한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
307402

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 '0'점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[1-1] 원의 중심을 O 라고 할 때, 호의 길이가 t인 부채꼴 POQ의 중심각을 θ 라고 할 때,

$1\times\theta=t$ 이므로 $\theta=t$ 이다.

$\therefore f(t)=2\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{t}{2}$

$g(t)=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta-1\times1\times\sin\theta\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)=\frac{1}{2}(t-\sin t)$

$\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}(t-\sin t)}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{4}\times\left(\lim_{t\to0+}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}-\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2}}\right)$

$=\frac{1}{4}(2-2)=0$

[1-2] 원의 중심을 O 라고 할 때, 호의 길이가 다 같은 부채꼴 P_kOP_{k+1} $(k=0,1,\cdots,n)$의 중심각의 크기는 $\frac{2\pi}{n}$ 이다.

따라서, 부채꼴 P_0OP_l $(l=1,2,\cdots,n-1)$의 중심각의 크기는 $\frac{2l\pi}{n}$ 이고

$\overline{P_0P_l}$ 은 부채꼴 P_0OP_l의 현이라고 볼 수 있으므로

$\overline{P_0P_l}=2\sin\frac{\frac{2l\pi}{n}}{2}=2\sin\frac{l\pi}{n}$ 이다.

$\frac{\overline{P_0P_1}+\overline{P_0P_2}+\cdots+\overline{P_0P_{n-1}}}{n}=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{2}{n}\sin\frac{l\pi}{n}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{2}{n}\sin\frac{l\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{2}{n}\sin\frac{l\pi}{n}-\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\frac{2}{n}\sin\frac{l\pi}{n}$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}(1-(-1))$

$=\frac{4}{\pi}$

[1-3]

$S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2\pi}{n}-1\times1\times\sin\frac{2\pi}{n}\times\frac{1}{2}$

$S_2=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{4\pi}{n}-1\times1\times\sin\frac{4\pi}{n}\times\frac{1}{2}$

$\vdots$

$S_k=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2k\pi}{n}-1\times1\times\sin\frac{2k\pi}{n}\times\frac{1}{2}=\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}$

$\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2-\frac{1}{n}\left(\frac{n\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2n\pi}{n}\right)^2\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2-\frac{\pi^2}{n}\right)$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\sin2x\right)^2dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2-x\sin2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)dx$

$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}x^2dx-\int_0^{\pi}x\sin2x\,dx+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx\right)$

$\int_0^{\pi}x\sin2x\,dx$ 에서,

$\int_0^{\pi}x\sin2x=\left[-\frac{1}{2}x\cos2x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)dx$

$=\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)-\left[-\frac{1}{4}\sin2x\right]_0^{\pi}$

$=-\frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx$ 에서,

$\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx=\int_0^{\pi}(1-\cos^2 2x)\,dx$ $\quad\cos^2 2x=\frac{1+\cos4x}{2}$ 이므로,

$\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1+\cos4x}{2}\right)dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos4x}{2}dx$

$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin4x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}x^2dx-\int_0^{\pi}x\sin2x\,dx+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx\right)$

$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{5}{8}\pi\right)=\frac{\pi^2}{3}+\frac{5}{8}$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

310348

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 '0'점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

제시문을 이용하면 호 PQ의 중심각이 t이다.

원의 중심에서 현 PQ로 수선의 발을 내리면

이등변 삼각형이 만들어 지고 이등변 삼각형

성질을 이용하면 $f(t)=2\sin(\frac{1}{2}t)$ 이고

부채꼴의 넓이에서 중심에서 점 P, Q로

각각 내린 선분과 $\overline{PQ}$에 의해 둘러싸인

넓이를 빼면 $g(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\sin t$ 이다.

1) $\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\sin t}{2\sin\frac{1}{2}t}$ 는

$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\times\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)$ 이다.

$\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}=0$ 으로 수렴하고, $\lim_{t\to 0+}1-\frac{\sin t}{t}=0$

으로 수렴한다.

따라서 $\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\times\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)=0$ 이다

2) $\overline{P_0P_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots=\overline{P_{n-1}P_n}$ 이므로 중심각의 크기는

$\frac{2\pi}{n}$으로 같다. 따라서 각 현의 중심각은

현 $P_0P_k=\frac{2k}{n}\pi$ 이다

$f(t)$를 구하는 방식으로 현 P_0P_k를 구하면

현 $P_0P_k=2\sin\frac{k}{n}\pi$ 이다. $\overline{P_0P_n}=\overline{P_0P_0}=0$ 이라고 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_0P_1}+\overline{P_0P_2}+\cdots+\overline{P_0P_{n-1}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_0P_1}+\overline{P_0P_2}+\cdots+\overline{P_0P_n}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\overline{P_0P_k}\times\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{k}{n}\pi\right)\times\frac{1}{n}$ 이다.

$=2\int_0^1\sin(\pi x)dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{4}{\pi}$ 이다.

3) $\overline{P_0P_k}=f\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$ 이고 $S_k=g\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$ 이다

$S_k=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{n}k-\sin\frac{2\pi}{n}k\right)$

$S_k^2=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{2\pi}{n}k\right)^2-2\left(\frac{2\pi}{n}k\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right)\right)+\left(\sin\frac{2\pi}{n}k\right)^2\right)$

$S_n=\pi$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2-\pi^2}{n}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+S_3^2\cdots S_n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n}\left(\left(\frac{2\pi}{n}k\right)^2-2\left(\frac{2\pi}{n}k\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right)\right)+\left(\sin\frac{2\pi}{n}k\right)^2\right)$

$=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}x^2-2x\sin x+\sin^2 x\,dx=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}x^2-2x\sin x+\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{1}{8\pi}\left\{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2\pi}+\left[2x\cos x\right]_0^{2\pi}-\left[2\sin x\right]_0^{2\pi}+\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi}-\left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{2\pi}\right.$

$=\frac{1}{3}\pi^2+\frac{5}{8}$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨