• 2교시 수학 영역 •

1	②	**2**	③	**3**	⑤	**4**	③	**5**	②
6	⑤	**7**	④	**8**	④	**9**	③	**10**	④
11	①	**12**	②	**13**	①	**14**	②	**15**	③
16	⑤	**17**	③	**18**	①	**19**	①	**20**	④
21	⑤	**22**	6	**23**	9	**24**	3	**25**	8
26	4	**27**	13	**28**	22	**29**	126	**30**	48

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(x^2+2xy-1)+(-2x^2+xy+1)$
$\quad=-x^2+3xy$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A-B=\{1,3,5\}$이므로 $n(A-B)=3$

3. [출제의도] 복소수 계산하기

$z=2+i$에서 $\bar{z}=2-i$

$z+i\bar{z}=(2+i)+i(2-i)$
$\quad=(2+i)+(2i+1)$
$\quad=(2+i)+(1+2i)$
$\quad=3+3i$

4. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

부등식 $|x-2|\le 3$에서

$-3\le x-2\le 3$

$-1\le x\le 5$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

$5-(-1)+1=7$

5. [출제의도] 직선의 방정식 이해하기

두 점 $(-2,5)$, $(1,1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{1-5}{1-(-2)}(x-1)+1=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{3}$

이므로 직선의 y절편은 $\dfrac{7}{3}$

6. [출제의도] 항등식 이해하기

주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$2x^2+ax+1=bx^2+(b+1)x+1$

항등식의 성질을 이용하여 양변에서 동류항의 계수를 비교하면

$b=2$, $a=b+1=3$

따라서 $a+b=5$

7. [출제의도] 연립부등식 계산하기

$\begin{cases}2x-6\ge 0 & \cdots ㉠\\ x^2-8x+12\le 0 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x\ge 3$이고

㉡에서 $(x-2)(x-6)\le 0$, $2\le x\le 6$

이므로 $3\le x\le 6$

따라서 연립부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은 $3+4+5+6=18$

8. [출제의도] 상수함수 이해하기

함수 $f(x)$는 상수함수이므로 $f(0)=f(2)=f(4)$

$f(0)=2$, $f(2)=4+2a+b$, $f(4)=16+4a+b$이므로

$f(0)=f(2)$에서 $2a+b=-2$ ⋯ ㉠

$f(0)=f(4)$에서 $4a+b=-14$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=-6$, $b=10$

따라서 $a+b=4$

9. [출제의도] 합성함수 이해하기

$(g\circ f)(3)+(g\circ f)^{-1}(9)$
$=(g\circ f)(3)+(f^{-1}\circ g^{-1})(9)$
$=g(f(3))+f^{-1}(g^{-1}(9))$
$=g(1)+f^{-1}(7)=6+6=12$

10. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기

두 점 $(-3,0)$, $(1,0)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 C라 하면 원 C는 중심의 좌표가 $(-1,0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

원 C와 직선 $kx+y-2=0$이 오직 한 점에서 만나려면 원 C의 중심인 점 $(-1,0)$과 직선 $kx+y-2=0$ 사이의 거리는 2이어야 한다.

$\dfrac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$

$|-k-2|=2\sqrt{k^2+1}$

$k^2+4k+4=4(k^2+1)$

$3k^2-4k=k(3k-4)=0$

$k=0$ 또는 $k=\dfrac{4}{3}$

따라서 양수 k의 값은 $\dfrac{4}{3}$

11. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

삼차방정식 $x^3+(k+1)x^2+(4k-3)x+k+7=0$의 한 근이 1이므로

$1+(k+1)+(4k-3)+k+7=0$, $6k+6=0$, $k=-1$

삼차방정식 $x^3-7x+6=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$
$\quad=(x-1)(x-2)(x+3)=0$

이므로 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$

따라서 $|\alpha-\beta|=2-(-3)=5$

12. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점 이해하기

두 점 B, C의 좌표를 각각 (c,d), (e,f)라 하면 선분 BC의 중점의 좌표가 $(1,2)$이므로

$\dfrac{c+e}{2}=1$, $\dfrac{d+f}{2}=2$

$c+e=2$, $d+f=4$

삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로

$\dfrac{a+c+e}{3}=\dfrac{a+2}{3}=0$, $a=-2$

$\dfrac{b+d+f}{3}=\dfrac{b+4}{3}=0$, $b=-4$

따라서 $a\times b=8$

13. [출제의도] 명제 사이의 관계 이해하기

$x^2-6x+9=(x-3)^2\le 0$에서 $x=3$이므로

실수 x에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{3\}$, $Q=\{x\,|\,|x-a|\le 2\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$

$3\in P$에서 $3\in Q$이므로

$|3-a|\le 2$, $-2\le 3-a\le 2$, $1\le a\le 5$

따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은 $5+1=6$

14. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기

z^2이 실수가 되려면

$m-n=0$ 또는 $m+n-4=0$이어야 한다.

$m=n$ 또는 $m+n=4$

(i) $m=n$일 때

$m=n$을 만족시키는 5 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍은

$(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$

(ii) $m+n=4$일 때

$m+n=4$를 만족시키는 5 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍은

$(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$

(i), (ii)에서 $(2,2)$는 중복되므로

z^2이 실수가 되도록 하는 5 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m,n)의 개수는 7

15. [출제의도] 대칭이동을 이용하여 추론하기

$\overline{\mathrm{BP}}=3$이므로 점 P는 중심이 B이고 반지름의 길이가 3인 원 위에 있다.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 점 A′의 좌표는 $(-3,-2)$이다.

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$에서

두 점 P, Q가 모두 선분 A′B 위에 있을 때

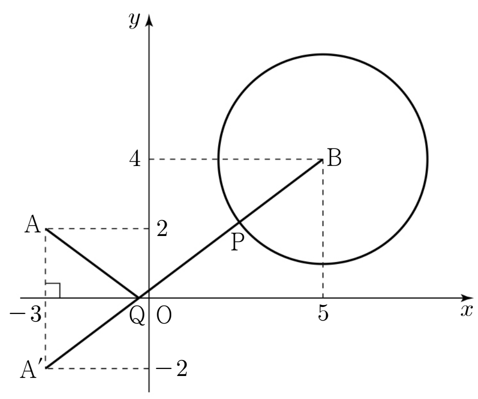
$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}$는 최소이고, 그 값은

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{\{5-(-3)\}^2+\{4-(-2)\}^2}=10$이다.

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+3$에서

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최소일 때 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$도 최소이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$의 최솟값은 $10-3=7$



16. [출제의도] 인수분해 이해하기

$(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)+a$
$=(x-1)(x-8)(x-4)(x-5)+a$
$=(x^2-9x+8)(x^2-9x+20)+a$

$x^2-9x=X$라 하면

$(X+8)(X+20)+a=X^2+28X+160+a$

이고 이 식이 완전제곱식이 되려면

$160+a=196$, $a=36$

$X^2+28X+196=(X+14)^2$
$\quad=(x^2-9x+14)^2$
$\quad=\{(x-2)(x-7)\}^2$
$\quad=(x-2)^2(x-7)^2$

따라서 $a+b+c=36+(-2)+(-7)=27$

17. [출제의도] 이차함수의 최대와 최소를 이용하여 추론하기

(i) $-1\le x\le 2$일 때

$f(x)\times f(|x-2|)$
$=f(x)\times f(-x+2)$
$=(x-3)(-x-1)$
$=-x^2+2x+3$
$=-(x-1)^2+4$

이므로 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$는

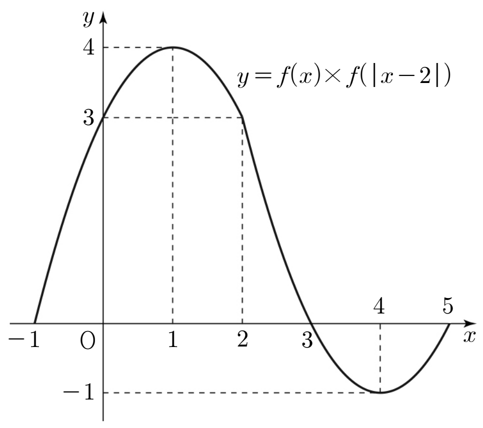
$x=1$일 때 최댓값 4,
$x=-1$일 때 최솟값 0을 갖는다.

(ii) $2 \le x \le 5$일 때

$f(x)\times f(|x-2|)$
$=f(x)\times f(x-2)$
$=(x-3)(x-5)$
$=x^2-8x+15$
$=(x-4)^2-1$

이므로 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$는
$x=2$일 때 최댓값 3,
$x=4$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

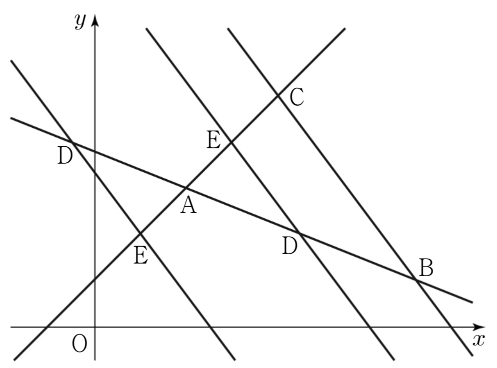
따라서 (i), (ii)에 의하여
$-1 \le x \le 5$에서 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$의
최댓값과 최솟값의 합은 $4+(-1)=3$



18. [출제의도] 나머지정리를 활용하여 문제해결하기

조건 (가)에서 인수정리에 의하여
$f(4)-f(1)=0,\ f(4)=f(1)$
$f(1)-f(-2)=0,\ f(1)=f(-2)$
이므로 $f(-2)=f(1)=f(4)$
$f(-2)=f(1)=f(4)=k$ (k는 상수)
라 하면 $f(x)=(x+2)(x-1)(x-4)+k$
조건 (나)에서 나머지정리에 의하여
$f(2)=4\times1\times(-2)+k=-8+k=-3,\ k=5$
따라서 $f(0)=2\times(-1)\times(-4)+5=13$

19. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점을 활용하여 문제해결하기



직선 BC와 직선 DE가 서로 평행하므로
삼각형 ABC와 삼각형 ADE는 서로 닮음이다.
삼각형 ABC와 삼각형 ADE의 넓이의 비가
$4:1$이므로 $\overline{AB}:\overline{AD}=2:1$
그러므로 점 D는 선분 AB의 중점이거나
선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점이다.

(i) 점 D가 선분 AB의 중점일 때
선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{2+7}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)$이므로
점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{2},\ 2\right)$

(ii) 점 D가 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점일 때
선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{1\times7-3\times2}{1-3},\ \dfrac{1\times1-3\times3}{1-3}\right)$이므로
점 D의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 4\right)$

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 점 D의 y좌표의 곱은 $2\times4=8$

20. [출제의도] 원의 방정식을 이용하여 추론하기

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.
그러므로 점 O를 지나고 직선 AB와 점 A에서 접하는 원을 C라 할 때, 삼각형 OAB의 내부에 있으며 $\angle AOP=\angle BAP$를 만족시키는 점 P는 원 C 위의 점이다.
원 C의 중심을 C라 하면 $\angle OAC=45°$이므로
점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{k}{2},\ \boxed{-\dfrac{k}{2}}\right)$이고
원 C의 반지름의 길이는 선분 AC의 길이와 같다.

$$\overline{AC}=\sqrt{\left(k-\frac{k}{2}\right)^2+\left(0+\frac{k}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}k$$

이므로 원 C의 반지름의 길이는 $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}k}$이다.
점 P의 y좌표는 $\angle PCO=45°$일 때 최대이고
점 P의 y좌표의 최댓값은 원 C의 중심의 y좌표와 원 C의 반지름의 길이의 합이므로

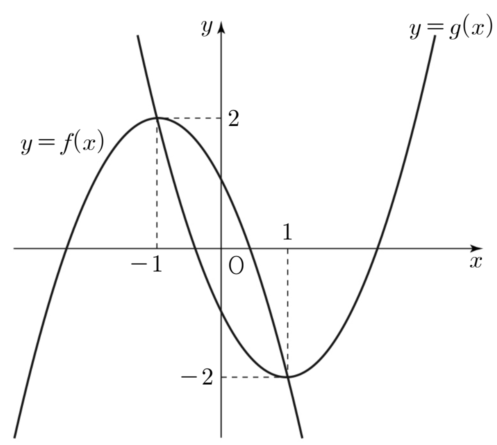
$$M(k)=-\frac{k}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}k=\left(\boxed{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times k$$

이다.
따라서 $f(k)=-\dfrac{k}{2},\ g(k)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}k,\ p=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$
이므로

$$f(p)+g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}-1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{4}$$

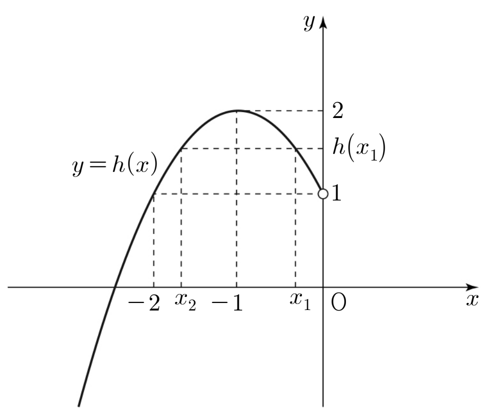
21. [출제의도] 일대일대응을 이용하여 추론하기

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=h(x)$의 그래프는
$x<a$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고
$x \ge a$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄱ. $a=0$일 때
$x<0$에서 $h(x)=f(x)$이고
$x<0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.

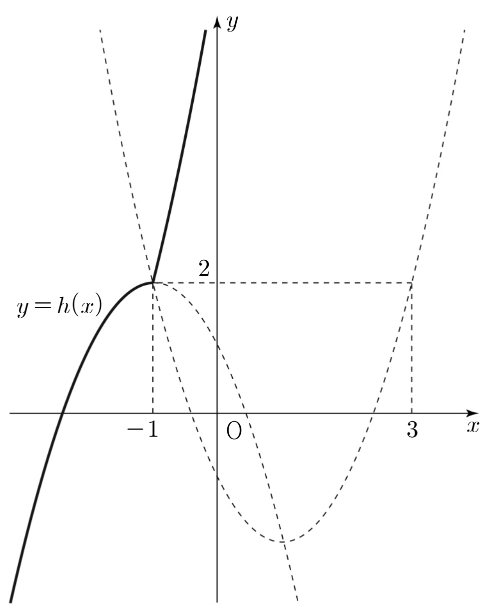


$-1<x_1<0$인 실수 x_1에 대하여
$h(x_1)=h(x_2)$이고 $-2<x_2<-1$인 실수 x_2가 존재하므로 함수 $h(x)$는 일대일대응이 아니다.
따라서 $(0,k)\in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $a=-1,\ b=4$일 때
함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}-(x+1)^2+2 & (x<-1)\\ (x+3)^2-2 & (x\ge -1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$x_1 \ne x_2$인 임의의 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여
$h(x_1)\ne h(x_2)$이므로 함수 $h(x)$는 일대일함수이고, 함수 $h(x)$의 치역은 실수 전체의 집합으로 공역과 같다.
따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로
$(-1,4)\in A$ (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$가 일대일함수이려면
$x<a$에서 $h(x)=f(x)$이므로 $a \le -1$ ⋯ ㉠
$x \ge a$에서 $h(x)=g(x+b)$이므로
$a+b \ge 1$ ⋯ ㉡
이어야 하고
㉠, ㉡을 만족시키는 함수 $h(x)$에 대하여
$\{h(x)\mid x<a\}=\{f(x)\mid x<a\}=\{y\mid y<f(a)\}$
$\{h(x)\mid x\ge a\}=\{g(x+b)\mid x\ge a\}=\{y\mid y\ge g(a+b)\}$
이므로 $f(a)\le g(a+b)$이어야 한다.
일대일함수 $h(x)$가 일대일대응이 되기 위해서는 치역과 공역이 같아야 하므로
$f(a)=g(a+b)$ ⋯ ㉢
$g(x)=(x-1)^2-2 \ge -2$이므로
$f(a)\ge -2,\ (a+3)(a-1)\le 0,$
$-3\le a\le 1$ ⋯ ㉣
㉠, ㉣에 의하여
함수 $h(x)$가 일대일대응이 되도록 하는
실수 a의 범위는 $-3\le a\le -1$이고
$(m,b)\in A$를 만족시키는 실수 b가 존재하도록

하는 정수 m의 값은 -3, -2, -1이다.

(ⅰ) $m=-3$일 때

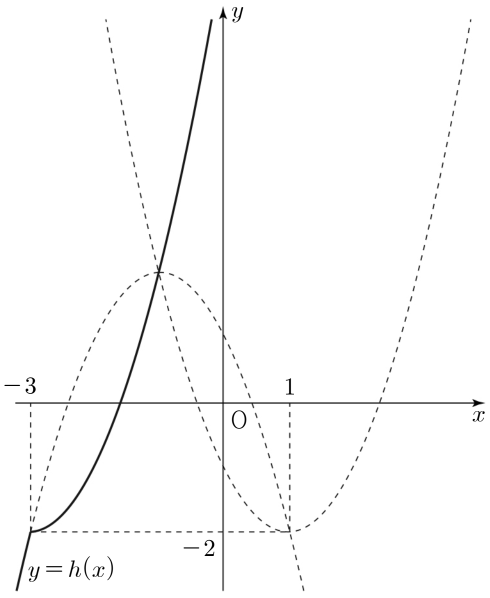
㉡에 의하여 $-3+b \geq 1$, $b \geq 4$

㉢에 의하여 $f(-3)=g(-3+b)$

$-2=(-3+b)^2-2(-3+b)-1$

$b^2-8b+16=0$

$b=4$이므로 $m+b=1$



(ⅱ) $m=-2$일 때

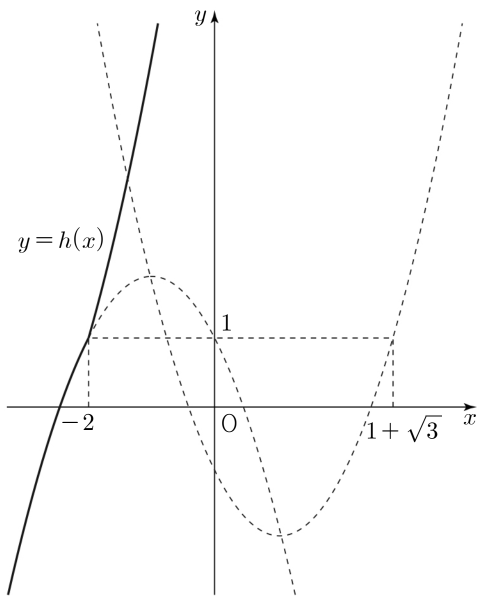
㉡에 의하여 $-2+b \geq 1$, $b \geq 3$

㉢에 의하여 $f(-2)=g(-2+b)$

$1=(-2+b)^2-2(-2+b)-1$

$b^2-6b+6=0$

$b=3+\sqrt{3}$이므로 $m+b=1+\sqrt{3}$



(ⅲ) $m=-1$일 때

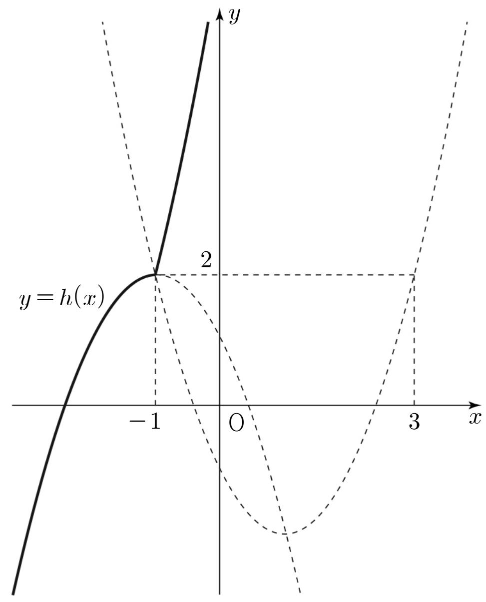
㉡에 의하여 $-1+b \geq 1$, $b \geq 2$

㉢에 의하여 $f(-1)=g(-1+b)$

$2=(-1+b)^2-2(-1+b)-1$

$b^2-4b=0$

$b=4$이므로 $m+b=3$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$\{m+b \mid (m, b) \in A$이고 m은 정수$\}$

$=\{1, 1+\sqrt{3}, 3\}$

이므로 모든 원소의 합은

$1+(1+\sqrt{3})+3=5+\sqrt{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 평행이동 이해하기

점 $(2, -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2+a, 4)$이므로 $2+a=4$, $a=2$이고 $b=4$

따라서 $a+b=6$

23. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

$x^2+4x+k=-2x+1$에서 $x^2+6x+k-1=0$

이차방정식 $x^2+6x+k-1=0$의 판별식을 D라 하자.

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 한다.

$D=6^2-4(k-1)=-4k+40>0$에서 $k<10$

따라서 자연수 k의 최댓값은 9

24. [출제의도] 연립이차방정식 계산하기

$$\begin{cases} 2x-y-1=0 & \cdots ㉠ \\ 4x^2-6y+3=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡에서

$4x^2-6(2x-1)+3=0$

$4x^2-12x+9=0$, $(2x-3)^2=0$에서 $x=\frac{3}{2}$, $y=2$

따라서 $\alpha \times \beta = \frac{3}{2} \times 2 = 3$

25. [출제의도] 절대부등식 이해하기

두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 각각 $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{b}$이고 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$에서 $ab=2$이다.

$(a+1)(b+2)=ab+2a+b+2=4+2a+b$

$a>0$, $b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+b \geq 2\sqrt{2ab}=4$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

따라서 $(a+1)(b+2)$의 최솟값은 8

26. [출제의도] 사차방정식을 활용하여 문제해결하기

$x^2+kx=X$라 하면

$(x^2+kx+2)(x^2+kx+6)+3=0$

$(X+2)(X+6)+3=0$

$X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$

$(x^2+kx+3)(x^2+kx+5)=0$

두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+kx+5=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=k^2-12$, $D_2=k^2-20$

사차방정식 $(x^2+kx+2)(x^2+kx+6)+3=0$이 실근과 허근을 모두 가지려면

$D_1<0$, $D_2 \geq 0$ 또는 $D_1 \geq 0$, $D_2<0$이어야 한다.

$D_1<0$, $D_2 \geq 0$에서 $k^2<12$, $k^2 \geq 20$을 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.

$D_1 \geq 0$, $D_2<0$에서 $12 \leq k^2<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 4이다.

따라서

사차방정식 $(x^2+kx+2)(x^2+kx+6)+3=0$이 실근과 허근을 모두 갖도록 하는 자연수 k의 값은 4

27. [출제의도] 합성함수를 이용하여 추론하기

함수 f는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

조건 (가)에서 $(f \circ f)(-1)=2$, $f^{-1}(-2)=2$이므로

$f(f(-1))=2$, $f(2)=-2$

$f(-1)=a$라 하면 $f(a)=2$에서 $a \neq -1$, $a \neq 2$이므로

$a=0$ 또는 $a=1$

(ⅰ) $f(-1)=0$일 때

$f(f(-1))=f(0)=2$

조건 (나)에서

$f(0) \times f(-2) \leq 0$이고 $f(1) \times f(-1) \leq 0$이므로

$f(-2)=-1$, $f(1)=1$

(ⅱ) $f(-1)=1$일 때

$f(f(-1))=f(1)=2$

$f(1) \times f(-1)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $6f(0)+5f(1)+2f(2)=12+5-4=13$

28. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 추론하기

집합 $B-A$의 모든 원소의 합을 k라 하자.

$A \cup B^C=(A^C \cap B)^C=(B-A)^C$이고

조건 (가)에서 집합 $A \cup B^C$의 모든 원소의 합은 $6k$이므로 전체집합 U의 모든 원소의 합은 $7k$이다.

$7k=1+2+4+8+16+32=63$, $k=9$

집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 9이므로

$B-A=\{1, 8\}$

$A \cap (B-A)=\varnothing$이므로

$A \subset (B-A)^C=\{2, 4, 16, 32\}$

$A \cup B=A \cup (B-A)$

$n(A \cup B)=n(A)+n(B-A)$

이고 조건 (나)에서 $n(A \cup B)=5$이므로 $n(A)=3$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은

$A=\{2, 4, 16\}$일 때 $2+4+16=22$

29. [출제의도] 다항식의 연산을 활용하여 문제해결하기

정사각뿔 $\mathrm{O-ABCD}$의 부피는

$\frac{1}{3} \times a^2 \times \sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

정사각뿔 $\mathrm{O-EFGH}$의 부피는

$\frac{1}{3} \times b^2 \times \sqrt{b^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}b^3$

두 정사각뿔 $\mathrm{O-ABCD}$, $\mathrm{O-EFGH}$의 부피의 합이

$2\sqrt{2}$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{6}(a^3+b^3)=2\sqrt{2}$, $a^3+b^3=12$

점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 BFI는 $\angle FBI=60°$인 직각삼각형이므로

$\overline{FI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{FB}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$,

$\overline{BI}=\frac{1}{2}\overline{FB}=\frac{1}{2}(a-b)$에서

$\overline{AI}=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$

삼각형 FAI는 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{AF}^2&=\overline{FI}^2+\overline{AI}^2\\&=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2\\&=\frac{3}{4}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)\\&=a^2-ab+b^2=4\end{aligned}$$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\times 4=12$이므로

$a+b=3$

$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab=3^2-3ab=4$이므로

$ab=\frac{5}{3}$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=3^2-4\times\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$이므로

$a-b=\frac{\sqrt{21}}{3}$

사각형 ABFE의 넓이는 정삼각형 OAB의 넓이에서 정삼각형 OEF의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned}S&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-b^2)\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)(a-b)\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3\times\frac{\sqrt{21}}{3}=\frac{3}{4}\sqrt{7}\end{aligned}$$

따라서 $32\times S^2=32\times\frac{63}{16}=126$

30. [출제의도] 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=mx+4a$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$A(\alpha, a\alpha^2)$, $B(\beta, a\beta^2)$

이차방정식 $ax^2-mx-4a=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{m}{a}$, $\alpha\beta=-4$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 $\angle BOA=90°$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\begin{aligned}\frac{a\alpha^2-0}{\alpha-0}\times\frac{a\beta^2-0}{\beta-0}&=a\alpha\times a\beta\\&=a^2\times\alpha\beta\\&=-4a^2=-1\end{aligned}$$

에서 양수 a의 값은 $\frac{1}{2}$

점 $P\left(k, \frac{k^2}{2}\right)$은 원 C 위의 점이므로 $\angle APB=90°$

직선 PA의 기울기와 직선 PB의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{\alpha^2}{2}-\frac{k^2}{2}}{\alpha-k}\times\frac{\frac{\beta^2}{2}-\frac{k^2}{2}}{\beta-k}\\&=\frac{1}{4}(\alpha+k)(\beta+k)\\&=\frac{1}{4}\{k^2+(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}\\&=\frac{1}{4}(k^2+2mk-4)=-1\end{aligned}$$

$k^2+2mk=0$, $k=-2m$이고 $P(-2m, 2m^2)$

점 $P(-2m, 2m^2)$과 직선 $y=mx+2$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$d_1=\frac{|m\times(-2m)-2m^2+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|-4m^2+2|}{\sqrt{m^2+1}}$

점 O와 직선 $y=mx+2$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$d_2=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$

삼각형 ABP와 삼각형 AOB의 넓이의 비는 $d_1 : d_2$이므로

$\frac{|-4m^2+2|}{\sqrt{m^2+1}} : \frac{2}{\sqrt{m^2+1}}=5:1$에서

$|-4m^2+2|=10$, $m^2=3$

m은 양수이므로 $m=\sqrt{3}$, $k=-2\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $g(x)=\sqrt{3}x+2$이므로

$f(k)\times g(-k)=6\times 8=48$