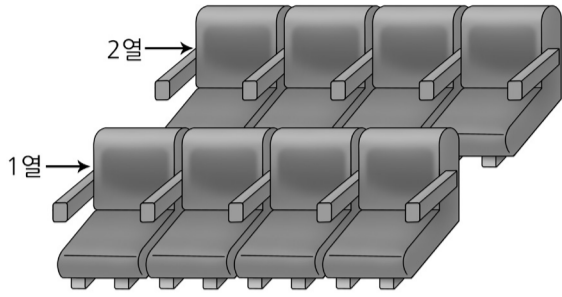
14. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + xf'(x) = x^2 e^x$$

을 만족시킨다. $f(1)=e$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $2e$ ④ e^2 ⑤ $2e^2$

15. 세 쌍의 부부가 영화를 보러 영화관에 갔다. 이 6명이 그림과 같은 8개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 부부끼리는 같은 열에 이웃하여 앉을 확률은? [4점]



- ① $\frac{1}{72}$ ② $\frac{1}{70}$ ③ $\frac{1}{68}$ ④ $\frac{1}{66}$ ⑤ $\frac{1}{64}$

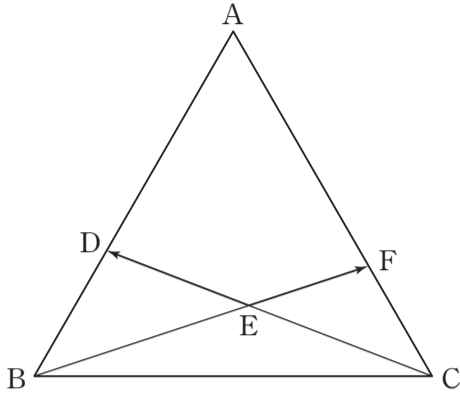
16. 포물선 $y^2=4x$ 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 두 초점이 F(1, 0), F'(-1, 0)인 타원을 C라 하자. 타원 C 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점 Q의 y 좌표는 음수이다.
 (나) 사각형 PF'QF는 평행사변형이다.

사각형 PF'QF의 둘레의 길이가 8일 때, 사각형 PF'QF의 넓이는? [4점]

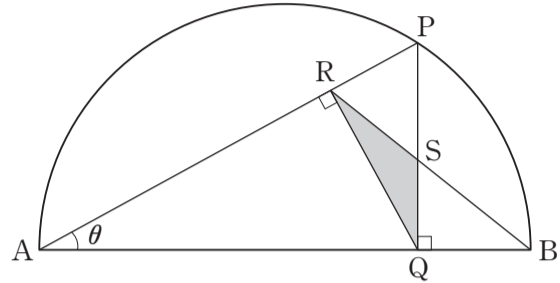
- ① $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ ② $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ 4

17. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 ABC 에서 선분 AB 를 2:1로 내분하는 점을 D 라 하고, 선분 DC 의 중점을 E 라 할 때, 선분 AC 와 직선 BE 의 교점을 F 라 하자. $|\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EF}|$ 의 값은? [4점]



- ① $\sqrt{73}$ ② $\sqrt{74}$ ③ $5\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{19}$ ⑤ $\sqrt{77}$

18. 그림과 같이 두 점 A, B 를 지름의 양 끝점으로 하고, 지름의 길이가 1인 반원과 호 AB 위를 움직이는 점 P 가 있다. 점 P 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 Q , 점 Q 에서 선분 AP 에 내린 수선의 발을 R , 선분 PQ 와 선분 RB 의 교점을 S 라 하자. $\angle PAB = \theta$ 라 할 때, 삼각형 QSR 의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

19. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에서 X 로의 함수 f 가 $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)$, $f(6)<f(5)<f(4)$ 를 만족시킬 때, 다음은 치역의 원소의 개수가 4인 함수 f 의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f 의 치역의 원소 중에서 가장 큰 값은 $f(4)$ 이고, 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 4이므로 $f(4)\geq 4$ 이다. 이때 $f(4)=k(k=4, 5, 6)$ 으로 놓자.

(i) $f(6)<f(5)<f(4)$ 이므로 $f(5)$, $f(6)$ 의 값을 정할 때, 그 경우의 수는 이다.

(ii) 함수 f 의 치역의 원소 중 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 이 아닌 원소를 a 라 하면

$$a < f(4), a \neq f(5), a \neq f(6)$$

이므로 a 의 값을 정할 때, 그 경우의 수는 $(k-3)$ 이다.

(iii) (ii)의 각각의 경우에 대하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값을 정할 때, 그 경우의 수는 이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$\sum_{k=4}^6 \{ \text{>} \times (k-3) \times \text{>} \} = \text{>}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $h(k)$ 라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p , q 라 할 때, $h(p-5)+q$ 의 값은? [4점]

- ① 444 ② 448 ③ 452 ④ 456 ⑤ 460

20. 함수 $f(x)=\frac{5x^2}{e^x}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=(f\circ f)(x)$

라 하자. 실수 t 에 대하여 방정식 $g(x)=t$ 의 실근의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $7 < e^2 < 8$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.) [4점]

— <보 기> —

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $\frac{20}{e^2}$ 이다.

ㄴ. 집합 $A=\{a \mid g'(a)=0, a \text{는 실수}\}$ 의 원소의 개수는 5이다.

ㄷ. $h(t)$ 의 최댓값은 6이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 와 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(4+h)-1}{h} = 1$
 (나) 모든 양수 x 에 대하여 $\int_4^x f(t)dt = \int_4^x \left\{ \frac{g(\sqrt{t})}{x} - \frac{g(\sqrt{t})}{t} \right\} dt$ 이다.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$ 에서의 접선의 y 절편은? [4점]

- ① 232 ② 234 ③ 236 ④ 238 ⑤ 240

단답형

22. ${}_8C_5$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = e^{2x} - \cos 4x$ 에 대하여 $f''(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

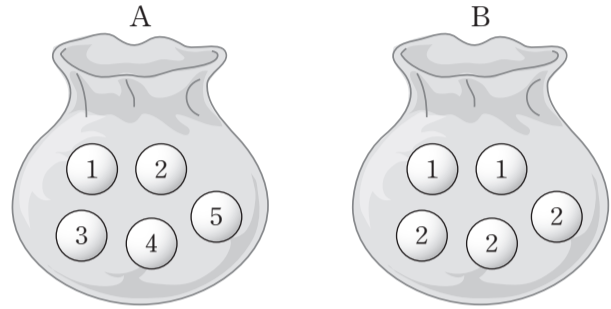
24. $(ax^2 + \frac{1}{3x})^5$ 의 전개식에서 x 의 계수가 30일 때, 양수 a 의 값을 구하시오. [3점]

26. 곡선 $y = \sqrt{9-x} - 2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $6S$ 의 값을 구하시오. [4점]

25. $\lim_{x \rightarrow \infty} x\{\ln(2x+5) - \ln(2x-1)\}$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 좌표평면에서 곡선 $\sin x \cos y = \frac{1}{3}$ 위의 점 (a, b)
 $(0 \leq a < \pi, 0 \leq b < \pi)$ 에서의 접선의 기울기가 1일 때,
 $\sin b \cos a = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는
 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는
 5개의 구슬이 들어 있고, 주머니 B에는 1, 1, 2, 2, 2의
 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 구슬이 들어 있다. 주머니
 A에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에
 적혀 있는 수를 차례로 a_1, a_2 라 하고, 주머니 B에서 공을
 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수를
 차례로 b_1, b_2 라 하자. $a_1 \geq 3$ 일 때, $a_1 b_1 < a_2 b_2$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다.
 $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 한 번 꺼낸 공은 주머니에 다시
 넣지 않으며, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 한 평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, P가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad |\overrightarrow{AC}| = 4 \text{이고, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 \text{이다.}$$

$$(나) \quad \frac{|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}|} = 2 \text{이고, } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} \text{의 최댓값이 } 20 \text{이다.}$$

선분 AB의 길이가 $\sqrt{p} - q$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하시오.
(단, p, q 는 자연수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x)e^x$$

이라 하자. 실수 t 에 대하여 함수 $y = |g(x) - g(t)|$ 가 미분가능하지 않은 실수 x 의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, 함수 $h(t)$ 는 $t = \alpha$ 에서만 불연속이다. $g(\alpha) = 2$ 일 때, $f(\alpha)$ 의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ 이고, α 는 상수이다.) [4점]

♣ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.