

제 2 교시

수학 영역 B형



1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A+2B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]
- ① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

2. $\cot \theta=2$ 일 때, $\cos 2\theta$ 의 값은? [2점]
- ① $\frac{3}{10}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{5}$

⑤ $\frac{7}{10}$

3. 함수 $f(x)=\sqrt{\ln x}$ 에 대하여 $f'(e)$ 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑이다.) [2점]
- ① $\frac{1}{2e}$

② $\frac{1}{e\sqrt{2}}$

③ $\frac{1}{e}$

④ $\frac{1}{\sqrt{2}e}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{e}}$

4. 방정식 $\sqrt{4x^2+1}=x^2-5$ 의 모든 실근의 곱은? [3점]
- ① -10

② -12

③ -14

④ -16

⑤ -18

5. 표본공간 S 의 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(B^c) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

일 때, $P(A|B)$ 의 값은? (단, B^c 는 B 의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{5}{8}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{7}{8}$

7. 함수 $f(x)$ 가 모든 양의 실수 x 에 대하여 등식

$$(x-1)f(x) = \ln(x^2 + a)$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속일 때, $f(1)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

① 1

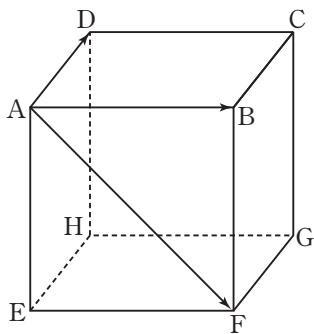
② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

6. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}|$ 의 값은? [3점]



① 2

② $\sqrt{5}$

③ $\sqrt{6}$

④ $\sqrt{7}$

⑤ $2\sqrt{2}$

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 등식

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{e^x} - a$$

를 만족시킬 때, $\int_{-a}^a \{f(x)\}^2 dx$ 의 값은? (단, a 는 상수이고, e 는 자연로 그의 밑이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$ ② $\frac{1}{3}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$
 ③ $\frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$ ④ $e^2 - \frac{1}{e^2}$
 ⑤ $2\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$

9. 온도가 5°C 인 물이 담겨 있는 어느 그릇에 얼음 1kg 을 넣은 지 $t(0 \leq t \leq 10)$ 분 후의 물의 온도를 $T(^{\circ}\text{C})$ 라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$T = 5 + a \log_2(2t + 1) \quad (\text{단, } a \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

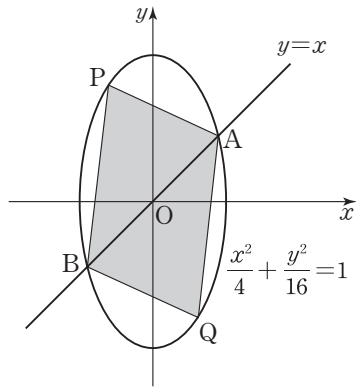
온도가 5°C 인 물이 담겨 있는 이 그릇에 얼음 1kg 을 넣은 지 1분 30초 후의 물의 온도가 3°C 이었고, 그 후 p 분이 더 흐른 후의 물의 온도가 1°C 이었다. p 의 값은? [3점]

- ① 5 ② $\frac{11}{2}$
 ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$
 ⑤ 7

10. 좌표공간에서 네 평면 $x=2, y=3, z=1, x+y+z=9$ 로 둘러싸인 사면체의 부피는? [3점]

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5
 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6
 ⑤ $\frac{13}{2}$

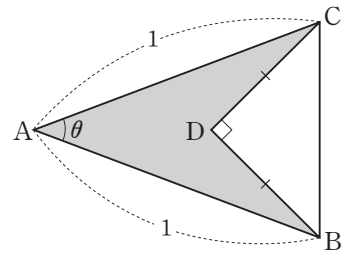
11. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 과 직선 $y=x$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 이 타원 위의 두 점 P, Q를 사각형 APBQ의 넓이가 최대가 되도록 잡을 때, 선분 PQ의 길이는? (단, 두 점 P, Q는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 다른 쪽에 있다.) [3점]



- ① $\frac{\sqrt{85}}{5}$
 ③ $\frac{3\sqrt{85}}{5}$
 ⑤ $\sqrt{85}$

- ② $\frac{2\sqrt{85}}{5}$
 ④ $\frac{4\sqrt{85}}{5}$

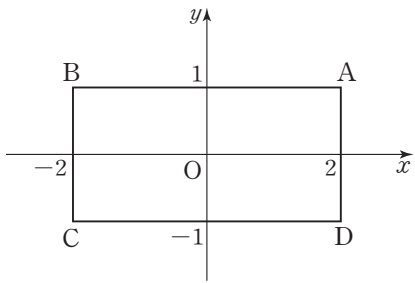
12. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AC}=1$, $\angle BAC=\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)인 삼각형 ABC의 내부에 $\overline{BD}=\overline{CD}$, $\angle BDC=\frac{\pi}{2}$ 인 점 D가 있다. 도형 ABDC(어두운 부분)의 넓이의 최댓값은? [3점]



- ① $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$
 ③ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

- ② $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

[13~14] 좌표평면 위에 네 점 $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$, $C(-2, -1)$, $D(2, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 있다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 곡선 $y = \log_a(x+b) + c$ 의 점근선은 직선 BC이고, 이 곡선이 원점 O와 점 D를 지날 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.) [3점]

- | | |
|-----------------|-----|
| ① $\frac{3}{2}$ | ② 2 |
| ③ $\frac{5}{2}$ | ④ 3 |
| ⑤ $\frac{7}{2}$ | |

14. 일차변환 f 에 의하여 점 A가 점 C로 옮겨지고, 점 D가 점 A로 옮겨진다. 합성변환 $f \circ f$ 에 의하여 선분 BC 위의 점 P가 점 $(1, \frac{1}{2})$ 로 옮겨질 때, 점 P의 y 좌표는? [4점]

- | | |
|------|------------------|
| ① -1 | ② $-\frac{1}{2}$ |
| ③ 0 | ④ $\frac{1}{2}$ |
| ⑤ 1 | |

15. 첫째항이 15인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$a_{n+1} = S_n + n \times 4^{n+1} + 1 \quad (n \geq 1) \quad \text{㉠}$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

㉠으로부터

$$a_n = S_{n-1} + (n-1) \times 4^n + 1 \quad (n \geq 2) \quad \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 각 변끼리 뺀 식을 정리하면

$$a_{n+1} = 2a_n + (3n+1) \times 4^n \quad (n \geq 2)$$

위의 등식의 양변을 2^{n+1} 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + (3n+1) \times 2^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

이때, $b_n = \frac{a_n}{2^n} \quad (n \geq 2)$ 이라 하면 $b_2 = \boxed{(가)}$ 이므로

$$\begin{aligned} b_n &= \boxed{(가)} + \sum_{k=2}^{n-1} (3k+1) \times 2^{k-1} \\ &= \boxed{(가)} + \sum_{k=2}^{n-1} (3k+1)(2^k - 2^{k-1}) \\ &= \boxed{(가)} + \sum_{k=2}^{n-1} (3k+1) \times 2^k - \sum_{k=2}^{n-1} (3k+1) \times 2^{k-1} \\ &= \boxed{(가)} + \sum_{k=3}^n (3k-2) \times 2^{k-1} - \sum_{k=2}^{n-1} (3k+1) \times 2^{k-1} \\ &= \boxed{(가)} + (3n-2) \times 2^{n-1} - 14 \\ &\quad + \sum_{k=3}^{n-1} \{(3k-2) - (3k+1)\} \times 2^{k-1} \\ &= (3n-2) \times 2^{n-1} - \sum_{k=2}^{n-1} \boxed{(나)} \\ &= (3n-5) \times 2^{n-1} + 6 \end{aligned}$$

이다.

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_1 = 15, a_n = (3n-5) \times 2^{n-1} + 6 \times 2^n \quad (n \geq 2)$$

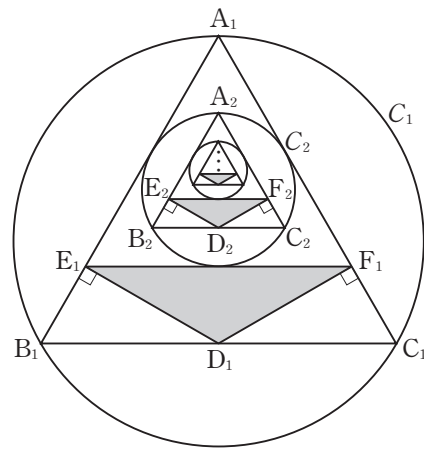
이다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 p 라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(k)$ 라 할 때, $p+f(5)$ 의 값은? [4점]

- ① 54 ② 56
③ 58 ④ 60
⑤ 62

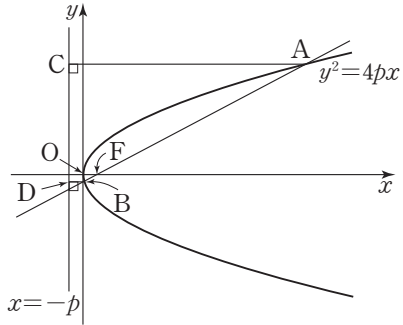
16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 C_1 에 내접하는 정삼각형

$A_1B_1C_1$ 이 있다. 선분 B_1C_1 의 중점 D_1 에서 두 선분 A_1B_1 , A_1C_1 에 내린 수선의 발을 각각 E_1 , F_1 이라 하고, 삼각형 $A_1E_1F_1$ 에 내접하는 원을 C_2 , 삼각형 $D_1F_1E_1$ 의 넓이를 S_1 이라 하자. 원 C_2 에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 가 있다. 선분 B_2C_2 의 중점 D_2 에서 두 선분 A_2B_2 , A_2C_2 에 내린 수선의 발을 각각 E_2 , F_2 라 하고, 삼각형 $A_2E_2F_2$ 에 내접하는 원을 C_3 , 삼각형 $D_2F_2E_2$ 의 넓이를 S_2 라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 원 C_n 에 내접하는 정삼각형 $A_nB_nC_n$ 이 있다. 선분 B_nC_n 의 중점 D_n 에서 두 선분 A_nB_n , A_nC_n 에 내린 수선의 발을 각각 E_n , F_n 이라 하고, 삼각형 $A_nE_nF_n$ 에 내접하는 원을 C_{n+1} , 삼각형 $D_nF_nE_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{25}$
③ $\frac{4\sqrt{3}}{27}$ ④ $\frac{8\sqrt{3}}{49}$
⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{55}$

19. 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ 의 초점 F를 지나고 기울기가 양수인 직선이 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}=2\overline{CD}$ 일 때, 직선 AB의 기울기는? (단, 점 A의 y 좌표는 양수이다.) [4 점]

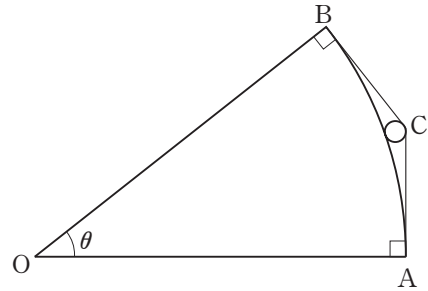


- ① $\frac{8}{15}$
 ③ $\frac{2}{3}$
 ⑤ $\frac{4}{5}$

- ② $\frac{3}{5}$
 ④ $\frac{11}{15}$

20. 그림과 같이 중심각의 크기가 θ 이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB가 있다. 점 A를 지나고 선분 OA에 수직인 직선과 점 B를 지나고 선분 OB에 수직인 직선이 만나는 점을 C라 하자. 호 AB와 두 선분 AC, BC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r}{\theta^2}$ 의 값은? [4 점]



- ① 1
 ③ $\frac{1}{4}$
 ⑤ $\frac{1}{16}$

- ② $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{1}{8}$

21. 양수 A 에 대하여 $\log A$ 의 가수를 $g(A)$ 라 하자. $10 \leq x < 1000$ 인 실수 x 와 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $g(x) + g(\sqrt[n]{x}) = 1$ 을 만족시키는 $g(x)$ 의 최솟값을 a_n 이라 할 때, $a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_{10}$ 의 값은?
[4점]

- ① $\frac{1}{495}$
- ② $\frac{1}{500}$
- ③ $\frac{1}{505}$
- ④ $\frac{1}{510}$
- ⑤ $\frac{1}{515}$

단 답 형

22. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 50$, $a_5 = 30$ 일 때, a_1 의 값을 구하시오. [3점]

23. 좌표공간 위의 두 점 $A(a, 4, 0)$, $B(2, b, 3)$ 에 대하여 선분 AB 를 2 : 1로 내분하는 점이 z 축 위에 있을 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하시오. [3점]

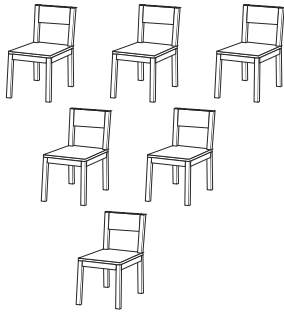
24. 확률변수 X 의 확률질량함수가
 $P(X=x)=k(x^2+1)$ ($x=-1, 0, 1$)
일 때, $V\left(\frac{X}{k}\right)$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.) [3점]

25. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)=f(4)=0$
이다. 부등식 $\frac{\{f(x-2)\}^2}{f(x+1)}\leq 0$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합을
구하시오. [3점]

26. 같은 종류의 아이스크림 13개를 5명의 어린이에게 남김없이 나누
어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시
오. [4점]

- (가) 한 개만 받는 어린이는 2명이다.
(나) 한 개도 받지 못하는 어린이는 없다.

27. 그림과 같이 맨 앞 줄에 1개, 두 번째 줄에 2개, 세 번째 줄에 3개의 의자가 놓여 있다.



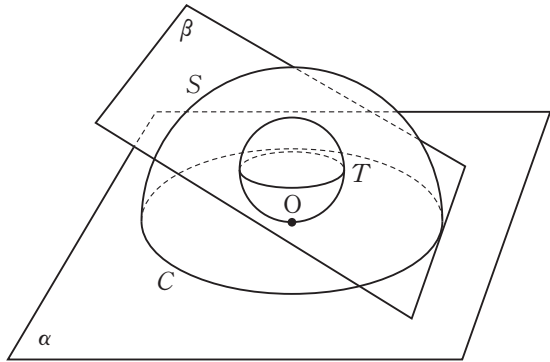
A, B, C, D, E, F의 6명이 6개의 자리에 임의로 앉을 때, A와 B가 같은 줄에 있는 의자에 이웃하여 앉게 될 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 세 자연수 a, b, c 에 대하여 두 등식

$$\begin{pmatrix} 3 & a+4 \\ a-4 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a+2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

을 모두 만족시키는 두 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 가 무수히 많을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 평면 α 위에 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 C 가 있고, 원 C 를 밑면으로 하는 반구 S 가 있다. 또, 반지름의 길이가 1인 구 T 가 점 O 에서 평면 α 에 접하고 있고, 원 C 와 한 점에 서만 만나고 구 T 와 접하는 평면 β 가 있다. 평면 β 에 의하여 반구 S 가 잘려서 생기는 원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 구 T 의 중심은 반구 S 의 내부에 있고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 두 함수

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax, \quad g(x) = e^{-x}(x^2 + ax + b) \quad (a, b \text{는 실수})$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $b \leq 4$
 (나) 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재한다.
 (다) t 가 실수일 때, 매개변수 t 로 나타내어지는 함수 $\begin{cases} x = f^{-1}(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 의 그래프의 접선 중에서 기울기가 0인 접선은 존재하지 않는다.

좌표평면에서 점 (a, b) 가 존재하는 영역의 넓이가 $p + q\sqrt{3}$ 일 때, $4(q-p)$ 의 값을 구하시오. (단, e 는 자연로그의 밑이고, p, q 는 유리수이다.) [4점]

♣ 확인 사항

답안지에 필요한 사항을 정확히 기입(표기)하였는지 확인하시오.