新 수학의 바이블 유형서

밥

수학〈상〉

정답과 풀이

I. 다항식

01 다항식의 연산

본문 p. 9~17

001 (1) $3x^2+(3y+1)x-y^2-8y+2$ (2) $-y^2-8y+2+(3y+1)x+3x^2$ **002** (1) $2x-y$ (2) $5a-5b-4c$

003 (1) $-3x^4y^4$ (2) $2a^8b^6$ (3) $\frac{1}{x}$ (4) $\frac{2}{a^2}$ (5) y^2 **004** (1) $2ab^4+4a^4b^2+ab^3$ (2) $2x^3+4xy-x^2y^2-2y^3$ (3) $3x^3-12x^2-6x$

005 (1) $2x^3-2xy^2+xy-y^2$ (2) $2a^3-a^2b-3ab^2-b^3$ (3) $2x^4+3x^2y+2x^2-2y^2-y$

006 (1) x^2+4x-3 (2) y^4-4x^3 (3) $6a^4bc^2-c^3-3$

007 (1) 몫 : x^2-6, 나머지 : -17 (2) 몫 : $3x+2$, 나머지 : $x-3$ (3) 몫 : $4x+5$, 나머지 : $x-2$

008 (1) $4x^2+4x+1$ (2) $4x^2-12x+9$ (3) $25a^2-16b^2$ (4) $x^2+3x-28$ (5) $15x^2+x-2$ (6) $a^2+b^2+4c^2+2ab-4bc-4ca$

009 (1) x^3+3x^2+3x+1 (2) $x^3-6x^2+12x-8$ (3) a^3+27 (4) $8x^3+y^3$ (5) $8a^3-1$ (6) x^3-27y^3 (7) $x^4+4x^2y^2+16y^4$ (8) $a^3+b^3+3ab-1$

010 (1) 5 (2) 20 **011** (1) 21 (2) 15 **012** (1) -9 (2) -11

013 (1) 7 (2) $\pm\sqrt{5}$ **014** 56 **015** ③ **016** ④ **017** ② **018** ⑤ **019** ②

020 $-2x^4+3x^3y-4x^2y^2+xy^3+2y^4$ **021** ⑤ **022** ③ **023** ⑤ **024** ⑤ **025** ②

026 (1) $64x^6-48x^4+12x^2-1$ (2) $x^4-2x^2y^2+y^4$ **027** 30 **028** ⑤ **029** ④ **030** a^2-b^2+6b-9

031 ① **032** ⑤ **033** ⑤ **034** -45 **035** ① **036** ④ **037** 3^8-2^8 **038** ①

039 ⑤ **040** ② **041** 62 **042** ② **043** ④ **044** ① **045** 704 **046** ①

047 ② **048** ② **049** -1 **050** 11 **051** ② **052** ⑤

053 몫 : $2x-9$, 나머지 : 20 **054** 50 **055** ③ **056** ② **057** 16 **058** ④ **059** 180

060 65 **061** ③ **062** ④ **063** ③ **064** 0 **065** $\sqrt{26}$

02 나머지정리

본문 p. 19~27

066 ㄴ, ㄷ, ㄹ **067** (1) $a=3$, $b=-1$, $c=7$ (2) $a=4$, $b=2$, $c=-6$

068 (1) $a=-5$, $b=2$, $c=-4$ (2) $a=3$, $b=-13$, $c=6$ **069** (1) $a=2$, $b=0$, $c=5$ (2) $a=-\frac{3}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$

070 (1) 2 (2) -1 (3) -1

071 (1) 몫 : $5x^2+6x+4$, 나머지 : 7 (2) 몫 : x^3+2x^2+3x+6, 나머지 : 13 (3) 몫 : $2x^2+2x-3$, 나머지 : $\frac{5}{2}$

072 ⑤ **073** ④ **074** $a=1$, $b=3$, $c=4$ **075** ⑤ **076** 3 **077** ④ **078** ②

079 ⑤ **080** 2 **081** ③ **082** ③ **083** 992 **084** ⑤ **085** ① **086** ①

087 2 **088** ④ **089** ④ **090** ③ **091** -1 **092** ③ **093** ② **094** ③

095 -1 **096** ③ **097** ④ **098** 6 **099** ① **100** ① **101** 1 **102** ③

103 ③ **104** $\frac{1}{5}$ **105** ② **106** ③ **107** ② **108** 3 **109** 3 **110** ②

111 몫 : $\frac{1}{4}px+\frac{1}{4}q$, 나머지 : r **112** 5 **113** ⑤ **114** ② **115** 29 **116** 10 **117** ①

118 ⑤ **119** ④ **120** 20 **121** ② **122** ① **123** ① **124** ⑤ **125** 3

126 2 **127** x^2+3x+2

03 인수분해

본문 p. 29~37

128 (1) $5ab(a+2)$ (2) $(a+b)(x+y)$ (3) $(1-x)(1-y)$

129 (1) $(4x+1)^2$ (2) $(2x-5)^2$ (3) $(3a+b)^2$

130 (1) $(3x+y)(3x-y)$ (2) $4(3a+2b)(3a-2b)$

131 (1) $(x+5)(x+7)$ (2) $(7a+b)(a-3b)$

132 (1) $(a+b+3c)^2$ (2) $(x-y-z)^2$

133 (1) $(a+3)(a^2-3a+9)$ (2) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$ (3) $8(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

134 (1) $(x+4)^3$ (2) $(-a+2b)^3$ (3) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

135 (1) $(x+4)(x-3)$ (2) $(x-2)^2(x^2-4x+5)$

136 (1) $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$ (2) $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

137 (1) $(x-y-3)(x-y+1)$ (2) $(y+a)(x+y-a)$

138 (1) $(x-1)(x-2)(x-3)$ (2) $(x+1)(x+2)(x-3)$

139 ③ **140** ② **141** ④ **142** $(x+y)(x-y)(x-z)$ **143** ⑤ **144** ① **145** ③

146 (1) $(2x+y-3)(x+y-2)$ (2) $(2x+1)(5x+1)$ **147** ⑤ **148** ③ **149** ⑤

150 $(x-2y-1)(x^2+4y^2+2xy+x-2y+1)$ **151** ⑤ **152** ③ **153** ③ **154** $(5x+y)(x+5y)$

155 ③ **156** (1) $(x+2)(x-2)(x^2-3)$ (2) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ (3) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(3x^2+1)$

157 ① **158** $(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$ **159** ② **160** ⑤ **161** 11

162 $(x^2-2x-6)(x^2-2x-12)$ **163** ⑤ **164** ⑤ **165** ②, ③ **166** $(x+y+1)(x+3y-2)$ **167** ⑤

168 ④ **169** ④ **170** ③ **171** ② **172** -55 **173** ⑤ **174** ③ **175** ①

176 74 **177** ④ **178** ② **179** ⑤ **180** ④ **181** ⑤ **182** ③

183 $(x-a)(x+a)(x+2a)$ **184** ④ **185** ④ **186** ② **187** ④ **188** 17 **189** ④

190 ① **191** 66 **192** ② **193** ④ **194** ① **195** ⑤ **196** 8 **197** 1

198 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형 **199** $3(x-y)(y-z)(z-x)$

Ⅱ. 방정식과 부등식

04 복소수

본문 p. 41~49

200 (1) $\sqrt{3}i$ (2) $2i$ (3) $3\sqrt{2}i$ **201** (1) $\pm\sqrt{5}i$ (2) $\pm3\sqrt{3}i$ (3) $\pm4i$ **202** (1) 9 (2) $9i$ (3) $9i$ (4) -9

203 (1) 3 (2) $3i$ (3) $-3i$ (4) 3 **204** $-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$ **205** ㄱ, ㄷ **206** (1) $x=2$, $y=2$ (2) $x=1$, $y=2$

207 (1) $-3-5i$ (2) $1+7i$ (3) $-i$ (4) 16

208 (1) $2+15i$ (2) $-2+10i$ (3) $6-44i$ (4) $40+24i$

209 (1) $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ (2) $\frac{28}{17}+\frac{7}{17}i$ **210** (1) 0 (2) 1 **211** (1) i (2) $-i$ (3) -1 (4) 2 **212** ② **213** ③ **214** ②

215 $8i$ **216** 2 **217** ⑤ **218** ③, ⑤ **219** ③ **220** ⑤ **221** ⑤ **222** 49

223 ③ **224** ① **225** ⑤ **226** $1-3i$ **227** ⑤ **228** ④ **229** ③ **230** 0

231 ② **232** ① **233** ⑤ **234** 52 **235** ⑤ **236** ⑤ **237** ③ **238** 5

239 ① 240 ④ 241 ① 242 $1-i$ 243 ③ 244 3 245 ① 246 16
247 ⑤ 248 ⑤ 249 ④ 250 1 251 ① 252 ④ 253 2 254 ⑤
255 ④ 256 ⑤ 257 ① 258 9 259 ② 260 ⑤ 261 ④ 262 ③
263 ① 264 ⑤ 265 18 266 ① 267 ① 268 ③ 269 ② 270 23
271 ③ 272 ④ 273 $-8+5i$ 274 4

05 이차방정식

본문 p. 51~61

275 (1) 1 (2) -1 276 풀이 참조 277 (1) $x=4$ (2) $x=-4$ 또는 $x=3$ (3) $x=3$

278 (1) $x=-1$ 또는 $x=2$ (2) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ (3) $x=\frac{1}{2}$ (중근) (4) $x=1$ 또는 $x=2$

279 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$ (2) $x=1\pm\sqrt{2}$ (3) $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$

280 (1) $x=1$ 또는 $x=4$ (실근) (2) $x=\pm\sqrt{3}i$ (허근) (3) $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$ (허근)

281 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 서로 다른 두 허근 (3) 중근 (서로 같은 두 실근) 282 (1) ㄷ (2) ㄹ (3) ㄱ, ㄴ

283 (1) $k>-\frac{25}{4}$ (2) $k=-\frac{25}{4}$ (3) $k<-\frac{25}{4}$ 284 (1) 1 (2) -5 (3) 11 (4) $\sqrt{21}$ 285 (1) -3 (2) 2 (3) 2 (4) 5

286 (1) -1 (2) -3 (3) $-\frac{4}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$ 287 (1) $(x+4i)(x-4i)$ (2) $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

288 (1) $x^2-x-2=0$ (2) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{5}{2}=0$ (3) $x^2-4x+1=0$ (4) $x^2-2x+2=0$ 289 (1) $a=0$, $b=-2$ (2) $a=-4$, $b=-1$

290 (1) $a=0$, $b=9$ (2) $a=-6$, $b=25$ 291 ④ 292 0 293 ③ 294 $x=6$ 295 ③
296 ② 297 ② 298 7 299 ② 300 ② 301 ①
302 $x=a-b$ 또는 $x=a+b$ 303 ③ 304 ⑤ 305 ② 306 7 307 ② 308 19
309 ② 310 $x=1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$ 311 ⑤ 312 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 313 ③
314 $-1+\sqrt{5}$ 315 ③ 316 ③ 317 4 m 318 ② 319 ② 320 ③ 321 ④
322 ① 323 ③ 324 2 325 ④ 326 ③ 327 ② 328 14 329 ⑤
330 ② 331 ④ 332 $x^2-7x+18=0$ 333 ② 334 ⑤ 335 ④ 336 5
337 ⑤ 338 $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$ 339 ④ 340 $-\frac{7}{4}$ 341 ① 342 ② 343 ②
344 54 345 ③ 346 ④ 347 ② 348 16 cm 349 2 350 ① 351 ②
352 68 353 ① 354 ③ 355 ③ 356 ② 357 24 358 -1 359 1
360 28

06 이차방정식과 이차함수

본문 p. 63~73

361 (1) 제 1, 2, 3 사분면 (2) 제 1, 3, 4 사분면 (3) 제 2, 3, 4 사분면 (4) 제 2, 4 사분면

362 (1) 제 1, 2, 4 사분면 (2) 제 1, 3, 4 사분면 (3) 제 1, 3 사분면 (4) 제 1, 2 사분면

363 (1) $(2, -1)$, $x=2$ (2) $(3, 0)$, $x=3$

364 ㄱ, ㄷ **365** (1) $a>0$, $b<0$, $c<0$ (2) $a<0$, $b<0$, $c>0$

366 (1) $y=x^2-4x+7$ (2) $y=-x^2-x+2$ (3) $y=x^2+4x$

367 (1) 0, 2 (2) -4, 1 (3) 6 **368** (1) 0 (2) 2 (3) 1 **369** (1) $k>-2$ (2) $k=-2$ (3) $k<-2$

370 (1) 0, 2 (2) 2

371 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다. (3) 한 점에서 만난다(접한다.).

372 (1) $k>-6$ (2) $k=-6$ (3) $k<-6$ **373** (1) $k>\frac{3}{4}$ (2) $k=\frac{3}{4}$ (3) $k<\frac{3}{4}$

374 (1) 최댓값 : 없다., 최솟값 : -5 (2) 최댓값 : $\frac{1}{4}$, 최솟값 : 없다. (3) 최댓값 : 2, 최솟값 : 없다. **375** 3, 1, 37, 2, 37, 2

376 (1) 최댓값 : 6, 최솟값 : 2 (2) 최댓값 : -4, 최솟값 : -5 (3) 최댓값 : 1, 최솟값 : -8

377 (1) 최댓값 : 3, 최솟값 : 없다. (2) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1 (3) 최댓값 : -1, 최솟값 : -13 **378** ③ **379** 7

380 ④	**381** ③	**382** ②	**383** 16	**384** ⑤	**385** ⑤	**386** ②	**387** 1
388 ⑤	**389** ⑤	**390** ②	**391** ③	**392** ②	**393** 1	**394** ④	**395** ①
396 10	**397** ②	**398** ④	**399** $\frac{4}{3}$	**400** ③	**401** ④	**402** 36	**403** ③
404 ①	**405** ①	**406** 1	**407** ①	**408** ③	**409** ③	**410** ③	**411** ④
412 ②	**413** -4	**414** ③	**415** ⑤	**416** ④	**417** 5	**418** ②	**419** 20
420 ③	**421** 2	**422** ②	**423** ③	**424** 12	**425** ④	**426** ③	**427** ①
428 ③	**429** 62	**430** ①	**431** ③	**432** ①	**433** ③	**434** ②	**435** ①
436 ④	**437** 12	**438** ②	**439** 800 cm^2	**440** 6초 후			

07 삼차방정식과 사차방정식

본문 p. 75~81

441 (1) $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$ (2) $x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$ (3) $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

442 (1) $x=-1$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$ (2) $x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$ (3) $x=2$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$

443 (1) $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm 2i$ (2) $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$ (3) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

444 (1) $x=\pm\sqrt{2}$ (2) $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$ (3) $x=2$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$ **445** (1) 1 (2) 3 (3) 3 (4) -5

446 $x^3-9x^2+11x+21=0$ **447** $a=14$, $b=8$ **448** $a=12$, $b=-10$

449 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0 **450** ⑤ **451** ⑤ **452** 2 **453** ② **454** ④ **455** 3

456 ① **457** 10 **458** ① **459** $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ **460** ④ **461** ④

462 1 **463** ④ **464** ③ **465** -5 **466** ⑤ **467** ② **468** $x^3-6x-4=0$

469 ④ **470** ④ **471** 11 **472** ③ **473** $-\frac{5}{2}$ **474** ⑤ **475** 0 **476** ⑤

477 9 **478** ④ **479** ① **480** ④ **481** 15 **482** 5 **483** ③ **484** ②

485 ⑤ **486** 26 **487** ③ **488** ④ **489** ① **490** 32 **491** 1

08 연립방정식

본문 p.83~89

492 (1) $x=2$, $y=3$ (2) $x=5$, $y=-2$

493 (1) $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

494 (1) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

495 (1) $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

496 (1) $(1, 6)$, $(3, 3)$ (2) $(0, 0)$, $(2, -2)$ (3) $(-11, -4)$, $(-5, -6)$, $(-3, -12)$, $(-1, 6)$, $(1, 0)$, $(7, -2)$

497 (1) $x=2$, $y=-3$ (2) $x=-2$, $y=4$ **498** -15 **499** 3 또는 -4 **500** ① **501** ① **502** 4

503 ③ **504** ③ **505** 3 **506** ④ **507** ⑤ **508** 10 **509** ① **510** ⑤

511 0 또는 3 **512** ⑤ **513** ⑤ **514** $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ **515** ④ **516** ④

517 -1 **518** ① **519** ③ **520** ④ **521** ① **522** ⑤ **523** -5 **524** ①

525 ② **526** ② **527** ⑤ **528** 25 **529** ① **530** ① **531** ② **532** 41

533 ⑤ **534** ⑤ **535** ① **536** ④ **537** ② **538** 1, 13 **539** $\sqrt{13}$

09 여러 가지 부등식

본문 p.91~103

540 ㄷ **541** (1) $-7<x\le 2$ (2) $x\ge 4$ (3) $-6<x\le 15$ (4) $x\le -6$ **542** (1) $x=2$ (2) 해는 없다.

543 (1) $0<x<2$ (2) $1\le x\le 5$ (3) $x\le -1$ 또는 $x\ge 2$ (4) $x\le 0$ **544** (1) $\alpha\le x\le \gamma$ (2) $x<\beta$ 또는 $x>\delta$

545 (1) $-5<x<1$ (2) $x\le \frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 4$ **546** (1) 모든 실수 (2) 해는 없다. (3) $x\ne 1$인 모든 실수 (4) $x=\frac{1}{2}$

547 (1) $-1<x<2$ (2) $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$ (3) $x\le -2$ 또는 $x\ge 4$ **548** (1) $-2<x<2$ (2) $x<-1$ 또는 $x>3$

549 (1) $x^2-3x+2<0$ (2) $x^2-4x-5\ge0$ 550 (1) $x\ne-1$인 모든 실수 (2) 해는 없다. (3) 모든 실수 (4) $x=7$

551 (1) 모든 실수 (2) 해는 없다. 552 $k>0$ 553 $2<k<6$ 554 (1) $-3\le x<-1$ (2) 해는 없다.

555 (1) $\ge$, $>$, $>$ (2) $\ge$, $>$, $<$ (3) $<$ 556 $k\ge4$ 557 $-7<k\le-3$ 558 $k>1$ 559 ②

560 ③ 561 ④ 562 ⑤ 563 ④ 564 1 565 ④ 566 ③

567 $-6<x\le-2$ 568 ③ 569 ⑤ 570 해는 없다. 571 $0<a\le1$ 572 $10\le a<11$ 573 2

574 $a>-2$ 575 ③ 576 ③ 577 200 g 578 ② 579 ② 580 4 581 ④

582 ① 583 4 584 ④ 585 ① 586 $x<-3$ 또는 $x>1$ 587 ② 588 ④

589 $-5a<x<-7a$ 590 ⑤ 591 ③ 592 $x<-2$ 또는 $x>2$ 593 ③ 594 ⑤

595 100 596 ② 597 ② 598 -7 599 ② 600 ③ 601 ④ 602 ⑤

603 ② 604 ① 605 ① 606 ④ 607 12 이상 15 이하 608 ⑤ 609 ①

610 $0<a\le4$ 611 ② 612 ② 613 $-11<k<-4$ 614 ① 615 ⑤ 616 32

617 ④ 618 ⑤ 619 ① 620 ② 621 ③ 622 ② 623 1 624 ①

625 ③ 626 ② 627 80 628 5 629 $0\le k\le\frac{3}{2}$

Ⅲ. 도형의 방정식

10 평면좌표

본문 p. 107~113

630 (1) 7 (2) R(2) 또는 R(8) (3) B(−4) 또는 B(8) 631 (1) 5 (2) $\sqrt{10}$ (3) $2\sqrt{2}$

632 (1) P(1) (2) Q(9) (3) $M\left(\frac{3}{2}\right)$ 633 28

634 (1) P(2, 1) (2) Q(9, 8) (3) R(−6, −7) 635 9

636 (1) $m=1$, $n=2$ (2) $m=5$, $n=3$ (3) $m=1$, $n=3$ 637 (1) G(−1, 1) (2) $G\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 638 1 639 ④

640 ③ 641 10 642 ⑤ 643 ② 644 ① 645 ④ 646 ②

647 $C(2\sqrt{3}, -2)$ 648 ④ 649 ⑤ 650 7 651 ④ 652 ② 653 3

654 ① 655 ④ 656 $\frac{2}{5}<t<\frac{2}{3}$ 657 ④ 658 ④ 659 ② 660 ① 661 ①

662 $C(2, 2\sqrt{3})$, D(0, 0) 663 4 664 ④ 665 ③ 666 $4\sqrt{5}$ 667 ③ 668 4

669 ⑤ 670 ② 671 -17 672 A(0, 3) 673 ④ 674 ② 675 ③ 676 ④

677 P(3, 3), 14 678 10

11 직선의 방정식

본문 p. 115~125

679 (1) $y=3x+2$ (2) $y=5$ **680** (1) $y=3x-2$ (2) $y=-2x+3$ (3) $y=3$ **681** 풀이 참조 **682** (1) $y=3$ (2) $y=0$

683 (1) $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$ (2) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$ **684** (1) $y=5$ (2) $x=-1$ (3) $x=2$ (4) $y=-3$

685 (1) 한 점에서 만난다. (2) 평행하다. (3) 수직이다. **686** (1) 한 점에서 만난다. (2) 수직이다. (3) 일치한다.

687 풀이 참조 **688** 풀이 참조 **689** (1) $y=-3x-5$ (2) $y=-2x-9$ (3) $y=3x-4$ (4) $y=-\frac{1}{2}x-1$ **690** 풀이 참조

691 풀이 참조 **692** (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **693** (1) 1 (2) 9 **694** ⑤ **695** ① **696** -5 **697** ⑤

698 ⑤ **699** $y=x-1$ **700** ② **701** ⑤ **702** $x+2y=11$ **703** ① **704** ④ **705** ①

706 ② **707** ⑤ **708** ④ **709** ① **710** ① **711** 25 **712** ② **713** ④

714 1 **715** 1 **716** ③ **717** 0 **718** ③ **719** ② **720** -1 **721** ④

722 ③ **723** $x+5y-12=0$ **724** ② **725** ⑤ **726** ② **727** ③ **728** 8

729 ③ **730** $x+2y-5=0$ 또는 $x+2y+5=0$ **731** ⑤ **732** ② **733** ① **734** ⑤

735 2 **736** ① **737** ① **738** ④ **739** $-\frac{1}{2}$ **740** ② **741** 5 **742** ③

743 5 **744** $y=\frac{1}{5}x+2$ **745** ② **746** ④ **747** ③ **748** 16 **749** ③ **750** $\frac{8}{5}$

751 2

12 원의 방정식

본문 p. 127~137

752 (1) 중심의 좌표 : $(3, 1)$, 반지름의 길이 : 4 (2) 중심의 좌표 : $(-7, 0)$, 반지름의 길이 : 11

753 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2=36$ (2) $(x-3)^2+y^2=9$

754 (1) $x^2+y^2=25$ (2) $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

755 (1) $(x-2)^2+y^2=2$ (2) $x^2+(y-2)^2=13$

756 (1) 중심의 좌표 : $(6, 0)$, 반지름의 길이 : 7 (2) 중심의 좌표 : $(1, -5)$, 반지름의 길이 : 4

757 (1) $x^2+y^2-2y=0$ (2) $x^2+y^2+2x-4y=0$

758 (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ (2) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

759 (1) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ (2) $(x+4)^2+(y-4)^2=16$ **760** (1) 2 (2) 1 (3) 0

761 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 한 점에서 만난다. (3) 만나지 않는다.

762 (1) 내접한다. (2) 서로 다른 두 점에서 만난다. (3) 외접한다.

763 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 한 원이 다른 원의 외부에 있다. **764** (1) $x^2+y^2-x+3y-4=0$ (2) $x^2+y^2+6x-9y=0$

765 (1) $3x+y-3=0$ (2) $6x-10y-13=0$ **766** (1) $y=3x\pm2\sqrt{10}$ (2) $y=2\sqrt{2}x\pm9$

767 (1) $-2x+y=5$ (2) $3x-4y=25$ **768** ① **769** $(x-3)^2+y^2=8$ **770** ③ **771** ③

772 ④ **773** 5 **774** ⑤ **775** ④ **776** ④ **777** ③

778 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ 779 ③ 780 ⑤ 781 ③ 782 ② 783 ① 784 ③
785 8 786 ④ 787 ③ 788 ② 789 ② 790 ① 791 4 792 ②
793 ⑤ 794 ④ 795 ③ 796 ① 797 29π 798 ④ 799 ② 800 -2
801 ⑤ 802 ③ 803 40 804 ⑤ 805 ④ 806 ③ 807 ② 808 $\sqrt{21}$
809 ① 810 ④ 811 ④ 812 ② 813 $4<k\le 9$ 814 ② 815 ② 816 ①
817 ① 818 21 819 ③ 820 ② 821 ⑤ 822 ① 823 ④ 824 7π
825 16

13 도형의 이동

본문 p. 139~145

826 (1) $(10, -14)$ (2) $(4, -3)$ 827 (1) $(-5, 9)$ (2) $(-13, -2)$ 828 (1) $y=-4x+25$ (2) $(x-11)^2+(y+2)^2=3$
829 (1) $5x-3y+22=0$ (2) $x^2+y^2+2x-15=0$ 830 (1) $(-2, -3)$ (2) $(2, 3)$ (3) $(2, -3)$ (4) $(3, -2)$
831 (1) $y=5x-4$ (2) $(x+5)^2+(y+3)^2=16$ 832 (1) $3x-4y-41=0$ (2) $x^2+y^2+4x-4y-11=0$
833 (1) $3x-4y+5=0$ (2) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ 834 (1) $x+3y-5=0$ (2) $(x+3)^2+(y-5)^2=9$ 835 풀이 참조 836 ③
837 ④ 838 5 839 ② 840 ① 841 $-\frac{5}{4}$ 842 ④ 843 ⑤ 844 4
845 ③ 846 ③ 847 ② 848 ④ 849 ⑤ 850 $3x+4y+30=0$ 851 ④
852 ③ 853 8 854 ① 855 ③ 856 5 857 ③ 858 ④ 859 ④
860 80 861 -2 862 ③ 863 ③ 864 ① 865 ⑤ 866 ④ 867 ③
868 ① 869 $2\pi-4$ 870 ④ 871 ③ 872 ④ 873 ③ 874 11 875 17

I. 다항식

01 다항식의 연산

개념 콕콕

본문 p.9~10

001

(1) x에 대하여 차수가 높은 항부터 정리하면

$3x^2+(3y+1)x-y^2-8y+2$

(2) x에 대하여 차수가 낮은 항부터 정리하면

$-y^2-8y+2+(3y+1)x+3x^2$

답 (1) $3x^2+(3y+1)x-y^2-8y+2$
(2) $-y^2-8y+2+(3y+1)x+3x^2$

002

(1) $2x-\{x+3y-(x-2y)\}+4y=2x-5y+4y$
$=2x-y$

(2) $4a-b-[2c-\{a-3c-(b-c)\}+3b]$
$=4a-b-\{2c-(a-b-2c)+3b\}$
$=4a-b-(-a+4b+4c)$
$=5a-5b-4c$

답 (1) $2x-y$ (2) $5a-5b-4c$

003

(1) $x^2y^3\times(-3x^2y)=-3x^4y^4$

(2) $(a^3b^2)^2\times2a^2b^2=a^6b^4\times2a^2b^2=2a^8b^6$

(3) $\left(\frac{x}{y^3}\right)^2\times\left(\frac{y^2}{x}\right)^3=\frac{x^2}{y^6}\times\frac{y^6}{x^3}=\frac{1}{x}$

(4) $6ab^2\div3a^3b^2=\frac{6ab^2}{3a^3b^2}=\frac{2}{a^2}$

(5) $2xy^2\times\frac{3}{10}xy\div\frac{3}{5}x^2y=2xy^2\times\frac{3}{10}xy\times\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^2y}=y^2$

답 (1) $-3x^4y^4$ (2) $2a^8b^6$ (3) $\frac{1}{x}$ (4) $\frac{2}{a^2}$ (5) y^2

004

(1) $ab(2b^3+4a^3b+b^2)=2ab^4+4a^4b^2+ab^3$

(2) $(2x-y^2)(x^2+2y)=2x^3+4xy-x^2y^2-2y^3$

(3) $3x(x^2-4x-2)=3x^3-12x^2-6x$

답 (1) $2ab^4+4a^4b^2+ab^3$ (2) $2x^3+4xy-x^2y^2-2y^3$
(3) $3x^3-12x^2-6x$

005

(1) $(2x^2+2xy+y)(x-y)=2x^3-2x^2y+2x^2y-2xy^2+xy-y^2$
$=2x^3-2xy^2+xy-y^2$

(2) $(2a+b)(a^2-ab-b^2)=2a^3-2a^2b-2ab^2+a^2b-ab^2-b^3$
$=2a^3-a^2b-3ab^2-b^3$

(3) $(2x^2-y)(x^2+2y+1)=2x^4+4x^2y+2x^2-x^2y-2y^2-y$
$=2x^4+3x^2y+2x^2-2y^2-y$

답 (1) $2x^3-2xy^2+xy-y^2$ (2) $2a^3-a^2b-3ab^2-b^3$
(3) $2x^4+3x^2y+2x^2-2y^2-y$

006

(1) $(3x^3+12x^2-9x)\div3x=\frac{3x^3}{3x}+\frac{12x^2}{3x}-\frac{9x}{3x}$
$=x^2+4x-3$

(2) $(3xy^5z^2-12x^4yz^2)\div3xyz^2=\frac{3xy^5z^2}{3xyz^2}-\frac{12x^4yz^2}{3xyz^2}$
$=y^4-4x^3$

(3) $(18a^5b^2c^3-3abc^4-9abc)\div3abc$
$=\frac{18a^5b^2c^3}{3abc}-\frac{3abc^4}{3abc}-\frac{9abc}{3abc}$
$=6a^4bc^2-c^3-3$

답 (1) x^2+4x-3 (2) y^4-4x^3 (3) $6a^4bc^2-c^3-3$

007

(1)
$$\begin{array}{r} x^2-6 \\ x-3\overline{)x^3-3x^2-6x+1} \\ \underline{x^3-3x^2} \\ -6x+1 \\ \underline{-6x+18} \\ -17 \end{array}$$

∴ 몫 : x^2-6, 나머지 : -17

(2)
$$\begin{array}{r} 3x+2 \\ x^2-x+1\overline{)3x^3-x^2+2x-1} \\ \underline{3x^3-3x^2+3x} \\ 2x^2-x-1 \\ \underline{2x^2-2x+2} \\ x-3 \end{array}$$

∴ 몫 : $3x+2$, 나머지 : $x-3$

(3)
$$\begin{array}{r} 4x+5 \\ x^2-x+1\overline{)4x^3+x^2+3} \\ \underline{4x^3-4x^2+4x} \\ 5x^2-4x+3 \\ \underline{5x^2-5x+5} \\ x-2 \end{array}$$

∴ 몫 : $4x+5$, 나머지 : $x-2$

답 (1) 몫 : x^2-6, 나머지 : -17 (2) 몫 : $3x+2$, 나머지 : $x-3$
(3) 몫 : $4x+5$, 나머지 : $x-2$

008

(1) $(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot2x\cdot1+1^2=4x^2+4x+1$

(2) $(2x-3)^2=(2x)^2+2\cdot2x\cdot(-3)+(-3)^2$
$=4x^2-12x+9$

(3) $(5a+4b)(5a-4b)=(5a)^2-(4b)^2=25a^2-16b^2$

(4) $(x+7)(x-4)=x^2+(7-4)x+7\cdot(-4)$
$=x^2+3x-28$

(5) $(3x-1)(5x+2)=3x\cdot5x+(3\cdot2-1\cdot5)x+(-1)\cdot2$
$=15x^2+x-2$

(6) $(a+b-2c)^2$
$=a^2+b^2+(-2c)^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot(-2c)+2\cdot(-2c)\cdot a$
$=a^2+b^2+4c^2+2ab-4bc-4ca$

답 (1) $4x^2+4x+1$ (2) $4x^2-12x+9$ (3) $25a^2-16b^2$
(4) $x^2+3x-28$ (5) $15x^2+x-2$
(6) $a^2+b^2+4c^2+2ab-4bc-4ca$

009

(1) $(x+1)^3=x^3+3x^2\cdot1+3x\cdot1^2+1^3$
$=x^3+3x^2+3x+1$

(2) $(x-2)^3=x^3+3x^2\cdot(-2)+3x\cdot(-2)^2+(-2)^3$
$=x^3-6x^2+12x-8$

(3) $(a+3)(a^2-3a+9)=a^3+3^3=a^3+27$

(4) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)=(2x)^3+y^3=8x^3+y^3$

(5) $(2a-1)(4a^2+2a+1)=(2a)^3-1^3=8a^3-1$

(6) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)=x^3-(3y)^3=x^3-27y^3$

(7) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$
$=\{x^2+x\cdot(2y)+(2y)^2\}\{x^2-x\cdot(2y)+(2y)^2\}$
$=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$
$=x^4+4x^2y^2+16y^4$

(8) $(a+b-1)(a^2+b^2-ab+a+b+1)$
$=(a+b-1)\{a^2+b^2+(-1)^2-ab-b\cdot(-1)-(-1)\cdot a\}$
$=a^3+b^3+(-1)^3-3\cdot a\cdot b\cdot(-1)$
$=a^3+b^3+3ab-1$

답 (1) x^3+3x^2+3x+1 (2) $x^3-6x^2+12x-8$
(3) a^3+27 (4) $8x^3+y^3$ (5) $8a^3-1$
(6) x^3-27y^3 (7) $x^4+4x^2y^2+16y^4$
(8) $a^3+b^3+3ab-1$

010

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot2=5$

(2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4^2+2\cdot2=20$

답 (1) 5 (2) 20

011

(1) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(-3)^2+4\cdot3=21$

(2) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(-3)^2+2\cdot3=15$

답 (1) 21 (2) 15

012

(1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(-3)^3-3\cdot2\cdot(-3)=-9$

(2) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=1^3+3\cdot(-4)\cdot1=-11$

답 (1) -9 (2) -11

013

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$

$\therefore x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

답 (1) 7 (2) $\pm\sqrt{5}$

014

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=8^2-2\cdot4=56$

답 56

유형 콕콕 본문 p.11~15

015 ③　016 ④　017 ②　018 ⑤　019 ②
020 $-2x^4+3x^3y-4x^2y^2+xy^3+2y^4$　021 ⑤　022 ③
023 ⑤　024 ⑤　025 ②
026 (1) $64x^6-48x^4+12x^2-1$ (2) $x^4-2x^2y^2+y^4$　027 30
028 ⑤　029 ④　030 a^2-b^2+6b-9　031 ①　032 ⑤
033 ⑤　034 -45　035 ①　036 ④　037 3^8-2^8　038 ①
039 ⑤　040 ②　041 62　042 ②　043 ④　044 ①
045 704　046 ①　047 ②　048 ②　049 -1

015

$(A-4B)+(2A+3B)=A-4B+2A+3B$
$=3A-B$
$=3(x^2+xy+y^2)-(x^2-xy+2y^2)$
$=3x^2+3xy+3y^2-x^2+xy-2y^2$
$=2x^2+4xy+y^2$

답 ③

016

$A+B=x^2+3x+4$ …… ㉠
$A-B=x^2-x+2$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$2B=4x+2$　$\therefore B=2x+1$

답 ④

017

$3(A+B)-2(B-C)$
$=3A+3B-2B+2C$
$=3A+B+2C$
$=3(x^2-2xy)+(x^2+xy-2y^2)+2(2xy-y^2)$
$=3x^2-6xy+x^2+xy-2y^2+4xy-2y^2$
$=4x^2-xy-4y^2$

답 ②

018

$(x+y-2)(2x-3y+1)$
$=2x^2-3xy+x+2xy-3y^2+y-4x+6y-2$
$=2x^2-xy-3x-3y^2+7y-2$

답 ⑤

019

$(x-2)(x-3)(x^2-1)=(x^2-5x+6)(x^2-1)$
$=x^4-x^2-5x^3+5x+6x^2-6$
$=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$

답 ②

020

$(2x^2-xy-y^2)(-x^2+xy-2y^2)$
$=-2x^4+2x^3y-4x^2y^2+x^3y-x^2y^2+2xy^3+x^2y^2-xy^3+2y^4$
$=-2x^4+3x^3y-4x^2y^2+xy^3+2y^4$

답 $-2x^4+3x^3y-4x^2y^2+xy^3+2y^4$

021

$$\begin{array}{r} 4x\ +2 \\ x^2-x+1 \overline{) 4x^3-2x^2+3x+1} \\ \underline{4x^3-4x^2+4x} \\ 2x^2-\ \ x+1 \\ \underline{2x^2-2x+2} \\ x-1 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=4x+2$이므로 $Q(1)=4+2=6$ 답 ⑤

022

$A=(x^2-2)(x+1)+2=x^3+x^2-2x-2+2$

$\quad=x^3+x^2-2x$ 답 ③

023

다항식 $2x^3+x^2+4x+5$를 x에 대한 일차식 $ax+1$로 나누는 과정에서

$(ax+1)x^2=bx^3+x^2=2x^3+x^2$이므로

$a=b=2$

$(2x+1)c=4x+d=4x+2$이므로

$c=d=2$

$\therefore a+b+c+d=2+2+2+2=8$ 답 ⑤

024

① $(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2=4x^2+12x+9$

② $(x+2y)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3$

$\quad=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

③ $(x+y-z)^2=x^2+y^2+(-z)^2+2xy+2y(-z)+2(-z)x$

$\quad=x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$

④ $(x+2y+z)(x^2+4y^2+z^2-2xy-2yz-zx)$

$\quad=x^3+(2y)^3+z^3-3x\cdot 2y\cdot z$

$\quad=x^3+8y^3+z^3-6xyz$

⑤ $(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)$

$\quad=\{(3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2\}\{(3x)^2-3x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$\quad=(3x)^4+(3x)^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$

$\quad=81x^4+36x^2y^2+16y^4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

025

$(x+2)(x-2)(x^2+4)=(x^2-4)(x^2+4)$

$\quad=x^4-16$ 답 ②

026

(1) $(2x+1)^3(2x-1)^3=\{(2x+1)(2x-1)\}^3$

$\quad=(4x^2-1)^3$

$\quad=(4x^2)^3-3\cdot(4x^2)^2\cdot 1+3\cdot 4x^2\cdot 1^2-1^3$

$\quad=64x^6-48x^4+12x^2-1$

(2) $(x^2+2xy+y^2)(x^2-2xy+y^2)=(x+y)^2(x-y)^2$

$\quad=\{(x+y)(x-y)\}^2$

$\quad=(x^2-y^2)^2$

$\quad=x^4-2x^2y^2+y^4$

답 (1) $64x^6-48x^4+12x^2-1$ (2) $x^4-2x^2y^2+y^4$

027

$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+1)$

$=\{(x+1)(x^2-x+1)\}\{(x-1)(x^2+x+1)\}(x^6+1)$

$=\{(x^3+1)(x^3-1)\}(x^6+1)$

$=(x^6-1)(x^6+1)$

$=x^{12}-1$

$=31-1=30$ 답 30

028

$(x-4)(x-2)(x+1)(x+3)$

$=\{(x-4)(x+3)\}\{(x-2)(x+1)\}$

$=(x^2-x-12)(x^2-x-2)$

$x^2-x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-12)(t-2)=t^2-14t+24$

$\quad=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$

$\quad=x^4-2x^3+x^2-14x^2+14x+24$

$\quad=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$ 답 ⑤

029

$x^2+3=t$로 놓으면

$(x^2+2x+3)(x^2+x+3)=(t+2x)(t+x)$

$\quad=t^2+3xt+2x^2$

$\quad=(x^2+3)^2+3x(x^2+3)+2x^2$

$\quad=x^4+6x^2+9+3x^3+9x+2x^2$

$\quad=x^4+3x^3+8x^2+9x+9$

$\therefore a=1,\ b=-8,\ c=9$

$\therefore a+b+c=1+(-8)+9=2$ 답 ④

030

$b-3=t$로 놓으면

$(a-b+3)(a+b-3)=\{a-(b-3)\}\{a+(b-3)\}$

$\quad=(a-t)(a+t)=a^2-t^2$

$\quad=a^2-(b-3)^2$

$\quad=a^2-b^2+6b-9$ 답 a^2-b^2+6b-9

031

$A=2x^2+x+a,\ B=x^2-x-6$이라 하자.

$(2x^2+x+a)(x^2-x-6)$의 전개식에서 x^2항은

(A의 x^2항)$\times$(B의 상수항)$+$(A의 x항)$\times$(B의 x항)

$+$(A의 상수항)$\times$(B의 x^2항)

$=2x^2\cdot(-6)+x\cdot(-x)+a\cdot x^2$

$=-12x^2-x^2+ax^2$

$=(a-13)x^2$

이때, x^2의 계수가 -15이므로

$a-13=-15 \qquad \therefore a=-2$ 답 ①

032
$(x^2+3x+4)(-2x^3+7x^2+5)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\cdot5+4\cdot7x^2=33x^2$

따라서 x^2의 계수는 33이다.

답 ⑤

033
$(2x-y+3)(x+3y-2)$의 전개식에서 xy항은

$2x\cdot3y+(-y)\cdot x=5xy$

따라서 xy의 계수는 5이다.

답 ⑤

034
$(2x+3)^3(3x-1)^2=(8x^3+36x^2+54x+27)(9x^2-6x+1)$

이 식의 전개식에서 x^2항은

$36x^2\cdot1+54x\cdot(-6x)+27\cdot9x^2=36x^2-324x^2+243x^2=-45x^2$

따라서 x^2의 계수는 -45이다.

답 -45

035
$$\begin{aligned}9\times11\times101&=(10-1)(10+1)(100+1)\\&=(10^2-1)(10^2+1)\\&=10^4-1\end{aligned}$$

답 ①

036
$$\begin{aligned}2(3+1)(3^2+1)(3^4+1)&=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\\&=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\\&=(3^4-1)(3^4+1)\\&=3^8-1\end{aligned}$$

따라서 $a=8$, $b=1$이므로 $a+b=8+1=9$

답 ④

037
$$\begin{aligned}(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)&=1\cdot(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)\\&=(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)\\&=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)\\&=(3^4-2^4)(3^4+2^4)\\&=3^8-2^8\end{aligned}$$

답 3^8-2^8

038
$a+b=6$, $ab=-2$이므로

$$\begin{aligned}\frac{b}{a}+\frac{a}{b}&=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}\\&=\frac{6^2-2\cdot(-2)}{-2}=-20\end{aligned}$$

답 ①

039
$x+y=1$, $x^2+y^2=4$이므로

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서

$1^2=4+2xy\qquad\therefore\ xy=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ (x-y)^2=x^2+y^2-2xy=4-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=7$

답 ⑤

040
$x\neq0$이므로 $x^2+x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+1+\frac{1}{x}=0\qquad\therefore\ x+\frac{1}{x}=-1$

$\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-1)^2-2=-1$

답 ②

041
$x+y=\sqrt{6}$, $x^2+y^2=8$이므로

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서

$(\sqrt{6})^2=8+2xy\qquad\therefore\ xy=-1$

가

$$\begin{aligned}\therefore\ x^4+y^4&=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\\&=8^2-2\cdot(-1)^2=62\end{aligned}$$

나

단계	채점 요소	비율
가	xy의 값 구하기	40%
나	x^4+y^4의 값 구하기	60%

답 62

042
$a-b=4$, $a^2+b^2=8$이므로

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$에서

$4^2=8-2ab\qquad\therefore\ ab=-4$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3-b^3&=(a-b)^3+3ab(a-b)\\&=4^3+3\cdot(-4)\cdot4\\&=64-48=16\end{aligned}$$

답 ②

043
$x+y=2$, $x^3+y^3=20$이므로

$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서

$2^3=20+3xy\cdot2\qquad\therefore\ xy=-2$

$\therefore\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\cdot(-2)=8$

답 ④

044
$x+y=2$, $x^3+y^3=14$이므로

$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서

$2^3=14+3xy\cdot2\qquad\therefore\ xy=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}&=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}\\&=\frac{2^2-2\cdot(-1)}{-1}=-6\end{aligned}$$

답 ①

045
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=9+2=11$

이때, $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{11}$

$$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=(\sqrt{11})^3-3\sqrt{11}=8\sqrt{11}\end{aligned}$$

$\therefore \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2=(8\sqrt{11})^2=704$

다른 풀이

$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2=x^6+\frac{1}{x^6}+2$

$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2$

$=9^3-3\cdot 9+2=704$

답 704

046

$a+b+c=4$, $ab+bc+ca=5$이므로

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=4^2-2\cdot 5=6$

답 ①

047

$a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=4$이므로

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$1^2=4+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-\frac{3}{2}$

답 ②

048

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=2\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$

$=2\cdot(9-8)=2$

답 ②

049

$x+y+z=4$의 양변을 제곱하면

$(x+y+z)^2=16$에서

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=16$

이때, $x^2+y^2+z^2=6$이므로 $6+2(xy+yz+zx)=16$

$\therefore xy+yz+zx=5$

또한 $x^3+y^3+z^3=1$이므로

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$에서

$1-3xyz=4\cdot(6-5)$

$-3xyz=3 \qquad \therefore xyz=-1$

답 -1

실력 콕콕 본문 p.16~17

050 11	051 ②	052 ⑤	053 몫 : $2x-9$, 나머지 : 20		
054 50	055 ③	056 ②	057 16	058 ④	
059 180	060 65	061 ③	062 ④	063 ③	064 0
065 $\sqrt{26}$					

050

$A-(B-C)=A-B+C$

$=(x^2-xy+y^2)-(x^2-xy)+(2x^2+8xy)$

$=2x^2+8xy+y^2$

이므로 $a=2$, $b=8$, $c=1$

$\therefore a+b+c=2+8+1=11$

답 11

051

$A-2X=2B-C$에서 $2X=A-2B+C$이고,

$2X=A-2B+C$

$=(x^2+4x-3)-2(2x^2+3x-1)+(x^2-2x+7)$

$=x^2+4x-3-4x^2-6x+2+x^2-2x+7$

$=-2x^2-4x+6$

$\therefore X=-x^2-2x+3$

답 ②

052

한 모서리의 길이가 $x-1$인 정육면체의 부피 A는

$A=(x-1)^3$

한 모서리의 길이가 $x+1$인 정육면체의 겉넓이 B는

$B=6(x+1)^2$

$\therefore A+B=(x-1)^3+6(x+1)^2$

$=(x^3-3x^2+3x-1)+6(x^2+2x+1)$

$=x^3-3x^2+3x-1+6x^2+12x+6$

$=x^3+3x^2+15x+5$

답 ⑤

053

$A=(2x+1)(x-3)+5=2x^2-5x+2$

$$
\begin{array}{r}
2x\ -9 \\
x+2\overline{\smash{)}\,2x^2-5x+2} \\
\underline{2x^2+4x} \\
-9x+2 \\
\underline{-9x-18} \\
20
\end{array}
$$

따라서 다항식 A를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x-9$, 나머지는 20이다.

답 몫 : $2x-9$, 나머지 : 20

054

$(x-5)(x-3)(x+1)(x+3)$

$=\{(x-5)(x+3)\}\{(x-3)(x+1)\}$

$=(x^2-2x-15)(x^2-2x-3)$

$x^2-2x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-15)(t-3)=t^2-18t+45$

$=(x^2-2x)^2-18(x^2-2x)+45$

$=x^4-4x^3+4x^2-18x^2+36x+45$

$=x^4-4x^3-14x^2+36x+45$

따라서 $a=-14$, $b=36$이므로

$b-a=36-(-14)=50$

답 50

055

$(2x+1)^3(x-1)^2=(8x^3+12x^2+6x+1)(x^2-2x+1)$

이 식의 전개식에서 x항은

$6x\cdot1+1\cdot(-2x)=6x-2x=4x$

$\therefore a=4$

또한 x^2항은

$12x^2\cdot1+6x\cdot(-2x)+1\cdot x^2=12x^2-12x^2+x^2=x^2$

$\therefore b=1$

$\therefore a^2+b^2=4^2+1^2=17$

답 ③

056

$(x+1)$에서 1을 선택하고 나머지 괄호 안의 다항식에서 모두 x를 선택하여 곱하면 x^5

$(x+2)$에서 2를 선택하고 나머지 괄호 안의 다항식에서 모두 x를 선택하여 곱하면 $2x^5$

$(x+3)$에서 3을 선택하고 나머지 괄호 안의 다항식에서 모두 x를 선택하여 곱하면 $3x^5$

⋮

$(x+6)$에서 6을 선택하고 나머지 괄호 안의 다항식에서 모두 x를 선택하여 곱하면 $6x^5$

즉, 주어진 식의 전개식에서 x^5항은

$x^5+2x^5+3x^5+4x^5+5x^5+6x^5=21x^5$

따라서 구하는 x^5의 계수는 21이다.

답 ②

057

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=1\cdot(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)$

$=2^{16}-1=2^n-1$

$\therefore n=16$

답 16

058

$x\neq0$이므로 $x^2-4x+2=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\dfrac{2}{x}=0 \qquad \therefore x+\dfrac{2}{x}=4$

$\therefore x^2+\dfrac{4}{x^2}=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{2}{x}=4^2-4=12$

답 ④

059

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=3$이고, $ab=2$이므로

$\dfrac{a+b}{2}=3 \qquad \therefore a+b=6$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=6^3-3\cdot2\cdot6=180$

답 180

060

$a+b=3$, $ab=-4$이므로

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=3^2-4\cdot(-4)=25$

$\therefore a-b=5$ ($\because a>b$)

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=5^3+3\cdot(-4)\cdot5=65$

답 65

061

$a+b=3$, $ab=-1$이므로

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\cdot(-1)\cdot3=36$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=3^2-2\cdot(-1)=11$

$\therefore a^2(a-1)+b^2(b-1)=a^3-a^2+b^3-b^2$

$=(a^3+b^3)-(a^2+b^2)$

$=36-11=25$

다른 풀이

$a+b=3$에서 $a-1=2-b$, $b-1=2-a$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot(-1)=11$

$\therefore a^2(a-1)+b^2(b-1)=a^2(2-b)+b^2(2-a)$

$=2a^2-a^2b+2b^2-ab^2$

$=2(a^2+b^2)-ab(a+b)$

$=2\cdot11-(-1)\cdot3=25$

답 ③

062

$x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=5$이므로

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$0^2=5+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-\dfrac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$(xy+yz+zx)^2=\dfrac{25}{4}$

이때,

$(xy+yz+zx)^2$

$=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$

$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(y+z+x)$

$\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=\dfrac{25}{4}-0=\dfrac{25}{4}$

답 ④

063

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=0$에서

$xy+yz+zx=0$

$x^2+y^2+z^2=2$이므로

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$=x^2+y^2+z^2=2$

$\therefore (x+y+z)^6=\{(x+y+z)^2\}^3=2^3=8$

답 ③

064

$a+b+c=2$에서

$a+b=2-c$, $b+c=2-a$, $c+a=2-b$이므로

$(a+b)(b+c)(c+a)=(2-c)(2-a)(2-b)$ ··· 가

$a+b+c=2$, $ab+bc+ca=4$, $abc=8$이므로

$(2-c)(2-a)(2-b)=2^3-2^2(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc$

$=8-4\cdot2+2\cdot4-8=0$ ··· 나

단계	채점 요소	비율
가	식을 변형하여 나타내기	40%
나	전개하여 식의 값 구하기	60%

답 0

065

모든 모서리의 길이의 합이 32이므로

$4(a+b+c)=32$ $\therefore a+b+c=8$

겉넓이가 38이므로

$2(ab+bc+ca)=38$ ··· 가

이때, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=8^2-38=26$ ··· 나

따라서 대각선 AG의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{26}$ ··· 다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 조건에 맞는 식 세우기	30%
나	곱셈 공식의 변형을 이용하여 $a^2+b^2+c^2$의 값 구하기	40%
다	대각선 AG의 길이 구하기	30%

답 $\sqrt{26}$

I. 다항식

02 나머지정리

개념 콕콕 본문 p. 19

066

ㄴ. 주어진 식의 우변을 전개하면

$x(x-3)+4=x^2-3x+4$

이므로 좌변과 우변이 같다.

ㄷ. 주어진 식의 좌변을 전개하면

$(x-1)^2-(x+1)=x^2-2x+1-x-1$

$=x^2-3x$

이므로 좌변과 우변이 같다.

ㄹ. 주어진 식의 좌변을 전개하면

$(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

이므로 좌변과 우변이 같다.

따라서 항등식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

067

(1) 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=2$, $-(2b+2)=0$, $c-3=4$

$\therefore a=3$, $b=-1$, $c=7$

(2) 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-2b=0$, $-3(b-2)=0$, $2a-b+c=0$

$\therefore a=4$, $b=2$, $c=-6$

답 (1) $a=3$, $b=-1$, $c=7$ (2) $a=4$, $b=2$, $c=-6$

068

(1) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-2c=8$ $\therefore c=-4$

양변에 $x=1$을 대입하면

$-a-c=9$ $\therefore a=-5$

양변에 $x=2$를 대입하면

$6b=12$ $\therefore b=2$

$\therefore a=-5$, $b=2$, $c=-4$

(2) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$3a=9$ $\therefore a=3$

양변에 $x=3$을 대입하면

$6c=36$ $\therefore c=6$

양변에 $x=1$을 대입하면

$-2(b+c)=14$ $\therefore b=-13$

$\therefore a=3$, $b=-13$, $c=6$

답 (1) $a=-5$, $b=2$, $c=-4$ (2) $a=3$, $b=-13$, $c=6$

069

(1) 주어진 식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$a(3x-y)-2b(x+y)+5=3ax-ay-2bx-2by+5$

$=(3a-2b)x-(a+2b)y+5$

이므로

$(3a-2b)x-(a+2b)y+5=6x-2y+c$
이 식이 x, y에 대한 항등식이므로
$3a-2b=6$, $a+2b=2$, $c=5$
$\therefore a=2$, $b=0$, $c=5$
(2) 주어진 식을 x, y에 대하여 정리하면
$(3x-y)a-(y+x)b+2x-y=0$
$3ax-ay-by-bx+2x-y=0$
$(3a-b+2)x-(a+b+1)y=0$
이 식이 x, y에 대한 항등식이므로
$3a-b+2=0$, $a+b+1=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-\frac{3}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$

답 (1) $a=2$, $b=0$, $c=5$ (2) $a=-\frac{3}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$

070
(1) $f(x)=x^3-2x^2+5x-2$로 놓으면
$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(1)=1-2+5-2=2$
(2) $f(x)=-x^3+4x^2+kx-k$로 놓으면
$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 7이므로
$f(2)=-8+16+2k-k=7$
$\therefore k=-1$
(3) $f(x)=x^4+x^2-kx-1$로 놓으면
$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로
$f(-1)=1+1+k-1=0$
$\therefore k=-1$

답 (1) 2 (2) -1 (3) -1

071
(1)
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 5 & 1 & -2 & 3 \\ & & 5 & 6 & 4 \\ \hline & 5 & 6 & 4 & \boxed{7} \end{array}$$
$\therefore$ 몫 : $5x^2+6x+4$, 나머지 : 7
(2)
$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 4 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 6 & \boxed{13} \end{array}$$
$\therefore$ 몫 : x^3+2x^2+3x+6, 나머지 : 13
(3)
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ \hline & 2 & 2 & -3 & \boxed{\frac{5}{2}} \end{array}$$
$\therefore$ 몫 : $2x^2+2x-3$, 나머지 : $\frac{5}{2}$

답 (1) 몫 : $5x^2+6x+4$, 나머지 : 7
(2) 몫 : x^3+2x^2+3x+6, 나머지 : 13
(3) 몫 : $2x^2+2x-3$, 나머지 : $\frac{5}{2}$

유형 콕콕
본문 p.20~25

072 ⑤	073 ④	074 $a=1$, $b=3$, $c=4$			075 ⑤
076 3	077 ④	078 ②	079 ⑤	080 2	081 ③
082 ③	083 992	084 ⑤	085 ①	086 ①	087 2
088 ④	089 ④	090 ③	091 -1	092 ③	093 ②
094 ③	095 -1	096 ③	097 ④	098 6	099 ①
100 ①	101 1	102 ③	103 ③	104 $\frac{1}{5}$	105 ②
106 ③	107 ②	108 3	109 3	110 ②	

111 몫 : $\frac{1}{4}px+\frac{1}{4}q$, 나머지 : r

072
항등식의 성질을 이용하여 양변의 계수를 비교하면
$3x^2+(a-1)x+1=bx^2+x+c$에서
$3=b$, $a-1=1$, $1=c$
따라서 $a=2$, $b=3$, $c=1$이므로
$a+b+c=2+3+1=6$

답 ⑤

073
$x^3+ax^2-2=(x-c)(x^2+2bx-2)$에서 우변을 x에 대하여 정리하면
$x^3+ax^2-2=x^3+2bx^2-2x-cx^2-2bcx+2c$
$=x^3+(2b-c)x^2-2(bc+1)x+2c$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$a=2b-c$, $0=-2(bc+1)$, $-2=2c$
따라서 $a=3$, $b=1$, $c=-1$이므로
$a+b+c=3+1+(-1)=3$

답 ④

074
양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $a=1$
우변을 x에 대하여 정리하면
$x^2+x+2=(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=x^2-2x+1+bx-b+c$
$=x^2+(b-2)x-b+c+1$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$b-2=1$, $-b+c+1=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$b=3$, $c=4$

답 $a=1$, $b=3$, $c=4$

075
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$d=0$
양변에 $x=2$를 대입하면
$2c+d=32$ $\quad\therefore c=16$
양변에 $x=1$을 대입하면
$-b+c+d=4$ $\quad\therefore b=12$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$-6a+3b-c+d=-4$ $\quad\therefore a=4$
$\therefore a+b+c+d=4+12+16+0=32$

답 ⑤

076
주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\alpha^3-1=0 \qquad \therefore \alpha^3=1$
양변에 $x=\beta$를 대입하면
$\beta^3-1=0 \qquad \therefore \beta^3=1$
양변에 $x=\gamma$를 대입하면
$\gamma^3-1=0 \qquad \therefore \gamma^3=1$
$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=1+1+1=3$ 답 3

077

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$1-a+1+b=0$
$\therefore a-b=2$ …… ㉠
양변에 $x=2$를 대입하면
$16-4a-2+b=0$
$\therefore 4a-b=14$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=4,\ b=2$
즉, $x^4-4x^2-x+2=(x+1)(x-2)f(x)$이므로
양변에 $x=3$을 대입하면
$81-36-3+2=4\cdot f(3)$
$\therefore f(3)=11$ 답 ④

078

$(k+3)x-(3k+4)y+5k=0$을 k에 대하여 정리하면
$kx+3x-3ky-4y+5k=0$
$(x-3y+5)k+3x-4y=0$
이 식이 k에 대한 항등식이므로
$\begin{cases} x-3y+5=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-4y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times 3-$㉡을 하면
$-5y+15=0 \qquad \therefore y=3$
$y=3$을 ㉡에 대입하면
$3x-12=0 \qquad \therefore x=4$
$\therefore x+y=4+3=7$

다른 풀이

$(k+3)x-(3k+4)y+5k=0$은 k에 대한 항등식이므로
(i) $k=0$을 대입하면
$3x-4y=0$ …… ㉠
(ii) $k=-1$을 대입하면
$2x-y-5=0$ …… ㉡
㉠$-$㉡$\times 4$를 하면
$-5x+20=0 \qquad \therefore x=4$
$x=4$를 ㉠에 대입하면
$12-4y=0 \qquad \therefore y=3$
$\therefore x+y=4+3=7$ 답 ②

079

주어진 식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면
$ax-ay+2a+3bx+by-b=-x+9y-c$
$(a+3b)x+(-a+b)y+2a-b=-x+9y-c$
이 식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a+3b=-1,\ -a+b=9,\ 2a-b=-c$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$a=-7,\ b=2,\ c=16$
$\therefore a-b+c=-7-2+16=7$ 답 ⑤

080

방정식 $x^2+(k-1)x+(k-3)m+n+2=0$의 근이 -1이므로
$x=-1$을 대입하면
$1-(k-1)+(k-3)m+n+2=0$ …… ㉠
가

㉠을 k에 대하여 정리하면
$1-k+1+km-3m+n+2=0$
$(m-1)k+4-3m+n=0$
나

이 식이 k에 대한 항등식이므로
$m-1=0,\ 4-3m+n=0$
따라서 $m=1,\ n=-1$이므로
$m^2+n^2=1^2+(-1)^2=2$
다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 방정식에 $x=-1$ 대입하기	20%
나	㉠을 k에 대하여 정리하기	30%
다	m^2+n^2의 값 구하기	50%

답 2

081

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(2-3+3)^3=a_6+a_5+\cdots+a_1+a_0$
$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6=2^3=8$ 답 ③

082

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$2^{30}=a_{30}+a_{29}+\cdots+a_1+a_0$
$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{30}=2^{30}$ 답 ③

083

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(1+1+2)^5=a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$
$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=4^5=2^{10}=1024$
이때, a_0은 상수항이므로 $a_0=2^5=32$
$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10})-a_0$
$=1024-32=992$ 답 992

084

x^3의 계수가 1이므로 x^3+ax+b를 x^2+x-1로 나누었을 때의 몫을
$x+q$ (q는 상수)라 하면
$x^3+ax+b=(x^2+x-1)(x+q)$
$=x^3+qx^2+x^2+qx-x-q$
$=x^3+(q+1)x^2+(q-1)x-q$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$0=q+1,\ a=q-1,\ b=-q$

따라서 $q=-1$, $a=-2$, $b=1$이므로

$a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$ 답 ⑤

085

다항식 $f(x)$를 x^2-6으로 나누었을 때의 몫이 $x-1$, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x^2-6)(x-1)+2=x^3-x^2-6x+8$

따라서 x의 계수는 -6이다. 답 ①

086

x^3의 계수가 1이므로 x^3+ax-6을 x^2+2x+b로 나누었을 때의 몫을 $x+q$ (q는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} x^3+ax-6 &= (x^2+2x+b)(x+q)+x+2 \\ &= x^3+qx^2+2x^2+2qx+bx+bq+x+2 \\ &= x^3+(q+2)x^2+(2q+b+1)x+bq+2 \end{aligned}$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$0=q+2$, $a=2q+b+1$, $-6=bq+2$

따라서 $q=-2$, $a=1$, $b=4$이므로

$a+b=1+4=5$

다른 풀이

$$\begin{array}{r|llll} & x-2 & & & \\ \hline x^2+2x+b & x^3 & & +ax & -6 \\ & x^3+2x^2 & & +bx & \\ \hline & & -2x^2 & +(a-b)x & -6 \\ & & -2x^2 & -4x & -2b \\ \hline & & & (a-b+4)x & -6+2b \end{array}$$

나머지가 $x+2$이므로

$(a-b+4)x-6+2b=x+2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a-b+4=1$, $-6+2b=2$

따라서 $a=1$, $b=4$이므로

$a+b=1+4=5$ 답 ①

087

$4x^3-4x^2-2x+6=g(x)(x-1)+4$이므로

$4x^3-4x^2-2x+2=g(x)(x-1)$

$\therefore g(x)=(4x^3-4x^2-2x+2)\div(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2-2 \\ \hline x-1 & 4x^3-4x^2-2x+2 \\ & 4x^3-4x^2 \\ \hline & \qquad -2x+2 \\ & \qquad -2x+2 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

따라서 $g(x)=4x^2-2$이므로

$g(1)=4\cdot1-2=2$ 답 2

088

$f(x)=x^7+27x^4-x+k$라 하면

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 12이므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)=12$

$f(x)$에 $x=-1$을 대입하면

$-1+27+1+k=12$

$\therefore k=-15$ 답 ④

089

$f(x)=8x^3+4x^2-2x+k$라 하면

$f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지가 10이므로 나머지정리에 의하여

$f\left(\frac{1}{2}\right)=10$

$f(x)$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$1+1-1+k=10$

$\therefore k=9$ 답 ④

090

$f(x)=(x+1)(x+3)$이므로

$f(-2)=-1\cdot1=-1$

따라서 다항식 $\{f(x)+1\}\{f(x)+3\}$을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned} \{f(-2)+1\}\{f(-2)+3\} &= (-1+1)\cdot(-1+3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 ③

091

$f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여

$f(5)=4$ ㉮

$g(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로 나머지정리에 의하여

$g(5)=-3$ ㉯

따라서 $2f(x)+3g(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned} 2f(5)+3g(5) &= 2\cdot4+3\cdot(-3) \\ &= 8-9=-1 \end{aligned}$$

㉰

단계	채점 요소	비율
㉮	$f(5)$의 값 구하기	30%
㉯	$g(5)$의 값 구하기	30%
㉰	구하고자 하는 나머지 구하기	40%

답 -1

092

$f(x)=ax^3+bx^2-1$이라 하면

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=a+b-1=2$

$\therefore a+b=3$ …… ㉠

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 -4이므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)=-a+b-1=-4$

$\therefore -a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=0$

$\therefore ab=3\cdot0=0$ 답 ③

093

$f(x)=x^3+ax^2+2x+1$이라 하면 나머지정리에 의하여

$f(2)=f(-1)$이어야 한다.

$f(2)=8+4a+4+1=4a+13$

$f(-1)=-1+a-2+1=a-2$

이므로

$4a+13=a-2$, $3a=-15$

$\therefore a=-5$ 답 ②

094

$f(x)=x^3+ax^2+bx-2$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(2)=0$, $f(-1)=-3$

$f(2)=0$에서 $8+4a+2b-2=0$

$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

$f(-1)=-3$에서 $-1+a-b-2=-3$

$\therefore a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$

$\therefore ab=-1\cdot(-1)=1$ 답 ③

095

$f(x)=ax^5+bx^3+cx+3$이라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=a+b+c+3=7$

$\therefore a+b+c=4$

가

또한 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$이므로

$f(-1)=-a-b-c+3$

$=-(a+b+c)+3$

$=-4+3=-1$

나

단계	채점 요소	비율
가	$a+b+c$의 값 구하기	40%
나	구하고자 하는 나머지 구하기	60%

답 -1

096

$f(x)$를 $(x-5)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-5)(x+3)Q(x)+ax+b$

$f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지가 10이므로 나머지정리에 의하여

$f(5)=5a+b=10$ …… ㉠

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -6이므로 나머지정리에 의하여

$f(-3)=-3a+b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=0$

따라서 $R(x)=2x$이므로

$R(1)=2\cdot1=2$ 답 ③

097

$ax^3+x^2-2b=(x^2-1)Q(x)+2x-1$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+2x-1$ …… ㉠

이 식은 x에 대한 항등식이므로

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$-a+1-2b=-3$ $\therefore a+2b=4$ …… ㉡

㉠에 $x=1$을 대입하면

$a+1-2b=1$ $\therefore a-2b=0$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$ 답 ④

098

$f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-2x-3)Q_1(x)+x-1$

$=(x+1)(x-3)Q_1(x)+x-1$ …… ㉠

$f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+x-6)Q_2(x)+4$

$=(x+3)(x-2)Q_2(x)+4$ …… ㉡

$f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q_3(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$ …… ㉢

㉠에서 $f(-1)=-2$

㉡에서 $f(2)=4$

이때, ㉢에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b=-2$ …… ㉣

$f(2)=2a+b=4$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=0$

따라서 $R(x)=2x$이므로

$R(3)=2\cdot3=6$ 답 6

099

$f(x)$를 x^2-x+6으로 나누었을 때의 몫이 $x-1$이고 나머지는 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2-x+6)(x-1)+x+1$

이때, $f(x+3)$을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 $x=-3$을 대입하면 되므로

$f(-3+3)=f(0)$

$=6\cdot(-1)+1=-5$ 답 ①

100

$f(x)+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

$f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-2x-3)Q_1(x)$

$=(x+1)(x-3)Q_1(x)$

$\therefore f(-1)=0$

$f(x)-2$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)-2=(x-1)Q_2(x)$

$\therefore f(1)=2$

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)+1=-a+b$

$\therefore -a+b=1$ …… ㉡

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+1=a+b$

$\therefore a+b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 $x+2$이다. 답 ①

101

$f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-2)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

가

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)Q_1(x)$

$\therefore f(2)=0$

나

$f(x)-4$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)-4=(x+2)Q_2(x)$

$\therefore f(-2)=4$

다

㉠에 $x=2$, $x=-2$를 각각 대입하면

$f(2)=2a+b=0$ …… ㉡

$f(-2)=-2a+b=4$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

따라서 $R(x)=-x+2$이므로

$R(1)=-1+2=1$

라

단계	채점 요소	비율
가	조건에 맞는 식 세우기	30%
나	$f(2)$의 값 구하기	20%
다	$f(-2)$의 값 구하기	20%
라	$R(1)$의 값 구하기	30%

답 1

102

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, R이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+R$

$=(3x-3)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $3x-3$으로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 ③

103

$f(x)$를 $4x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, R이므로

$f(x)=(4x+2)Q(x)+R$

$=(2x+1)\cdot 2Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 ③

104

$f(x)$를 $x+\frac{4}{5}$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, R이므로

$f(x)=\left(x+\frac{4}{5}\right)Q(x)+R$

$=(5x+4)\cdot\frac{1}{5}Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $5x+4$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{5}Q(x)$, 나머지는 R이므로

$a=\frac{1}{5}$, $b=1$

$\therefore ab=\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

105

$f(x)=x^3+ax^2+2x+4$라 하면

$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-1+a-2+4=a+1=0$

$\therefore a=-1$ 답 ②

106

$f(x)=x^3+ax+4$라 하면

$f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)=1+a+4=a+5=0$

$\therefore a=-5$ 답 ③

107

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$라 하고,

$f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2=(x^2-3x+2)Q(x)$

$=(x-2)(x-1)Q(x)$

즉, $f(x)$는 $x-2$와 $x-1$로 각각 나누어떨어지므로

$f(2)=8+4a+2b+2=0$

$\therefore 2a+b=-5$ …… ㉠

$f(1)=1+a+b+2=0$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+(-1)^2=5$ 답 ②

108

다항식 $f(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(x)$가 $x(x-1)$로 나누어떨어지므로

$R(x)=ax^2+bx+c=ax(x-1)$

$\therefore f(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax(x-1)$ …… ㉠

또한 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 $x-1$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)Q'(x)+x-1$

$\therefore f(2)=1$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=\frac{1}{2}x(x-1)$이므로

$R(3)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3$ 답 3

109

조립제법을 이용하여 x^3-3x^2+ax-2를 $x-2$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & a & -2 \\ & & 2 & -2 & 2a-4 \\ \hline & 1 & -1 & a-2 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

이때, $-2+(2a-4)=2a-6=0$

$\therefore a=3$

즉, $x^3-3x^2+3x-2=(x-2)(x^2-x+1)$이므로

$b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=3+(-1)+1=3$

답 3

110

$2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로 조립제법을 이용하여 $2x^3+x^2+3x+3$을

$x-\frac{1}{2}$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 2 & 2 & 4 & \multicolumn{1}{|r}{5} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^3+x^2+3x+3 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+4)+5 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2(x^2+x+2)+5 \\ &= (2x-1)(x^2+x+2)+5 \end{aligned}$$

따라서 구하는 몫은 x^2+x+2, 나머지는 5이다.

답 ②

111

주어진 조립제법을 식으로 나타내면

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \left(x-\frac{1}{4}\right)(px+q)+r \\ &= 4\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}(px+q)+r \\ &= (4x-1)\left(\frac{1}{4}px+\frac{1}{4}q\right)+r \end{aligned}$$

따라서 구하는 몫은 $\frac{1}{4}px+\frac{1}{4}q$, 나머지는 r이다.

답 몫 : $\frac{1}{4}px+\frac{1}{4}q$, 나머지 : r

실력 콕콕 본문 p.26~27

112 5	113 ⑤	114 ②	115 29	116 10	117 ①
118 ⑤	119 ④	120 20	121 ②	122 ①	123 ①
124 ⑤	125 3	126 2	127 x^2+3x+2		

112

주어진 등식에서 좌변의 차수와 우변의 차수가 같아야 하므로 $f(x)$는 일차식이다.

$f(x)=px+q\ (p\neq 0)$라 하면

$$\begin{aligned} (x^2+x+1)(px+q) &= px^3+(p+q)x^2+(p+q)x+q \\ &= x^3+3x^2+ax+b \end{aligned}$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$p=1,\ p+q=3,\ p+q=a,\ q=b$

따라서 $p=1,\ q=2,\ a=3,\ b=2$이므로

$a+b=3+2=5$

답 5

113

$a^2(x-1)-a(x+1)-2(x-3)=0$이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$-2a+4=0 \qquad \therefore a=2$

답 ⑤

114

$\frac{ax+by+1}{x+2y-1}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$ax+by+1=k(x+2y-1)$

$ax+by+1=kx+2ky-k$

$(a-k)x+(b-2k)y+1+k=0$

이 식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로

$a-k=0,\ b-2k=0,\ 1+k=0$

따라서 $k=-1,\ a=-1,\ b=-2$이므로

$a+b=-1+(-2)=-3$

답 ②

115

$(x-1)^3+3(x-1)^2+2(x-1)+4$

$=(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)+c$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$4=8+4a+2b+c$

$\therefore 4a+2b+c=-4$ …… ㉡

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$-8+12-4+4=c$

$\therefore c=4$ …… ㉢

㉠에 $x=0$을 대입하면

$-1+3-2+4=1+a+b+c$

$\therefore a+b+c=3$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=2,\ c=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-3)^2+2^2+4^2=29$

답 29

116

$$\begin{aligned} f(x+a) &= (x+a)^3+3(x+a)^2-4 \\ &= (x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)+3(x^2+2ax+a^2)-4 \\ &= x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+3x^2+6ax+3a^2-4 \\ &= x^3+(3a+3)x^2+(3a^2+6a)x+a^3+3a^2-4 \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

이때, $f(x+a)=x^3+bx-2$의 우변에서 이차항의 계수가 0이므로

$3a+3=0 \qquad \therefore a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} x^3+(-3+3)x^2+(3-6)x-1+3-4 &= x^3-3x-2 \\ &= x^3+bx-2 \end{aligned}$$

따라서 $b=-3$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+(-3)^2=10$ 답 10

117

$(x+1)f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$(1+1)f(1)=4 \quad \therefore f(1)=2$

$f(1)=1+a+b=2$에서

$a+b=1$ …… ㉠

$(x-2)f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$(-1-2)f(-1)=6 \quad \therefore f(-1)=-2$

$f(-1)=1-a+b=-2$에서

$a-b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-1)^2=5$ 답 ①

118

$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$에서

$f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=-8+4a-2b+3=4a-2b-5$

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=1+a+b+3=a+b+4$

이때, $f(-2)=f(1)$이므로

$4a-2b-5=a+b+4$

$3a-3b=9 \quad \therefore a-b=3$ …… ㉠

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-1+a-b+3$

$=a-b+2=3+2$ ($\because$ ㉠)

$=5$ 답 ⑤

119

$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 11이므로

$2f(1)+3g(1)=11$ …… ㉠

$f(x)-g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 13이므로

$f(1)-g(1)=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(1)=10,\ g(1)=-3$

따라서 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)+g(1)=10+(-3)=7$ 답 ④

120

$f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지가 R_1이므로

$R_1=f(a)=a^3+a^2+3a+2$

$f(x)$를 $x+a$로 나누었을 때의 나머지가 R_2이므로

$R_2=f(-a)=-a^3+a^2-3a+2$

이때, $R_1+R_2=2a^2+4=8$이므로

$a^2=2$

따라서 $f(x)$를 $x-a^2$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(a^2)=f(2)=2^3+2^2+3\cdot2+2=20$ 답 20

121

$f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$f(2\cdot1)=4 \quad \therefore f(2)=4$

$f(x)+5$는 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)+5=0 \quad \therefore f(-1)=-5$

$f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

이때, $f(2)=4$이므로 ㉠에 $x=2$를 대입하면

$2a+b=4$ …… ㉡

또한 $f(-1)=-5$이므로 ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$-a+b=-5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2$

따라서 $R(x)=3x-2$이므로

$R(2)=3\cdot2-2=4$ 답 ②

122

$f(x)=2x^3+ax^2+x+b$가 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로

$f(1)=2+a+1+b=0$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉠

$f(2)=16+4a+2+b=0$

$\therefore 4a+b=-18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=2$

$\therefore a-b=-5-2=-7$ 답 ①

123

$$\begin{array}{r|cccc}
2 & 1 & 0 & m & n \\
 & & 2 & 4 & 2(m+4) \\
\hline
 & 1 & 2 & m+4 & \multicolumn{1}{|c}{n+2(m+4)}
\end{array}$$

$m+4=6,\ n+2(m+4)=3$이므로

$m=2,\ n=-9$

$\therefore m+n=2+(-9)=-7$ 답 ①

124

x^3+ax^2-3x+b가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 $x+1$로 두 번 나누어떨어진다.

즉, 조립제법을 두 번 연속으로 이용하면

$$\begin{array}{r|cccc}
-1 & 1 & a & -3 & b \\
 & & -1 & -a+1 & a+2 \\
\hline
-1 & 1 & a-1 & -a-2 & \multicolumn{1}{|c}{a+b+2} \\
 & & -1 & -a+2 & \\
\hline
 & 1 & a-2 & \multicolumn{1}{|c}{-2a} &
\end{array}$$

이때, $a+b+2=0,\ -2a=0$이므로

$a=0,\ b=-2$

$\therefore a-b=0-(-2)=2$ 답 ⑤

125

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 5이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+5$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 x^2+x+1이고 나머지가 4이므로

$Q(x)=(x-2)(x^2+x+1)+4$

$\therefore f(x)=(x-1)\{(x-2)(x^2+x+1)+4\}+5$

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$이므로

$f(-1)=-2\cdot\{(-3)\cdot1+4\}+5=3$ 답 3

126

$f(x)$가 삼차식이므로 $f(x)-2$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)-2=(x-1)^2(ax+b)$ …… ㉠

가

이때, $f(x)+2=\{f(x)-2\}+4$이므로

$f(x)+2=(x-1)^2(ax+b)+4$

$=\{(x+1)^2-4x\}(ax+b)+4$

$=(x+1)^2(ax+b)-4x(ax+b)+4$

$=(x+1)^2(ax+b)-4(ax^2+bx-1)$

$f(x)+2$는 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$-4(ax^2+bx-1)$도 $(x+1)^2$으로 나누어떨어진다.

즉, $ax^2+bx-1=a(x+1)^2$

$=ax^2+2ax+a$

이므로 $b=2a$, $-1=a$

$\therefore a=-1$, $b=-2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)-2=(x-1)^2(-x-2)$

$\therefore f(x)=(x^2-2x+1)(-x-2)+2$

$=-x^3+3x$

나

따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=-(-2)^3+3\cdot(-2)=2$

다

단계	채점 요소	비율
가	조건에 맞는 식 세우기	20%
나	식을 변형하여 $f(x)$ 구하기	50%
다	나머지정리를 이용하여 나머지 구하기	30%

답 2

127

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$f(1)=6$

$f(x)$를 x^3-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

가

이때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$이므로

ax^2+bx+c도 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 $2x+1$이다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+2x+1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+2x+1$ …… ㉠

나

$f(1)=6$이므로 ㉠에 $x=1$을 대입하면

$3a+3=6$ $\therefore a=1$

따라서 ㉠에 $a=1$을 대입하면

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+x^2+3x+2$이므로

$f(x)$를 x^3-1로 나누었을 때의 나머지는 x^2+3x+2이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	조건에 맞는 식 세우기	30%
나	식을 변형하여 나타내기	30%
다	구하고자 하는 나머지 구하기	40%

다른 풀이

$f(x)$를 x^3-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=(x^2+x+1)\{(x-1)Q(x)+a\}+(b-a)x+(c-a)$

그런데 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$이므로

$b-a=2$ …… ㉠

$c-a=1$ …… ㉡

또한 $f(1)=6$이므로

$a+b+c=6$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=3$, $c=2$

따라서 구하는 나머지는 x^2+3x+2이다. 답 x^2+3x+2

03 인수분해

개념 콕콕

본문 p.29

128

(1) $5a^2b+10ab=5ab(a+2)$

(2) $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y)$

(3) $1-x-y+xy=1-x-y(1-x)=(1-x)(1-y)$

답 (1) $5ab(a+2)$ (2) $(a+b)(x+y)$ (3) $(1-x)(1-y)$

129

(1) $16x^2+8x+1=(4x)^2+2\cdot4x\cdot1+1^2=(4x+1)^2$

(2) $4x^2-20x+25=(2x)^2-2\cdot2x\cdot5+5^2=(2x-5)^2$

(3) $9a^2+6ab+b^2=(3a)^2+2\cdot3a\cdot b+b^2=(3a+b)^2$

답 (1) $(4x+1)^2$ (2) $(2x-5)^2$ (3) $(3a+b)^2$

130

(1) $9x^2-y^2=(3x)^2-y^2=(3x+y)(3x-y)$

(2) $36a^2-16b^2=4(9a^2-4b^2)=4\{(3a)^2-(2b)^2\}$
$=4(3a+2b)(3a-2b)$

답 (1) $(3x+y)(3x-y)$ (2) $4(3a+2b)(3a-2b)$

131

(1) $x^2+12x+35=(x+5)(x+7)$

(2) $7a^2-20ab-3b^2=(7a+b)(a-3b)$

답 (1) $(x+5)(x+7)$ (2) $(7a+b)(a-3b)$

132

(1) $a^2+b^2+9c^2+2ab+6bc+6ca$
$=a^2+b^2+(3c)^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot 3c+2\cdot 3c\cdot a$
$=(a+b+3c)^2$

(2) $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$
$=x^2+(-y)^2+(-z)^2+2x\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot(-z)+2(-z)\cdot x$
$=(x-y-z)^2$

답 (1) $(a+b+3c)^2$ (2) $(x-y-z)^2$

133

(1) $a^3+27=a^3+3^3=(a+3)(a^2-3a+9)$

(2) $8a^3-27b^3=(2a)^3-(3b)^3=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

(3) $8x^3-64y^3=8\{x^3-(2y)^3\}=8(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

답 (1) $(a+3)(a^2-3a+9)$
(2) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$
(3) $8(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

134

(1) $x^3+12x^2+48x+64=x^3+3\cdot x^2\cdot4+3\cdot x\cdot4^2+4^3$
$=(x+4)^3$

(2) $-a^3+6a^2b-12ab^2+8b^3$
$=(-a)^3+3\cdot(-a)^2\cdot2b+3\cdot(-a)\cdot(2b)^2+(2b)^3$
$=(-a+2b)^3$

(3) $a^3+b^3-c^3+3abc$
$=a^3+b^3+(-c)^3-3a\cdot b\cdot(-c)$
$=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

답 (1) $(x+4)^3$ (2) $(-a+2b)^3$
(3) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

135

(1) $x+1=t$로 놓으면
$(x+1)^2-(x+1)-12=t^2-t-12=(t+3)(t-4)$
$=(x+1+3)(x+1-4)$
$=(x+4)(x-3)$

(2) $x^2-4x=t$로 놓으면
$(x^2-4x)(x^2-4x+9)+20$
$=t(t+9)+20=t^2+9t+20=(t+4)(t+5)$
$=(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)$
$=(x-2)^2(x^2-4x+5)$

답 (1) $(x+4)(x-3)$ (2) $(x-2)^2(x^2-4x+5)$

136

(1) $a^4+4a^2+16=a^4+8a^2+16-4a^2=(a^2+4)^2-(2a)^2$
$=(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

(2) $x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)$
$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

답 (1) $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$
(2) $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

137

(1) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-2xy+y^2-2x+2y-3$
$=x^2-(2y+2)x+y^2+2y-3$
$=x^2-(2y+2)x+(y+3)(y-1)$
$=\{x-(y+3)\}\{x-(y-1)\}$
$=(x-y-3)(x-y+1)$

(2) 주어진 식을 차수가 낮은 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$y^2+xy+ax-a^2=(y+a)x+y^2-a^2$
$=(y+a)x+(y+a)(y-a)$
$=(y+a)(x+y-a)$

답 (1) $(x-y-3)(x-y+1)$ (2) $(y+a)(x+y-a)$

138

(1) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$으로 놓으면
$f(1)=1-6+11-6=0$
이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$
$=(x-1)(x-2)(x-3)$

(2) $f(x)=x^3-7x-6$으로 놓으면

$f(-1)=-1+7-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x+2)(x-3)$

답 (1) $(x-1)(x-2)(x-3)$ (2) $(x+1)(x+2)(x-3)$

유형 콕콕 본문 p.30~35

139 ③ **140** ② **141** ④ **142** $(x+y)(x-y)(x-z)$
143 ⑤ **144** ① **145** ③
146 (1) $(2x+y-3)(x+y-2)$ (2) $(2x+1)(5x+1)$
147 ⑤ **148** ③ **149** ⑤
150 $(x-2y-1)(x^2+4y^2+2xy+x-2y+1)$ **151** ⑤
152 ③ **153** ③ **154** $(5x+y)(x+5y)$ **155** ③
156 (1) $(x+2)(x-2)(x^2-3)$
(2) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
(3) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(3x^2+1)$
157 ① **158** $(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$ **159** ②
160 ⑤ **161** 11 **162** $(x^2-2x-6)(x^2-2x-12)$
163 ⑤ **164** ⑤ **165** ②, ③
166 $(x+y+1)(x+3y-2)$ **167** ⑤ **168** ④ **169** ④
170 ③ **171** ② **172** -55 **173** ⑤ **174** ③ **175** ①
176 74 **177** ④ **178** ② **179** ⑤ **180** ④ **181** ⑤
182 ③ **183** $(x-a)(x+a)(x+2a)$

139

주어진 식에서 공통 인수를 묶으면

$2ax^2y+3axy^2=axy(2x+3y)$ 답 ③

140

$x^2-xy-xz+yz=x(x-y)-z(x-y)$

$=(x-y)(x-z)$

따라서 인수인 것은 ② $x-y$이다. 답 ②

141

① $(a-b)c-b(b-a)=(a-b)c+b(a-b)$

$=(a-b)(b+c)$

② $(x-2)^2+3(2-x)=(x-2)^2-3(x-2)$

$=(x-2)\{(x-2)-3\}$

$=(x-2)(x-5)$

③ $2abx^2-8ab=2ab(x^2-4)=2ab(x+2)(x-2)$

④ $(a-b)c-(b-a)+(a-b)d$

$=(a-b)c+(a-b)+(a-b)d$

$=(a-b)(c+d+1)$

⑤ $3x(1+y)-6x^2(1+y)=(3x-6x^2)(1+y)$

$=3x(1-2x)(1+y)$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

142

$x^3-xy^2+y^2z-x^2z=x(x^2-y^2)-z(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(x-z)$

$=(x+y)(x-y)(x-z)$

답 $(x+y)(x-y)(x-z)$

143

$a^2-2ab+b^2-16c^2=(a^2-2ab+b^2)-16c^2$

$=(a-b)^2-(4c)^2$

$=(a-b+4c)(a-b-4c)$

따라서 인수인 것은 ⑤ $a-b+4c$이다. 답 ⑤

144

$x^2-(2a+5)x+(a+2)(a+3)$

$=\{x-(a+2)\}\{x-(a+3)\}$

$=(x-a-2)(x-a-3)$

이때, x에 대한 일차식인 두 인수의 합이 $2x+7$이므로

$(x-a-2)+(x-a-3)=2x-2a-5$

$=2x+7$

$-2a-5=7$

$\therefore a=-6$ 답 ①

145

$x^2+4y^2+16z^2-4xy-16yz+8xz$

$=x^2+(-2y)^2+(4z)^2+2\cdot x\cdot(-2y)+2\cdot(-2y)\cdot 4z+2\cdot x\cdot 4z$

$=(x-2y+4z)^2$ 답 ③

146

(1) $2x^2+(3y-7)x+(y-3)(y-2)$

$=(2x+y-3)(x+y-2)$

(2) $2(x+2)^2+5(x-1)(x+2)+3(x-1)^2$

$=\{(x+2)+(x-1)\}\{2(x+2)+3(x-1)\}$

$=(2x+1)(5x+1)$

답 (1) $(2x+y-3)(x+y-2)$ (2) $(2x+1)(5x+1)$

147

① $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=(x-2y)^3$

② $27x^3+8y^3=(3x)^3+(2y)^3=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

③ $y^3-3y^2+3y-1=y^3-3\cdot y^2\cdot 1+3\cdot y\cdot 1^2-1^3$

$=(y-1)^3$

④ $x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$

⑤ $x^3-27=x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+9)$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

148

$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

따라서 인수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

149

$(x-2y)^3-8y^3$
$=(x-2y)^3-(2y)^3$
$=\{(x-2y)-2y\}\{(x-2y)^2+(x-2y)\cdot 2y+(2y)^2\}$
$=(x-4y)(x^2-4xy+4y^2+2xy-4y^2+4y^2)$
$=(x-4y)(x^2-2xy+4y^2)$ 답 ⑤

150

$x^3-8y^3-6xy-1$
$=x^3+(-2y)^3+(-1)^3-3\cdot x\cdot(-2y)\cdot(-1)$
$=(x-2y-1)\{x^2+(-2y)^2+(-1)^2-x\cdot(-2y)$
$-(-2y)\cdot(-1)-(-1)\cdot x\}$
$=(x-2y-1)(x^2+4y^2+2xy+x-2y+1)$

답 $(x-2y-1)(x^2+4y^2+2xy+x-2y+1)$

151

$(2x-y)^2-(2x+3y)^2$
$=\{(2x-y)+(2x+3y)\}\{(2x-y)-(2x+3y)\}$
$=(4x+2y)\cdot(-4y)$
$=-8y(2x+y)$ 답 ⑤

152

$x^2-y^2+x+y=(x^2-y^2)+(x+y)$
$=(x+y)(x-y)+(x+y)$
$=(x+y)(x-y+1)$

따라서 인수인 것은 ③ $x-y+1$이다. 답 ③

153

$a^4-b^4-2b^2c^2-c^4=a^4-(b^4+2b^2c^2+c^4)$
$=(a^2)^2-(b^2+c^2)^2$
$=(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)$

따라서 인수인 것은 ③ $a^2-b^2-c^2$이다. 답 ③

154

$9(x+y)^2-4(x-y)^2$
$=\{3(x+y)\}^2-\{2(x-y)\}^2$
$=(3x+3y)^2-(2x-2y)^2$ ······ 가

$=\{(3x+3y)+(2x-2y)\}\{(3x+3y)-(2x-2y)\}$
$=(5x+y)(x+5y)$ ······ 나

단계	채점 요소	비율
가	식을 변형하여 나타내기	50%
나	인수분해하기	50%

답 $(5x+y)(x+5y)$

155

$x^2=t$로 놓으면

$x^4-8x^2+16=t^2-8t+16=(t-4)^2$
$=(x^2-4)^2$
$=(x+2)^2(x-2)^2$

이때, $a>b$이므로 $a=2$, $b=-2$

$\therefore \dfrac{2020}{a-b}=\dfrac{2020}{2-(-2)}=505$

다른 풀이

$x^4-8x^2+16=(x+a)^2(x+b)^2$ ······ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로

㉠의 양변에 $x=-a$를 대입하면

$a^4-8a^2+16=0$, $(a^2-4)^2=0$

$a^2=4$ $\quad\therefore a=\pm 2$

마찬가지 방법으로 ㉠의 양변에 $x=-b$를 대입하면

$b^2=4$ $\quad\therefore b=\pm 2$

이때, $a>b$이므로 $a=2$, $b=-2$

$\therefore \dfrac{2020}{a-b}=\dfrac{2020}{2-(-2)}=505$ 답 ③

156

(1) $x^2=t$로 놓으면

$x^4-7x^2+12=t^2-7t+12$
$=(t-4)(t-3)$
$=(x^2-4)(x^2-3)$
$=(x+2)(x-2)(x^2-3)$

(2) $x^2=t$로 놓으면

$x^4-4x^2+3=t^2-4t+3$
$=(t-1)(t-3)$
$=(x^2-1)(x^2-3)$
$=(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

(3) $x^2=t$로 놓으면

$3x^4-5x^2-2=3t^2-5t-2$
$=(t-2)(3t+1)$
$=(x^2-2)(3x^2+1)$
$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(3x^2+1)$

답 (1) $(x+2)(x-2)(x^2-3)$
(2) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
(3) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(3x^2+1)$

157

$x^4+5x^2+9=(x^4+6x^2+9)-x^2$
$=(x^2+3)^2-x^2$
$=(x^2+x+3)(x^2-x+3)$

$\therefore abcd=1\cdot 3\cdot(-1)\cdot 3=-9$ 답 ①

158

$x^4-11x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2$
$=(x^2-y^2)^2-(3xy)^2$
$=(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$

답 $(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$

159

$x^2+x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+x-5)(x^2+x-10)+4&=(t-5)(t-10)+4\\&=t^2-15t+50+4\\&=t^2-15t+54\\&=(t-6)(t-9)\\&=(x^2+x-6)(x^2+x-9)\\&=(x-2)(x+3)(x^2+x-9)\end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ② $x-2$이다.

답 ②

160

$a+b=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(a+b)^2-3(a+b)+2&=t^2-3t+2\\&=(t-2)(t-1)\\&=(a+b-2)(a+b-1)\end{aligned}$$

답 ⑤

161

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-84$

$=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}-84$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-84$

이때, $x^2+2x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(t-3)(t-8)-84\\&=t^2-11t+24-84\\&=t^2-11t-60\\&=(t-15)(t+4)\\&=(x^2+2x-15)(x^2+2x+4)\\&=(x-3)(x+5)(x^2+2x+4)\end{aligned}$$

따라서 $a=5$, $b=2$, $c=4$이므로

$a+b+c=5+2+4=11$

답 11

162

$(x-3)(x-5)(x+1)(x+3)+27$

$=\{(x-3)(x+1)\}\{(x-5)(x+3)\}+27$

$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-15)+27$

이때, $x^2-2x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(t-3)(t-15)+27\\&=t^2-18t+45+27\\&=t^2-18t+72\\&=(t-6)(t-12)\\&=(x^2-2x-6)(x^2-2x-12)\end{aligned}$$

답 $(x^2-2x-6)(x^2-2x-12)$

163

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+5xy-3y^2+x+3y$

$=2x^2+(5y+1)x-3y(y-1)$

$=(x+3y)\{2x-(y-1)\}$

$=(x+3y)(2x-y+1)$

따라서 인수인 것은 ⑤ $2x-y+1$이다.

답 ⑤

164

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+3xy-2y^2-5y-2$

$=2x^2+3yx-(2y^2+5y+2)$

$=2x^2+3yx-(y+2)(2y+1)$

$=\{x+(2y+1)\}\{2x-(y+2)\}$

$=(x+2y+1)(2x-y-2)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=2$이므로

$a+b+c=1+2+2=5$

답 ⑤

165

주어진 식을 전개한 후 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+(a-1)x^2-(a+2)x-2a$

$=x^3+ax^2-x^2-ax-2x-2a$

$=(x^2-x-2)a+x^3-x^2-2x$

$=(x^2-x-2)a+x(x^2-x-2)$

$=(x^2-x-2)(x+a)$

$=(x+1)(x-2)(x+a)$

따라서 인수가 아닌 것은 ② $x-1$, ③ $x+2$이다.

답 ②, ③

166

주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(x+1)(x-2)+4xy+y+3y^2$

$=3y^2+(4x+1)y+(x+1)(x-2)$

가

$=\{y+(x+1)\}\{3y+(x-2)\}$

$=(x+y+1)(x+3y-2)$

나

단계	채점 요소	비율
가	주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하기	40%
나	인수분해하기	60%

답 $(x+y+1)(x+3y-2)$

167

주어진 식을 전개한 후 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

답 ⑤

168

주어진 식을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$

$=x^2(y+z)+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y+2xyz$

$=(y+z)x^2+(y^2+2yz+z^2)x+y^2z+yz^2$

$=(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)$
$=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$
$=(y+z)(x+y)(x+z)$
$=(x+y)(y+z)(z+x)$ 답 ④

169
주어진 식을 전개한 후 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$
$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(a-b)(b-c)(a-c)$
따라서 인수인 것은 ④ $a-c$이다. 답 ④

170
$2014=a$로 놓으면
$\frac{2014^3-6^3}{2014^2+6\times2014+6^2}\times\frac{2014^2-6^2}{2008^2}$
$=\frac{a^3-6^3}{a^2+6a+6^2}\times\frac{a^2-6^2}{(a-6)^2}$
$=\frac{(a-6)(a^2+6a+6^2)}{a^2+6a+6^2}\times\frac{(a+6)(a-6)}{(a-6)^2}$
$=(a-6)\times\frac{a+6}{a-6}$
$=a+6$
$=2014+6$
$=2020$ 답 ③

171
$2019=a$로 놓으면
$k=\frac{2018\times(2019^2+2020)}{2019\times2020+1}$
$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a+1)+1}$
$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$
$=a-1$
$=2019-1$
$=2018$
$\therefore \frac{k+2}{k-2}=\frac{2018+2}{2018-2}=\frac{2020}{2016}$
$=\frac{505}{504}$ 답 ②

172
$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+9^2-10^2$
$=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+(7^2-8^2)+(9^2-10^2)$
$=(1+2)(1-2)+(3+4)(3-4)+(5+6)(5-6)$
$+(7+8)(7-8)+(9+10)(9-10)$
$=(1+2)(-1)+(3+4)(-1)+(5+6)(-1)$
$+(7+8)(-1)+(9+10)(-1)$
$=(-1)\cdot(1+2+3+\cdots+10)$
$=-55$ 답 -55

173
$a^3+b^3+a^2b+ab^2=(a^3+a^2b)+(b^3+ab^2)$
$=a^2(a+b)+b^2(b+a)$
$=(a+b)(a^2+b^2)$
$=(a+b)\{(a+b)^2-2ab\}$
이므로 $a+b=5$, $ab=2$를 대입하면
(주어진 식)$=5\cdot(5^2-2\cdot2)$
$=5\cdot21=105$ 답 ⑤

174
$x^3-x^2y+xy^2-y^3=x^2(x-y)+y^2(x-y)$
$=(x-y)(x^2+y^2)$
$=(x-y)\{(x-y)^2+2xy\}$
이므로 $x-y=3$, $xy=2$를 대입하면
(주어진 식)$=3\cdot(3^2+2\cdot2)$
$=3\cdot13=39$ 답 ③

175
$x^3-y^3+6xy+8=x^3+(-y)^3+2^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot2$
$=(x-y+2)(x^2+y^2+4+xy+2y-2x)$
이때, $x-y=-2$이므로 $x-y+2=0$
$\therefore x^3-y^3+6xy+8=0$ 답 ①

176
$m^2+n^2=(ax+by)^2+(bx+ay)^2$
$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2$
$=(a^2+b^2)x^2+4abxy+(a^2+b^2)y^2$
$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)+4abxy$
이므로 $a^2+b^2=10$, $ab=3$, $x^2+y^2=5$, $xy=2$를 대입하면
$m^2+n^2=10\cdot5+4\cdot3\cdot2$
$=50+24=74$ 답 74

177
$a^3+c^3+a^2c+ac^2=ab^2+b^2c$에서
$a^2(a+c)+c^2(a+c)-b^2(a+c)=0$
$\therefore (a+c)(a^2+c^2-b^2)=0$
이때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+c>0$이어야 한다. 즉,
$a^2+c^2-b^2=0$
$\therefore a^2+c^2=b^2$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다. 답 ④

178
$ab-bc+b^2-ac=0$에서
$(ab+b^2)-(bc+ac)=0$

$b(a+b)-c(a+b)=0$

$\therefore (a+b)(b-c)=0$

이때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b>0$이어야 한다. 즉,

$b-c=0$

$\therefore b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 ②

179

주어진 식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$

$=-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3$

$=-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

이때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b>0$이어야 한다. 즉,

$a^2+b^2-c^2=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 ⑤

180

$f(x)=x^3-x^2-5x-3$이라 하면

$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-2x-3)$

$=(x+1)(x+1)(x-3)$

$=(x+1)^2(x-3)$

따라서 $a=1$, $b=-3$이므로

$a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$

답 ④

181

$f(x)=x^3-7x-6$이라 하면

$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x+2)(x-3)$

답 ⑤

182

$f(x)=x^3+5x^2-2x-24$라 하면

$f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 5 & -2 & -24 \\ & & 2 & 14 & 24 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+7x+12)$

$=(x-2)(x+3)(x+4)$

$\therefore a+b+c=(-2)+3+4=5$

답 ③

183

$f(x)=x^3+2ax^2-a^2x-2a^3$이라 하면

$f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} a & 1 & 2a & -a^2 & -2a^3 \\ & & a & 3a^2 & 2a^3 \\ \hline & 1 & 3a & 2a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-a)(x^2+3ax+2a^2)$

$=(x-a)(x+a)(x+2a)$

답 $(x-a)(x+a)(x+2a)$

실력 콕콕

본문 p.36~37

184 ④	**185** ④	**186** ②	**187** ④	**188** 17	**189** ④
190 ①	**191** 66	**192** ②	**193** ④	**194** ①	**195** ⑤
196 8	**197** 1				

198 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

199 $3(x-y)(y-z)(z-x)$

184

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$xy+y^2+2x-4=(y+2)x+(y^2-4)$

$=(y+2)x+(y+2)(y-2)$

$=(y+2)(x+y-2)$

답 ④

185

$x^8-y^8=(x^4)^2-(y^4)^2$

$=(x^4+y^4)(x^4-y^4)$

$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④ x^3+y^3이다.

답 ④

186

$x^2y^2-x^2-y^2+1-4xy$

$=(x^2y^2-2xy+1)-(x^2+2xy+y^2)$

$=(xy-1)^2-(x+y)^2$

$=\{(xy-1)+(x+y)\}\{(xy-1)-(x+y)\}$

$=(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$

따라서 인수인 것은 ② $xy+x+y-1$이다.

답 ②

187

주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2+ab+a-b-2$

$=(a-1)b+a^2+a-2$

$=(a-1)b+(a-1)(a+2)$

$=(a-1)(b+a+2)$

$=(a-1)(a+b+2)$

따라서 인수인 것은 ④ $a+b+2$이다.

답 ④

188

$9=a$로 놓으면

$$x=\frac{9^6-1}{9^4+9^2+1}=\frac{a^6-1}{a^4+a^2+1}$$
$$=\frac{(a^2)^3-1^3}{a^4+a^2+1}=\frac{(a^2-1)(a^4+a^2+1)}{a^4+a^2+1}$$
$$=a^2-1=9^2-1$$
$$=80$$

따라서 $\frac{x+5}{x-5}=\frac{80+5}{80-5}=\frac{85}{75}=\frac{17}{15}$이므로

$k=\frac{17}{15}$에서 $15k=15\cdot\frac{17}{15}=17$

답 17

189

$a^2+b^2=16$, $ab=7$이므로

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$
$$=16-2\cdot7=2$$

$\therefore a-b=\sqrt{2}$ ($\because a>b$)

따라서 주어진 식의 값을 구하면

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a-b)(a^2+b^2+ab)$$
$$=\sqrt{2}\cdot(16+7)$$
$$=23\sqrt{2}$$

답 ④

190

$$y(4x^2+1)-2x(y^2+1)=4x^2y+y-2xy^2-2x$$
$$=2xy(2x-y)-(2x-y)$$
$$=(2x-y)(2xy-1)$$

이때, $2x-y=4$, $xy=3$이므로

(주어진 식)$=4\cdot(2\cdot3-1)=20$

답 ①

191

$a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=14$, $abc=6$이므로

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$6^2=14+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=11$

따라서 주어진 식의 값을 구하면

$$a^2b^2c+ab^2c^2+a^2bc^2=abc(ab+bc+ca)$$
$$=6\cdot11=66$$

답 66

192

$f(x)=x^3-6x^2-ax-6$이 $x-2$로 나누어떨어지므로

$f(2)=8-24-2a-6=0$

$\therefore a=-11$

즉, $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	-6	11	-6
		2	-8	6
	1	-4	3	0

$$f(x)=(x-2)(x^2-4x+3)$$
$$=(x-2)(x-1)(x-3)$$

따라서 인수인 것은 ② $x-3$이다.

답 ②

193

$f(x)=2x^4+5x^3-5x^2-5x+3$이라 하면

$f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	2	5	-5	-5	3
		2	7	2	-3
-1	2	7	2	-3	0
		-2	-5	3	
	2	5	-3	0	

$$f(x)=(x-1)(x+1)(2x^2+5x-3)$$
$$=(x-1)(x+1)(x+3)(2x-1)$$

따라서 인수가 아닌 것은 ④ $2x^2-3x-1$이다.

답 ④

194

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$$
$$=\{x+(y+z)\}\{(y+z)x+yz\}-xyz$$
$$=(y+z)x^2+xyz+(y+z)^2x+(y+z)yz-xyz$$
$$=(y+z)x^2+(y+z)^2x+(y+z)yz$$
$$=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$$
$$=(y+z)(x+y)(x+z)$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x)$$

답 ①

195

$c^3+(a+b)(a^2+b^2)=(a+b)c^2+(a^2+b^2)c$에서

$c^3+(a+b)(a^2+b^2)-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c=0$

위의 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)=0$

$(c-a-b)c^2-(a^2+b^2)(c-a-b)=0$

$\therefore (c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

이때, 삼각형의 조건에서 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로 $a+b>c$이고 $b+c>a$이고 $c+a>b$이다.

즉, $c-a-b\neq0$이므로 $c^2-a^2-b^2=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 ⑤

196

$$x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$$
$$=(x^2+3)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-2)^2=8$

답 8

197

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+k$$
$$=\{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}+k$$
$$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)+k$$

이때, $x^2+7x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+10)(t+12)+k$

$=t^2+22t+120+k$

위의 식이 완전제곱식이 되려면

$120+k=11^2$

$\therefore k=121-120=1$

답 1

198

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$에서
$a^2b^2+a^2c^2-a^4=a^2b^2+b^2c^2-b^4$
$a^2c^2-a^4-b^2c^2+b^4=0$

가

위의 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(a^2-b^2)c^2-(a^4-b^4)=0$
$(a^2-b^2)c^2-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$
$(a^2-b^2)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0$
$\therefore (a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

나

이때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b>0$이어야 한다. 즉,
$a-b=0$ 또는 $c^2-a^2-b^2=0$
$\therefore a=b$ 또는 $a^2+b^2=c^2$

다

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

라

단계	채점 요소	비율
가	주어진 식을 정리하여 나타내기	20%
나	인수분해하여 나타내기	30%
다	a, b, c 사이의 관계식 구하기	30%
라	삼각형의 모양 말하기	20%

답 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

199

$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$
$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+y^3-3y^2z+3yz^2-z^3+z^3-3z^2x+3zx^2-x^3$
$=-3x^2y+3zx^2+3xy^2-3z^2x-3y^2z+3yz^2$

가

$=-3(y-z)x^2+3(y^2-z^2)x-3yz(y-z)$
$=-3(y-z)x^2+3(y+z)(y-z)x-3yz(y-z)$
$=-3(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

나

$=-3(y-z)(x-y)(x-z)$
$=3(x-y)(y-z)(z-x)$

다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 식을 전개하여 나타내기	30%
나	공통 인수를 묶어 나타내기	40%
다	순환하는 형태로 인수분해하기	30%

다른 풀이

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서
$a+b+c=0$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$ …… ㉠
㉠을 활용하면
$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$이므로
$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$

답 $3(x-y)(y-z)(z-x)$

04 복소수

개념 콕콕 본문 p. 41

200

(1) $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$
(2) $\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$
(3) $\sqrt{-18}=\sqrt{18}i=3\sqrt{2}i$

답 (1) $\sqrt{3}i$ (2) $2i$ (3) $3\sqrt{2}i$

201

(1) $\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}i$
(2) $\pm\sqrt{-27}=\pm\sqrt{27}i=\pm3\sqrt{3}i$
(3) $\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}i=\pm4i$

답 (1) $\pm\sqrt{5}i$ (2) $\pm3\sqrt{3}i$ (3) $\pm4i$

202

(1) $\sqrt{3}\sqrt{27}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{81}=9$
(2) $\sqrt{3}\sqrt{-27}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}i=\sqrt{81}i=9i$
(3) $\sqrt{-3}\sqrt{27}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{27}=\sqrt{81}i=9i$
(4) $\sqrt{-3}\sqrt{-27}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{27}i=\sqrt{81}i^2=-9$

답 (1) 9 (2) $9i$ (3) $9i$ (4) -9

203

(1) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$
(2) $\dfrac{\sqrt{-81}}{\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{81}i}{\sqrt{9}}=\dfrac{9i}{3}=3i$
(3) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{-9}}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}i}=\dfrac{9i}{3i^2}=\dfrac{9i}{-3}=-3i$
(4) $\dfrac{\sqrt{-81}}{\sqrt{-9}}=\dfrac{\sqrt{81}i}{\sqrt{9}i}=\dfrac{9}{3}=3$

답 (1) 3 (2) $3i$ (3) $-3i$ (4) 3

204

$$\sqrt{-2}\times\sqrt{-6}-\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-81}}=\sqrt{2}i\times\sqrt{6}i-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{81}i}$$
$$=\sqrt{12}i^2-\frac{\sqrt{3}}{3i}$$
$$=2\sqrt{3}i^2-\frac{\sqrt{3}i}{3i^2}$$
$$=-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

답 $-2\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

205

ㄱ. $3i-2$는 허수이다.
ㄴ. $(\sqrt{-2})^2=(\sqrt{2}i)^2=2i^2=-2$이므로 실수이다.
ㄷ. $\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$이므로 허수이다.
ㄹ. $3i^4=3\cdot1=3$이므로 실수이다.
따라서 허수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

206

(1) $(x+1)+(y-2)i=3$에서

$x+1=3,\ y-2=0$

$\therefore x=2,\ y=2$

(2) $(2x+y)+6i=4+3yi$에서

$2x+y=4,\ 6=3y$

$\therefore x=1,\ y=2$

답 (1) $x=2,\ y=2$ (2) $x=1,\ y=2$

207

(1) $\overline{-3+5i}=-3-5i$

(2) $\overline{1-7i}=1+7i$

(3) $\overline{i}=-i$

(4) $\overline{16}=16$

답 (1) $-3-5i$ (2) $1+7i$ (3) $-i$ (4) 16

208

(1) $(-5+12i)+(7+3i)=(-5+7)+(12+3)i$

$=2+15i$

(2) $(3+4i)-(5-6i)=(3-5)+(4+6)i$

$=-2+10i$

(3) $(3-5i)(7-3i)=21-9i-35i+15i^2$

$=21-44i+15\cdot(-1)$

$=6-44i$

(4) $(4+4i)(8-2i)=32-8i+32i-8i^2$

$=32+24i-8\cdot(-1)$

$=40+24i$

답 (1) $2+15i$ (2) $-2+10i$ (3) $6-44i$ (4) $40+24i$

209

(1) $\dfrac{3-2i}{1+i}=\dfrac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3-3i-2i+2i^2}{1-i^2}$

$=\dfrac{3-3i-2i-2}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

(2) $\dfrac{7i}{1+4i}=\dfrac{7i(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\dfrac{7i-28i^2}{1-16i^2}$

$=\dfrac{7i+28}{1-(-16)}=\dfrac{28}{17}+\dfrac{7}{17}i$

답 (1) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$ (2) $\dfrac{28}{17}+\dfrac{7}{17}i$

210

(1) $a^2+b^2=(1+i)^2+(1-i)^2=1+2i+i^2+1-2i+i^2$

$=1+2i-1+1-2i-1=0$

(2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{2}{1-i^2}=\dfrac{2}{1-(-1)}=\dfrac{2}{2}=1$

답 (1) 0 (2) 1

211

(1) $i^{13}=(i^4)^3\cdot i=i$

(2) $(-i)^9=(-i)^8\cdot(-i)=(i^4)^2\cdot(-i)=-i$

(3) $i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=i^2=-1$

(4) $i^{200}+i^{300}=(i^4)^{50}+(i^4)^{75}=1+1=2$

답 (1) i (2) $-i$ (3) -1 (4) 2

유형 콕콕

본문 p.42~47

212 ②	213 ③	214 ②	215 $8i$	216 2	217 ⑤
218 ③, ⑤	219 ③	220 ⑤	221 ⑤	222 49	223 ③
224 ①	225 ⑤	226 $1-3i$	227 ⑤	228 ④	229 ③
230 0	231 ②	232 ①	233 ⑤	234 52	235 ⑤
236 ⑤	237 ③	238 5	239 ①	240 ④	241 ①
242 $1-i$	243 ③	244 3	245 ①	246 16	247 ⑤
248 ⑤	249 ④	250 1	251 ①	252 ④	253 2
254 ⑤	255 ④	256 ⑤	257 ①	258 9	

212

① $\sqrt{-3}\sqrt{15}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{15}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{3\cdot5}=3\sqrt{5}i$

② $\sqrt{-9}\sqrt{-81}=\sqrt{9}i\cdot\sqrt{81}i=3i\cdot9i=27i^2=-27$

③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-8}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{8}i^2}=\dfrac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{8}}=-\sqrt{\dfrac{3}{8}}i=-\sqrt{-\dfrac{3}{8}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}i}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}i=\sqrt{-\dfrac{3}{7}}$

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

213

$a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$이므로

$\sqrt{(-2)\cdot(-2)}=-\sqrt{-2}\sqrt{-2}$

즉, $\sqrt{(-2)\cdot(-2)}\neq\sqrt{-2}\sqrt{-2}$

따라서 등호가 잘못 사용된 부분은 ③이다.

답 ③

214

$\sqrt{-3}\sqrt{-27}+\dfrac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{27}i+\dfrac{\sqrt{18}i}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}i}$

$=\sqrt{81}i^2+\sqrt{\dfrac{18}{2}}i-\sqrt{\dfrac{18}{2}}\cdot\dfrac{1}{i}$

$=-9+3i-\dfrac{3}{i}$

$=-9+3i-\dfrac{3i}{i^2}$

$=-9+3i+3i$

$=-9+6i$

답 ②

215

복소수 $a+bi$가 순허수이려면 $a=0,\ b\neq0$이어야 한다.

$i^4=1$

$i^9=(i^4)^2\cdot i=i$

주어진 수 중에서 순허수인 것은 $7i,\ i^9=i$이므로 순허수의 총합은

$7i+i=8i$

답 $8i$

216

복소수 $a+bi$가 실수이려면 $b=0$, 즉 허수부분이 0이어야 한다.

$3i$에서 허수부분은 3,

$1+\sqrt{-4}=1+2i$에서 허수부분은 2,

$3-7i$에서 허수부분은 -7이므로 실수가 아니다.

한편 $i^4+1=1+1=2$이므로 실수이다.

따라서 실수인 것은 27과 i^4+1의 2개이다.

답 2

217

⑤ -4의 제곱근은 $\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

218

③ $(\sqrt{5}i)^2=5i^2=-5$

④ $i+i^5=i+i^4\cdot i=i+i=2i$

⑤ $i^5+i^3=i^4\cdot i+i^2\cdot i=i-i=0$

따라서 허수가 아닌 것은 ③, ⑤이다. 답 ③, ⑤

219

$(x-1)+(y+2)i=4-8i$에서 양변의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로

$x-1=4,\ y+2=-8$

$\therefore x=5,\ y=-10$

$\therefore xy=5\cdot(-10)=-50$ 답 ③

220

$(x-7)+(3x-11y+1)i=0$에서

$x-7=0,\ 3x-11y+1=0$

$\therefore x=7,\ y=2$

$\therefore x+y=7+2=9$ 답 ⑤

221

$x+y-2+(xy+2)i=-1+i$에서

$x+y-2=-1,\ xy+2=1$

$\therefore x+y=1,\ xy=-1$

이때, $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로

$x^3+y^3=1^3-3\cdot(-1)\cdot 1=1+3=4$ 답 ⑤

222

$x^2+4x-(y+2)i=21+5i$에서

$x^2+4x=21,\ -(y+2)=5$

$x^2+4x=21$에서 $(x+7)(x-3)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=3$

$-(y+2)=5$에서 $y+2=-5$

$\therefore y=-7$

이때, $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$이므로

$xy=0$ 또는 $x<0,\ y<0$이어야 한다.

따라서 $x=-7,\ y=-7$이므로

$xy=(-7)\cdot(-7)=49$ 답 49

223

① $(5+4i)+(1-2i)=6+2i$

② $(i-3)-(2i-5)=i-3-2i+5=2-i$

③ $(1+3i)(3-2i)=3-2i+9i-6i^2=3-2i+9i+6$
$=9+7i$

④ $(3-i)(3+i)=9-i^2=9-(-1)=10$

⑤ $(2+i^2)(2-i^2)=(2-1)(2+1)=1\cdot 3=3$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

224

$(1+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$

$=1+2\sqrt{3}i+3i^2+4-4\sqrt{3}i+3i^2$

$=1+2\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3$

$=-1-2\sqrt{3}i$ 답 ①

225

$(1+2i)(2-i)+(2+i)i-(3+2i)$

$=2-i+4i-2i^2+2i+i^2-3-2i$

$=2-i+4i+2+2i-1-3-2i$

$=(2+2-1-3)+(-1+4+2-2)i$

$=3i$ 답 ⑤

226

$z_1z_2+z_1z_3=(1+2i)(-3+4i)+(1+2i)(2-5i)$

$=-3+4i-6i+8i^2+2-5i+4i-10i^2$

$=-3+4i-6i-8+2-5i+4i+10$

$=(-3-8+2+10)+(4-6-5+4)i$

$=1-3i$ 답 $1-3i$

227

$(2+i)(1+i)+\dfrac{2+i}{1+i}=(2+2i+i+i^2)+\dfrac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=(1+3i)+\dfrac{2-2i+i-i^2}{1-i^2}$

$=(1+3i)+\dfrac{3-i}{2}$

$=\dfrac{2+6i+3-i}{2}$

$=\dfrac{5+5i}{2}$ 답 ⑤

228

$\dfrac{1+3i}{2-i}=\dfrac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i+6i+3i^2}{2^2-i^2}$

$=\dfrac{2+i+6i-3}{4-(-1)}=\dfrac{-1+7i}{5}$

$=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$

따라서 $a=-\dfrac{1}{5},\ b=\dfrac{7}{5}$이므로

$a+b=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}=\dfrac{6}{5}$ 답 ④

229

$\dfrac{3-i}{3+i}+\dfrac{3+i}{3-i}=\dfrac{(3-i)^2+(3+i)^2}{(3+i)(3-i)}$

$=\dfrac{(9-6i+i^2)+(9+6i+i^2)}{9-i^2}$

$=\dfrac{9-6i-1+9+6i-1}{10}$

$=\dfrac{16}{10}=\dfrac{8}{5}$ 답 ③

230

$$\frac{3-\sqrt{-9}}{3+\sqrt{-9}}+\frac{9+\sqrt{-81}}{9-\sqrt{-81}}$$
$$=\frac{3-3i}{3+3i}+\frac{9+9i}{9-9i}$$

가

$$=\frac{3(1-i)}{3(1+i)}+\frac{9(1+i)}{9(1-i)}$$
$$=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$$
$$=\frac{(1-i)^2+(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(1-2i+i^2)+(1+2i+i^2)}{1-i^2}$$
$$=\frac{1-2i-1+1+2i-1}{2}$$
$$=0$$

나

단계	채점 요소	비율
가	주어진 식을 허수단위 i를 이용하여 나타내기	50%
나	주어진 식 간단히 하기	50%

답 0

231

$\alpha=1+i$, $\beta=1-i$이므로

$\alpha\beta=(1+i)(1-i)=1-i^2=1+1=2$

$\therefore \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=2+1+1+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

답 ②

232

$x=2+i$, $y=2-i$이므로

$x+y=(2+i)+(2-i)=4$

$xy=(2+i)(2-i)=2^2-i^2=4-(-1)=5$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=4^2-2\cdot5=6$

답 ①

233

$x=3+\sqrt{2}i$, $y=3-\sqrt{2}i$이므로

$x+y=(3+\sqrt{2}i)+(3-\sqrt{2}i)=6$

$xy=(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)=9-2i^2=11$

$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\frac{6^2-2\cdot11}{11}=\frac{14}{11}$

답 ⑤

234

$\alpha=1+3i$, $\beta=3-i$이므로

$\alpha+\beta=(1+3i)+(3-i)=4+2i$

$\alpha\beta=(1+3i)(3-i)=3-i+9i-3i^2=6+8i$

$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(6+8i)(4+2i)$

$=24+12i+32i+16i^2$

$=24+12i+32i-16$

$=8+44i$

따라서 $a=8$, $b=44$이므로

$a+b=8+44=52$

답 52

235

$z=1+3i$에서 $\bar{z}=1-3i$이므로

$2z+\bar{z}=2(1+3i)+(1-3i)$

$=2+6i+1-3i$

$=3+3i$

답 ⑤

236

$z=3+i$에서 $\bar{z}=3-i$이므로

$z+\bar{z}=(3+i)+(3-i)=6$

$z\bar{z}=(3+i)(3-i)=9-i^2=10$

$\therefore z\bar{z}(z+\bar{z})=10\cdot6=60$

답 ⑤

237

$z=2+i$에서 $\bar{z}=2-i$이므로

$z+\bar{z}=(2+i)+(2-i)=4$

$z\bar{z}=(2+i)(2-i)=4-i^2=5$

$\therefore \frac{z\bar{z}}{z+\bar{z}}=\frac{5}{4}$

답 ③

238

$\alpha=1-3i$, $\beta=-2+5i$에서

$\alpha+\beta=(1-3i)+(-2+5i)=-1+2i$

이므로 $\overline{\alpha+\beta}=-1-2i$

$\therefore \alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\bar{\alpha}(\alpha+\beta)+\bar{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(-1+2i)(-1-2i)$

$=(-1)^2-(2i)^2$

$=1+4=5$

답 5

239

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$(3+2i)z+3\bar{z}=10+2i$에서

$(3+2i)(a+bi)+3(a-bi)=10+2i$

$3a+3bi+2ai+2bi^2+3a-3bi=10+2i$

$\therefore 6a-2b+2ai=10+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6a-2b=10$, $2a=2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-2$

$\therefore z=1-2i$

답 ①

240

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=4$에서 $(a+bi)+(a-bi)=2a=4$

$\therefore a=2$

$z\bar{z}=4$에서 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=4$

$\therefore b=0$

$\therefore z=2$

답 ④

241

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z\bar{z}=i(z-\bar{z})-1$에서

$(a+bi)(a-bi)=i\{(a+bi)-(a-bi)\}-1$

$a^2+b^2=2bi^2-1$

$a^2+b^2+2b+1=0$

$a^2+(b+1)^2=0$

$\therefore a=0,\ b=-1$

따라서 $z=-i$이므로

$z^2=(-i)^2=-1$ 답 ①

242

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로

가

$2z+3=i(1+z-4\bar{z})$에서

$2(a+bi)+3=i\{1+(a+bi)-4(a-bi)\}$

$2a+2bi+3=i(1+a+bi-4a+4bi)$

$\therefore (2a+3)+2bi=-5b+(1-3a)i$

나

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+3=-5b,\ 2b=1-3a$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$

$\therefore z=1-i$

다

단계	채점 요소	비율
가	$z=a+bi$로 나타내기	20%
나	z, $\bar{z}$를 주어진 식에 대입하여 정리하기	40%
다	복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 z 구하기	40%

답 $1-i$

243

$i(x+2i)^2=i(x^2+4xi+4i^2)=i(x^2+4xi-4)$

$=x^2i+4xi^2-4i=-4x+(x^2-4)i$

이 복소수가 실수가 되려면 $x^2-4=0$이어야 한다.

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 0이다. 답 ③

244

$(x^2-8x+15)+(x-5)i$가 순허수가 되려면

$x^2-8x+15=0,\ x-5\neq0$이어야 한다.

$x^2-8x+15=0$에서 $(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$ …… ㉠

$x-5\neq0$에서 $x\neq5$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$x=3$ 답 3

245

$(x^2+x-2)+(x^2-1)i$가 순허수가 되려면

$x^2+x-2=0,\ x^2-1\neq0$이어야 한다.

$x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ …… ㉠

$x^2-1\neq0$에서 $(x+1)(x-1)\neq0$

$\therefore x\neq-1$이고 $x\neq1$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$x=-2$ 답 ①

246

$z=(a-4i)(1-3i)$

$=a-3ai-4i+12i^2$

$=(a-12)-(3a+4)i$

가

이때, z^2이 양의 실수가 되려면 z가 실수이어야 하므로

$3a+4=0 \qquad \therefore a=-\dfrac{4}{3}$

나

$\therefore 9a^2=9\cdot\dfrac{16}{9}=16$

다

단계	채점 요소	비율
가	z를 ( )+( )i의 꼴로 정리하기	40%
나	z^2이 양의 실수이려면 z가 실수임을 이용하여 a의 값 구하기	40%
다	$9a^2$의 값 구하기	20%

답 16

247

자연수 n에 대하여

$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$

이므로

$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{2018}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016})+i^{2017}+i^{2018}$

$=(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1$

$=i-1$ 답 ⑤

248

$\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=-i$이므로

$\dfrac{1}{i^2}=\left(\dfrac{1}{i}\right)^2=(-i)^2=-1$

$\dfrac{1}{i^3}=\dfrac{1}{i^2}\cdot\dfrac{1}{i}=-1\cdot(-i)=i$

$\dfrac{1}{i^4}=\dfrac{1}{i^3}\cdot\dfrac{1}{i}=i\cdot(-i)=1$

$\therefore \dfrac{1}{i}+\dfrac{3}{i^2}+\dfrac{5}{i^3}+\dfrac{7}{i^4}=-i-3+5i+7$

$=4+4i$ 답 ⑤

249

$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}=\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1=0$이므로

$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{1}{i^{20}}$

$=\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{i^{17}}+\dfrac{1}{i^{18}}+\dfrac{1}{i^{19}}+\dfrac{1}{i^{20}}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)$

$=0$ 답 ④

250

$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$이고,

가

$z+z^2+z^3+z^4=i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

나

$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\cdots+z^{40}$
$=1+(z+z^2+z^3+z^4)+\cdots+(z^{37}+z^{38}+z^{39}+z^{40})$
$=1+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$
$=1$

다

단계	채점 요소	비율
가	z를 간단히 하기	40%
나	$z+z^2+z^3+z^4=0$임을 알기	20%
다	주어진 식의 값 구하기	40%

답 1

251

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2999}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2999}=i^{2999}-(-i)^{2999}$
$=(i^4)^{749}\cdot i^3-\{(-i)^4\}^{749}\cdot(-i)^3$
$=i^3-(-i)^3$
$=2i^3=-2i$

답 ①

252

$\frac{1-i}{\sqrt{2i}}$를 제곱하면

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2i}}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{2i^2}=\frac{-2i}{-2}=i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{\sqrt{2i}}\right)^{2018}=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2i}}\right)^2\right\}^{1009}=i^{1009}$
$=(i^4)^{252}\cdot i=i$

답 ④

253

$z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$를 제곱하면

$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

$\therefore z^8+z^{16}=z^8+(z^8)^2=1+1^2=2$

답 2

254

$f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{2018}$에서

$f(i)+f(-i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2018}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$

이때, $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\therefore f(i)+f(-i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2018}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$
$=i^{2018}+(-i)^{2018}$
$=(i^4)^{504}\cdot i^2+\{(-i)^4\}^{504}\cdot(-i)^2$
$=i^2+(-i)^2$
$=-1+(-1)=-2$

답 ⑤

255

$x=\frac{-3-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x+3=-\sqrt{3}i$

이 등식의 양변을 제곱하면 $(2x+3)^2=(-\sqrt{3}i)^2$

$4x^2+12x+9=-3$, $4x^2+12x+12=0$

$\therefore x^2+3x+3=0$

따라서 주어진 식의 값은

$x^2+3x+4=(x^2+3x+3)+1=0+1=1$

답 ④

256

$x=1-2i$에서 $x-1=-2i$

이 등식의 양변을 제곱하면 $(x-1)^2=(-2i)^2$

$x^2-2x+1=-4$

$\therefore x^2-2x+5=0$

따라서 $p=-2$, $q=5$이므로

$p^2+q^2=(-2)^2+5^2=29$

다른 풀이

$x=1-2i$를 등식 $x^2+px+q=0$에 대입하면

$(1-2i)^2+p(1-2i)+q=0$

$(-3-4i)+p(1-2i)+q=0$

$(-3+p+q)+(-4-2p)i=0$

즉, $-3+p+q=0$, $-4-2p=0$이어야 하므로

$p=-2$, $q=5$

$\therefore p^2+q^2=(-2)^2+5^2=29$

답 ⑤

257

$z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}$이므로

$2z-1=-i$

이 등식의 양변을 제곱하면 $(2z-1)^2=(-i)^2$

$4z^2-4z+1=-1$, $4z^2-4z+2=0$

$\therefore 2z^2-2z+1=0$

따라서 주어진 식의 값은

$2z^2-2z+3=(2z^2-2z+1)+2=0+2=2$

답 ①

258

$x=2-\sqrt{3}i$에서 $x-2=-\sqrt{3}i$

이 등식의 양변을 제곱하면 $(x-2)^2=(-\sqrt{3}i)^2$

$x^2-4x+4=-3$

$\therefore x^2-4x=-7$ …… ㉠

따라서 주어진 식의 값은

$x^3-4x^2+7x+9=x(x^2-4x)+7x+9$
$=-7x+7x+9$ ($\because$ ㉠)
$=9$

답 9

실력 콕콕 본문 p.48~49

259 ②	260 ⑤	261 ④	262 ③	263 ①	264 ⑤
265 18	266 ①	267 ①	268 ③	269 ②	270 23
271 ③	272 ④	273 $-8+5i$		274 4	

259

$(\sqrt{-4})^2+\sqrt{-18}\cdot\sqrt{-2}+\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}$

$=(2i)^2+\sqrt{18}i\cdot\sqrt{2}i+\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}i}$

$=4i^2+\sqrt{36}i^2+\dfrac{\sqrt{4}i}{i^2}$

$=-4-6-2i$

$=-10-2i$

따라서 $-10-2i=a+bi$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-10$, $b=-2$

$\therefore ab=-10\cdot(-2)=20$ 답 ②

260

$(x-2)+(xy+6)i=(1-y)+4i$에서

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-2=1-y$, $xy+6=4$이므로

$x+y=3$, $xy=-2$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\cdot(-2)\cdot3$

$=27+18=45$ 답 ⑤

261

$(x+1)-8i=\overline{6-(y-5)i}$에서

$(x+1)-8i=6+(y-5)i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+1=6$, $-8=y-5$

$x=5$, $y=-3$

$\therefore x+y=5+(-3)=2$ 답 ④

262

$\alpha-\beta=-1+3i$에서 $\overline{\alpha-\beta}=-1-3i$이므로

$\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)$

$=(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\alpha-\beta)$

$=(\overline{\alpha-\beta})(\alpha-\beta)$

$=(-1-3i)(-1+3i)$

$=(-1)^2-(3i)^2$

$=1-9i^2=1+9=10$ 답 ③

263

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$z-zi=(a+bi)-(a+bi)i=a+bi-ai-bi^2$

$=(a+b)+(b-a)i$

$\therefore \overline{z-zi}=\overline{(a+b)+(b-a)i}=(a+b)-(b-a)i$

$=(a+b)+(a-b)i$

즉, $(a+b)+(a-b)i=2+4i$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=2$, $a-b=4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$

$\therefore z=3-i$

따라서 z의 실수부분과 허수부분의 곱은

$3\cdot(-1)=-3$ 답 ①

264

$z=c+di$ (c, d는 실수)로 놓으면 $z+\overline{z}=0$이므로

$(c+di)+\overline{(c+di)}=0$

$c+di+c-di=0$

$2c=0$ $\therefore c=0$

이때, $z\neq0$이므로 복소수 z는 순허수이다.

즉, $a^2-3a-10=0$, $a^2-a-6\neq0$이므로

$a^2-3a-10=0$에서 $(a+2)(a-5)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=5$ …… ㉠

$a^2-a-6\neq0$에서 $(a+2)(a-3)\neq0$

$\therefore a\neq-2$이고 $a\neq3$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a=5$ 답 ⑤

265

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=6$

$\therefore a=3$

즉, $z=3+bi$이므로

$zi-\overline{z}=(3+bi)i-(3-bi)$

$=3i-b-3+bi$

$=(-b-3)+(b+3)i=0$

에서 $-b-3=0$, $b+3=0$

$\therefore b=-3$

따라서 $z=3-3i$이므로

$z\overline{z}=(3-3i)(3+3i)=3^2-(3i)^2$

$=9+9=18$ 답 18

266

$z=(1+i)x^2+(1-3i)x+2(i-1)$

$=x^2+x^2i+x-3xi+2i-2$

$=(x^2+x-2)+(x^2-3x+2)i$

이므로 z가 순허수가 되려면

$x^2+x-2=0$, $x^2-3x+2\neq0$이어야 한다.

$x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ …… ㉠

$x^2-3x+2\neq0$에서 $(x-1)(x-2)\neq0$

$\therefore x\neq1$이고 $x\neq2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$x=-2$ 답 ①

267

$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}=(-i)^{50}+i^{50}$

$=\{(-i)^4\}^{12}\cdot(-i)^2+(i^4)^{12}\cdot i^2$

$=(-i)^2+i^2$

$=-1+(-1)=-2$

답 ①

268

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로

$(1+i)^2+(1+i)^4+(1+i)^6+(1+i)^8+(1+i)^{10}$

$=(1+i)^2+\{(1+i)^2\}^2+\{(1+i)^2\}^3+\{(1+i)^2\}^4+\{(1+i)^2\}^5$

$=2i+(2i)^2+(2i)^3+(2i)^4+(2i)^5$

$=2i+4i^2+8i^3+16i^4+32i^5$

$=2i-4-8i+16+32i$

$=12+26i$

따라서 $12+26i=a+bi$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=12$, $b=26$

$\therefore a+b=12+26=38$

답 ③

269

$i+2i^2+3i^3+\cdots+30i^{30}$

$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)$

$+\cdots+(25i^{25}+26i^{26}+27i^{27}+28i^{28})+29i^{29}+30i^{30}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$

$+\cdots+(25i-26-27i+28)+29i-30$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+29i-30$

$=7(2-2i)+29i-30$

$=14-14i+29i-30$

$=-16+15i$

따라서 $-16+15i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-16$, $b=15$

$\therefore a+b=-16+15=-1$

답 ②

270

$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$의 양변을 제곱하면

$z^2=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$

$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$, $z^6=(z^2)^3=i^3=-i$,

$z^8=(z^2)^4=i^4=1$, $z^{10}=(z^2)^5=i^5=i$, $\cdots$

즉, $z^2=z^{10}=z^{18}=\cdots=i$

$z^6=z^{14}=z^{22}=\cdots=-i$

이므로 z^2, z^6, z^{10}, z^{14}, z^{18}, $\cdots$일 때 순허수이다.

따라서 z^n이 순허수가 되려면 $n=4k-2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 하므로 두 자리 자연수 n은 10, 14, 18, $\cdots$, 98의 23개이다.

답 23

271

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이다.

ㄱ. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

이므로 $z\bar{z}$는 실수이다.

ㄴ. $z^2+(\bar{z})^2=(a+bi)^2+(a-bi)^2$

$=(a^2+2abi-b^2)+(a^2-2abi-b^2)$

$=2(a^2-b^2)$

이므로 $z^2+(\bar{z})^2$은 실수이다.

ㄷ. $(z+1)(\bar{z}-1)=z\bar{z}-(z-\bar{z})-1$

ㄱ에서 $z\bar{z}=a^2+b^2$이고,

$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$이므로

$z\bar{z}-(z-\bar{z})-1=a^2+b^2-2bi-1$

즉, $(z+1)(\bar{z}-1)$은 $b\neq0$이면 실수가 아니다.

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

272

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$z+\frac{2}{z}=a+bi+\frac{2}{a+bi}$

$=a+bi+\frac{2(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$

$=a+bi+\frac{2a-2bi}{a^2+b^2}$

$=a+bi+\frac{2a}{a^2+b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}i$

$=a+\frac{2a}{a^2+b^2}+b\left(1-\frac{2}{a^2+b^2}\right)i$

이때, $z+\frac{2}{z}$가 실수이므로 $b\left(1-\frac{2}{a^2+b^2}\right)=0$이어야 한다.

그런데 복소수 z는 실수가 아니므로 $b\neq0$

즉, $1-\frac{2}{a^2+b^2}=0$ $\quad\therefore a^2+b^2=2$

따라서 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=2$

$\therefore \frac{z\bar{z}}{2}=\frac{2}{2}=1$

다른 풀이

$z+\frac{2}{z}$가 실수이므로 $z+\frac{2}{z}=\overline{z+\frac{2}{z}}=\bar{z}+\frac{2}{\bar{z}}$

즉, $z+\frac{2}{z}=\bar{z}+\frac{2}{\bar{z}}$에서

$z-\bar{z}=\frac{2}{\bar{z}}-\frac{2}{z}$

$z-\bar{z}=\frac{2(z-\bar{z})}{z\bar{z}}$

$(z-\bar{z})-\frac{2(z-\bar{z})}{z\bar{z}}=0$

$(z-\bar{z})\left(1-\frac{2}{z\bar{z}}\right)=0$

이때, z는 실수가 아닌 복소수이므로 $z-\bar{z}\neq0$

$1-\frac{2}{z\bar{z}}=0$ $\quad\therefore \frac{z\bar{z}}{2}=1$

답 ④

273

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로

가

$(1+i)z-2i\bar{z}=(1+i)(a+bi)-2i(a-bi)$

$=a+bi+ai-b-2ai-2b$

$=a-3b-(a-b)i$

$=7+3i$

나

복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-3b=7$, $a-b=-3$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-8$, $b=-5$
따라서 $z=-8-5i$이므로
$\bar{z}=-8+5i$

다

단계	채점 요소	비율
가	$z=a+bi$로 나타내기	20%
나	z, $\bar{z}$를 주어진 식에 대입하여 정리하기	40%
다	복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 $\bar{z}$ 구하기	40%

답 $-8+5i$

274

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

가

조건 (가)에서
$z+(1-2i)=a+bi+1-2i$
$=(a+1)+(b-2)i$ …… ㉠
㉠이 양의 실수이어야 하므로
$a+1>0$, 즉 $a>-1$
$b-2=0$, 즉 $b=2$

나

조건 (나)에서
$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=20$
$b=2$이므로 $a^2+2^2=20$, $a^2=16$
$a>-1$이므로 $a=4$

다

$\therefore \frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}(a+bi+a-bi)$
$=\frac{2a}{2}=a=4$

라

단계	채점 요소	비율
가	$z=a+bi$로 나타내기	10%
나	조건 (가)를 적용하기	30%
다	조건 (나)를 적용하기	30%
라	$\frac{1}{2}(z+\bar{z})$의 값 구하기	30%

답 4

Ⅱ. 방정식과 부등식

05 이차방정식

개념 콕콕 본문 p.51~52

275

$(a^2-1)x=a-1$에서 $(a+1)(a-1)x=a-1$
(1) 방정식의 해가 무수히 많으려면 $0\cdot x=0$의 꼴이어야 하므로
$a=1$
(2) 방정식의 해가 없으려면 $0\cdot x=b(b\neq 0)$의 꼴이어야 하므로
$a=-1$

답 (1) 1 (2) -1

276

$a^2x+2=4x+a$에서 $(a^2-4)x=a-2$
$\therefore (a+2)(a-2)x=a-2$
(ⅰ) $a\neq -2$이고 $a\neq 2$일 때, $x=\frac{a-2}{(a+2)(a-2)}=\frac{1}{a+2}$
(ⅱ) $a=2$일 때, $0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다.
(ⅲ) $a=-2$일 때, $0\cdot x=-4$이므로 해가 없다.

답 풀이 참조

277

(1) $|x-1|=2x-5$에서
(ⅰ) $x\geq 1$일 때, $x-1=2x-5$
$\therefore x=4$
(ⅱ) $x<1$일 때, $-(x-1)=2x-5$
$3x=6$ $\therefore x=2$
그런데 $x<1$이므로 $x=2$는 해가 아니다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=4$
(2) $|x+3|+|x-2|=7$에서
(ⅰ) $x<-3$일 때, $-(x+3)-(x-2)=7$
$-2x=8$ $\therefore x=-4$
(ⅱ) $-3\leq x<2$일 때, $x+3-(x-2)=7$
$0\cdot x=2$이므로 해가 없다.
(ⅲ) $x\geq 2$일 때, $x+3+x-2=7$
$2x=6$ $\therefore x=3$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 $x=-4$ 또는 $x=3$
(3) $|x-2|=|4-x|$에서 $x-2=\pm(4-x)$
(ⅰ) $x-2=4-x$일 때, $2x=6$
$\therefore x=3$
(ⅱ) $x-2=-(4-x)$일 때, $x-2=-4+x$
$0\cdot x=-2$이므로 해가 없다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$

답 (1) $x=4$ (2) $x=-4$ 또는 $x=3$ (3) $x=3$

278

(1) $x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
(2) $2x^2-3x-2=0$에서 $(2x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

(3) $4x^2-4x+1=0$에서 $(2x-1)^2=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ (중근)

(4) $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1=0$의 양변에 2를 곱하면

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=2$ (2) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

(3) $x=\frac{1}{2}$ (중근) (4) $x=1$ 또는 $x=2$

279

(1) $x^2+3x+3=0$에서

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x^2-2x-1=0$에서

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-1)}}{1}=1\pm\sqrt{2}$

(3) $2x^2+x+3=0$에서

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$

답 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$ (2) $x=1\pm\sqrt{2}$ (3) $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$

280

(1) $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$ (실근)

(2) $x^2+3=0$에서 $x^2=-3$

$x=\pm\sqrt{-3}$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{3}i$ (허근)

(3) $4x^2-2x+1=0$에서

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1}}{4}$

$=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$ (허근)

답 (1) $x=1$ 또는 $x=4$ (실근)

(2) $x=\pm\sqrt{3}i$ (허근) (3) $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$ (허근)

281

(1) $D=(-1)^2-4\cdot4\cdot(-2)=33>0$

∴ 서로 다른 두 실근

(2) $\frac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$

∴ 서로 다른 두 허근

(3) $\frac{D}{4}=(-6)^2-9\cdot4=0$

∴ 중근 (서로 같은 두 실근)

답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 서로 다른 두 허근

(3) 중근 (서로 같은 두 실근)

282

ㄱ. $D=3^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$

ㄴ. $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-2)=3>0$

ㄹ. $\frac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1=0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄷ이다.

(2) 중근을 가지면 $D=0$이므로 중근을 갖는 이차방정식은 ㄹ이다.

(3) 허근을 가지면 $D<0$이므로 허근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

답 (1) ㄷ (2) ㄹ (3) ㄱ, ㄴ

283

$x^2+5x-k=0$에서 $D=5^2-4\cdot1\cdot(-k)=25+4k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=25+4k>0$ $\quad\therefore k>-\frac{25}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=25+4k=0$ $\quad\therefore k=-\frac{25}{4}$

(3) 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=25+4k<0$ $\quad\therefore k<-\frac{25}{4}$

답 (1) $k>-\frac{25}{4}$ (2) $k=-\frac{25}{4}$ (3) $k<-\frac{25}{4}$

284

$x^2-x-5=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1$

(2) $\alpha\beta=\frac{-5}{1}=-5$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-5)=11$

(4) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{1}=\sqrt{21}$

답 (1) 1 (2) -5 (3) 11 (4) $\sqrt{21}$

285

$x^2+2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2}{1}=-2$, $\alpha\beta=\frac{-1}{1}=-1$

(1) $\alpha+\beta+\alpha\beta=-2+(-1)=-3$

(2) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-1\cdot(-2)=2$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{-1}=2$

(4) $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=(-2)^2-(-1)=5$

답 (1) -3 (2) 2 (3) 2 (4) 5

286

$x^2-x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1$, $\alpha\beta=\frac{-3}{1}=-3$

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=-3+1+1=-1$

(2) $(1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=1-1-3=-3$

(3) $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=-3+1+1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

(4) $\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}=\dfrac{\beta-1+\alpha-1}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{1-2}{-3-1+1}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) -1 (2) -3 (3) $-\dfrac{4}{3}$ (4) $\dfrac{1}{3}$

287

(1) $x^2+16=0$에서 $x^2=-16$이므로

$x=\pm\sqrt{-16}=\pm 4i$

$\therefore x^2+16=(x+4i)(x-4i)$

(2) $x^2+2x-2=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-2)}}{1}=-1\pm\sqrt{3}$

$\therefore x^2+2x-2=\{x-(-1+\sqrt{3})\}\{x-(-1-\sqrt{3})\}$

$=(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

답 (1) $(x+4i)(x-4i)$ (2) $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

288

(1) $x^2-\{2+(-1)\}x+2\cdot(-1)=0$

$\therefore x^2-x-2=0$

(2) $x^2-\left\{\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{5}{3}\right)\right\}x+\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right)=0$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{5}{2}=0$

(3) $x^2-\{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-4x+1=0$

(4) $x^2-\{(1-i)+(1+i)\}x+(1-i)(1+i)=0$

$\therefore x^2-2x+2=0$

답 (1) $x^2-x-2=0$ (2) $x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{5}{2}=0$

(3) $x^2-4x+1=0$ (4) $x^2-2x+2=0$

289

(1) a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-\sqrt{2}+\sqrt{2}=-a$, $-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=b$

$\therefore a=0$, $b=-2$

(2) a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{5}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=-a$, $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=b$

$\therefore a=-4$, $b=-1$

답 (1) $a=0$, $b=-2$ (2) $a=-4$, $b=-1$

290

(1) a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3i$이므로 다른 한 근은 $-3i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$3i+(-3i)=-a$, $3i\cdot(-3i)=b$

$\therefore a=0$, $b=9$

(2) a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3+4i$이므로 다른 한 근은 $3-4i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+4i)+(3-4i)=-a$, $(3+4i)(3-4i)=b$

$\therefore a=-6$, $b=25$

답 (1) $a=0$, $b=9$ (2) $a=-6$, $b=25$

유형 콕콕

본문 p.53~59

291 ④	**292** 0	**293** ③	**294** $x=6$	**295** ③	**296** ②
297 ②	**298** 7	**299** ②	**300** ②	**301** ①	
302 $x=a-b$ 또는 $x=a+b$		**303** ③	**304** ⑤	**305** ②	
306 7	**307** ②	**308** 19	**309** ②		
310 $x=1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$			**311** ⑤		
312 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$				**313** ③	
314 $-1+\sqrt{5}$		**315** ③	**316** ③	**317** 4 m	**318** ②
319 ②	**320** ③	**321** ④	**322** ①	**323** ③	**324** 2
325 ④	**326** ③	**327** ②	**328** 14	**329** ⑤	**330** ②
331 ④	**332** $x^2-7x+18=0$		**333** ②	**334** ⑤	**335** ④
336 5	**337** ⑤	**338** $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$			**339** ④
340 $-\dfrac{7}{4}$	**341** ①	**342** ②	**343** ②	**344** 54	

291

$m(m-3)x+1=-2x+m$에서

$(m^2-3m+2)x=m-1$

$(m-1)(m-2)x=m-1$

이 방정식의 해가 무수히 많으려면 $0\cdot x=0$의 꼴이어야 하므로

$(m-1)(m-2)=0$, $m-1=0$

$\therefore m=1$

답 ④

292

$a^2x+2=a(x+2)$에서

$(a^2-a)x=2a-2$

$a(a-1)x=2(a-1)$

이 방정식의 해가 없으려면 $0\cdot x=b$ $(b\neq 0)$의 꼴이어야 하므로

$a(a-1)=0$, $2(a-1)\neq 0$

$\therefore a=0$

답 0

293

$ax-b=3x-2$에서

$(a-3)x=b-2$

ㄱ. $a\neq 3$, $b=2$이면 $(a-3)x=0$ $\therefore x=0$

즉, 오직 한 개의 해를 갖는다. (거짓)

ㄴ. $a=3$, $b\neq2$이면 $0\cdot x=b-2$이므로 해가 없다. (참)
ㄷ. $a=3$, $b=2$이면 $0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다. (참)
ㄹ. $a\neq3$, $b\neq2$이면 $x=\frac{b-2}{a-3}$이므로 오직 한 개의 해를 갖는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

294
$a^2x+4a=2ax+a^2$에서
$(a^2-2a)x=a^2-4a$
$a(a-2)x=a(a-4)$
이 방정식의 해가 없으려면 $0\cdot x=b(b\neq0)$의 꼴이어야 하므로
$a(a-2)=0$, $a(a-4)\neq0$ $\quad\therefore a=2$ ······ ㉠
이때, ㉠을 x에 대한 방정식 $(x+3)a=a^2+2ax-10$에 대입하면
$2(x+3)=4+4x-10$, $2x=12$
$\therefore x=6$ 답 $x=6$

295
$|x|+|x-1|=3$에서
(i) $x<0$일 때, $-x-(x-1)=3$
$-2x+1=3$ $\quad\therefore x=-1$
(ii) $0\le x<1$일 때, $x-(x-1)=3$
$0\cdot x=2$이므로 해가 없다.
(iii) $x\ge1$일 때, $x+x-1=3$
$2x-1=3$ $\quad\therefore x=2$
(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 해는
$x=-1$ 또는 $x=2$ 답 ③

296
$2x+|x-2|=7$에서
(i) $x<2$일 때, $2x-(x-2)=7$
$x+2=7$ $\quad\therefore x=5$
그런데 $x<2$이므로 $x=5$는 해가 아니다.
(ii) $x\ge2$일 때, $2x+(x-2)=7$
$3x-2=7$ $\quad\therefore x=3$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=3$ 답 ②

297
$\sqrt{x^2-4x+4}+3|x-4|=5x-11$에서
$\sqrt{(x-2)^2}+3|x-4|=5x-11$
$|x-2|+3|x-4|=5x-11$
(i) $x<2$일 때, $-(x-2)-3(x-4)=5x-11$
$-4x+14=5x-11$ $\quad\therefore x=\frac{25}{9}$
그런데 $x<2$이므로 $x=\frac{25}{9}$는 해가 아니다.
(ii) $2\le x<4$일 때, $x-2-3(x-4)=5x-11$
$-2x+10=5x-11$ $\quad\therefore x=3$
(iii) $x\ge4$일 때, $x-2+3(x-4)=5x-11$
$4x-14=5x-11$ $\quad\therefore x=-3$
그런데 $x\ge4$이므로 $x=-3$은 해가 아니다.
(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=3$ 답 ②

298
$|1-2x|-a=x$에서 $|2x-1|=x+a$
(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $-(2x-1)=x+a$ $\quad\therefore x=\frac{1-a}{3}$
(ii) $x\ge\frac{1}{2}$일 때, $2x-1=x+a$ $\quad\therefore x=a+1$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는
$x=\frac{1-a}{3}$ 또는 $x=a+1$
두 해의 합이 6이므로
$\frac{1-a}{3}+a+1=6$, $1-a+3(a+1)=18$
$2a=14$ $\quad\therefore a=7$ 답 7

299
$(x-2)^2=x$에서 $x^2-4x+4=x$
$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=4$ 답 ②

300
$2x^2+3x-2=0$에서 $(x+2)(2x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 답 ②

301
$x^2+(3a-5)x+(a-2)(2a-3)=0$에서
$\{x+(a-2)\}\{x+(2a-3)\}=0$
$\therefore x=-a+2$ 또는 $x=-2a+3$ 답 ①

302
$x^2-2ax+a^2-b^2=0$에서
$x^2-2ax+(a-b)(a+b)=0$
$\{x-(a-b)\}\{x-(a+b)\}=0$
$\therefore x=a-b$ 또는 $x=a+b$ 답 $x=a-b$ 또는 $x=a+b$

303
$(x-2)^2=2x^2+2x+3$에서
$x^2-4x+4=2x^2+2x+3$
$\therefore x^2+6x-1=0$
따라서 근의 공식에 의하여
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot(-1)}}{1}=-3\pm\sqrt{10}$ 답 ③

304
$2x^2-6x+5=0$에서 근의 공식에 의하여
$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot5}}{2}$
$=\frac{3\pm\sqrt{-1}}{2}=\frac{3\pm i}{2}$ 답 ⑤

305
$(x+2)^2=3$에서 $x+2=\pm\sqrt{3}$
$\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$ 답 ②

306

$(x+2)^2-3x=5$에서 $x^2+4x+4-3x=5$

$\therefore x^2+x-1=0$

근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{a}}{b}$

이므로 $a=5$, $b=2$

$\therefore a+b=5+2=7$ 답 7

307

$(a-1)x^2-x-a^2+6=0$의 한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$(a-1)\cdot2^2-2-a^2+6=0$

$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=4$

그런데 $a\neq4$이므로 $a=0$ ...... ㉠

㉠을 주어진 이차방정식에 대입하면

$-x^2-x+6=0$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 -3이다. 답 ②

308

$x^2-3mx+m+9=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1-3m+m+9=0$

$-2m=-10$ $\therefore m=5$ ...... ㉠

㉠을 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2-15x+14=0$에서 $(x-1)(x-14)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=14$

따라서 다른 한 근, 즉 $n=14$이므로

$m+n=5+14=19$ 답 19

309

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2+2(\sqrt{2}+1)x-(\sqrt{2}+1)^2=0$

$x^2+2(\sqrt{2}+1)x-(3+2\sqrt{2})=0$

$(x+3+2\sqrt{2})(x-1)=0$

$\therefore x=-3-2\sqrt{2}$ 또는 $x=1$ 답 ②

310

주어진 방정식의 양변에 $2-\sqrt{3}$을 곱하면

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})x^2-(2-\sqrt{3})(9+5\sqrt{3})x+(2-\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})=0$

$x^2-(3+\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}=0$

$(x-1)\{x-(2+\sqrt{3})\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$ 답 $x=1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

311

$x^2+3|x|-4=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1$

(ii) $x\geq0$일 때, $x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-1$ 또는 $x=1$ 답 ⑤

312

$|x^2-3x+1|=1$에서 $x^2-3x+1=\pm1$

즉, $x^2-3x+1=-1$ 또는 $x^2-3x+1=1$

(i) $x^2-3x+1=-1$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+1=1$에서 $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

답 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

313

$x^2-2x=|2x-4|$에서

(i) $x<2$일 때, $x^2-2x=-(2x-4)$

$x^2=4$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

그런데 $x<2$이므로 $x=-2$

(ii) $x\geq2$일 때, $x^2-2x=2x-4$

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 모든 근의 합은 $-2+2=0$ 답 ③

314

$x^2-|x|-2=|x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때, $x^2+x-2=-(x+2)$

$x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

그런데 $x<-2$이므로 $x=-2$, $x=0$은 근이 아니다.

㉮

(ii) $-2\leq x<0$일 때, $x^2+x-2=x+2$

$x^2=4$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

그런데 $-2\leq x<0$이므로 $x=-2$

㉯

(iii) $x\geq0$일 때, $x^2-x-2=x+2$

$x^2-2x-4=0$ $\therefore x=1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=1+\sqrt{5}$

㉰

(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-2$ 또는 $x=1+\sqrt{5}$

따라서 모든 근의 합은

$-2+1+\sqrt{5}=-1+\sqrt{5}$

㉱

단계	채점 요소	비율
㉮	$x<-2$일 때, 주어진 방정식 풀기	30%
㉯	$-2\leq x<0$일 때, 주어진 방정식 풀기	30%
㉰	$x\geq0$일 때, 주어진 방정식 풀기	30%
㉱	모든 근의 합 구하기	10%

답 $-1+\sqrt{5}$

315

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 변화된 사각형의 넓이는
$(x+2)(x-2)$

이 사각형의 넓이가 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이 되었으므로

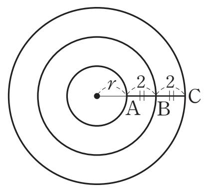
$(x+2)(x-2)=\frac{1}{2}x^2$

$x^2-4=\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}x^2=4$ $\quad\therefore x^2=8$

따라서 처음 정사각형의 넓이는 $8\ \text{cm}^2$이다.

답 ③

316



가장 작은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 두 번째로 작은 원의 반지름의 길이는 $r+2$, 가장 큰 원의 반지름의 길이는 $r+4$이므로 원의 넓이를 각각 구하면

(가장 작은 원의 넓이)$=\pi r^2$

(두 번째로 작은 원의 넓이)$=\pi(r+2)^2$

(가장 큰 원의 넓이)$=\pi(r+4)^2$

가장 큰 원의 넓이가 나머지 작은 두 원의 넓이의 합과 같으므로

$\pi(r+4)^2=\pi r^2+\pi(r+2)^2$

$r^2+8r+16=r^2+r^2+4r+4$

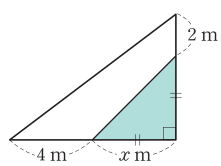
$r^2-4r-12=0$, $(r+2)(r-6)=0$

$\therefore r=6\ (\because r>0)$

따라서 가장 작은 원의 넓이는 $\pi\cdot 6^2=36\pi$이다.

답 ③

317



처음 직각이등변삼각형 모양의 땅의 빗변이 아닌 변의 길이를 x m라 하면 가로와 세로의 길이를 각각 4 m, 2 m씩 늘인 후 땅의 넓이는

$\frac{1}{2}(x+4)(x+2)$

가

이 넓이가 처음 넓이의 3배이므로

$\frac{1}{2}(x+4)(x+2)=\frac{1}{2}x^2\cdot 3$

나

$x^2+6x+8=3x^2$

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$

따라서 처음 직각이등변삼각형 모양의 땅의 빗변이 아닌 변의 길이는 4 m이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	변화된 직각삼각형의 넓이를 미지수로 나타내기	40%
나	처음 직각이등변삼각형의 넓이와 변화된 직각삼각형의 넓이 사이의 관계식 구하기	40%
다	처음 직각이등변삼각형의 빗변이 아닌 변의 길이 구하기	20%

답 4 m

318

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-7=0$의 판별식을 D라 하면 이 방정식이 실근을 가지므로 $D\geq 0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-7)\geq 0$

$2k+8\geq 0$ $\quad\therefore k\geq -4$

답 ②

319

이차방정식 $x^2+5x-2a=0$의 판별식을 D라 하면 이 방정식이 허근을 가지므로 $D<0$이어야 한다. 즉,

$D=5^2-4\cdot 1\cdot(-2a)<0$

$25+8a<0$ $\quad\therefore a<-\frac{25}{8}$

답 ②

320

x에 대한 이차방정식 $x^2-2mx+m^2+2m-6=0$의 판별식을 D라 하면 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 $D>0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=(-m)^2-(m^2+2m-6)>0$

$-2m+6>0$ $\quad\therefore m<3$

답 ③

321

(i) $x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 방정식이 중근을 가지므로 $D_1=0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-a=0$

$a^2-a=0$, $a(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

(ii) $2x^2+(1-a)x-2a+2=0$의 판별식을 D_2라 하면 이 방정식이 중근을 가지므로 $D_2=0$이어야 한다. 즉,

$D_2=(1-a)^2-4\cdot 2\cdot(-2a+2)=0$

$a^2+14a-15=0$, $(a+15)(a-1)=0$

$\therefore a=-15$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 두 방정식이 모두 중근을 갖도록 하는 실수 a의 값은 1이다.

답 ④

322

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-2=0$의 판별식을 D라 하면 이 방정식이 중근을 가지므로 $D=0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-2)=0$

$2k+3=0$ $\quad\therefore k=-\frac{3}{2}$

답 ①

323

이차방정식 $x^2+mx+3m-9=0$의 판별식을 D라 하면 이 방정식이 중근을 가지므로 $D=0$이어야 한다. 즉,

$D=m^2-4(3m-9)=0$

$m^2-12m+36=0$, $(m-6)^2=0$

$\therefore m=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 이차방정식에 대입하면 $x^2+6x+9=0$

즉, $(x+3)^2=0$은 $x=-3$을 중근으로 갖는다.

$\therefore a=-3$

$\therefore a+m=-3+6=3$

답 ③

324

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2+2+a^2-b=0$의 판별식을 D라 하면 이 방정식이 중근을 가지므로 $D=0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2+2+a^2-b)=0$

$\therefore -2ak+b-2=0$

가

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$-2a=0$, $b-2=0$ $\quad\therefore a=0$, $b=2$

$\therefore a+b=0+2=2$

나

단계	채점 요소	비율
가	이차방정식이 중근을 가질 조건을 알고, 이를 이용하여 k, a, b에 대한 등식 구하기	50%
나	구한 등식이 k에 대한 항등식임을 이용하여 a, b의 값 구하기	50%

답 2

325

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{1}=1$ 답 ④

326

이차방정식 $x^2-3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-5$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=3^2-2\cdot(-5)=19$ 답 ③

327

이차방정식 $x^2+6x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{(-6)^2-2\cdot3}{3}=10$ 답 ②

328

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2=14$ 답 14

329

이차방정식 $3x^2+2x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}$

한편, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 합과 곱을 구하면

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=-2$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$

즉, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+2x+3=0$ …… ㉠

이때, $x^2+ax+b=0$이 ㉠과 같으므로 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$ 답 ⑤

330

(두 근의 합)$=(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=6$

(두 근의 곱)$=(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=7$

따라서 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+7=0$ 답 ②

331

이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5^2-2\cdot3=19$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=3^2=9$

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-19x+9=0$ 답 ④

332

이차방정식 $x^2-3x+8=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=8$

$\therefore (\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4=3+4=7$

$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4$

$=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$

$=8+2\cdot3+4=18$

따라서 $\alpha+2$, $\beta+2$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-7x+18=0$ 답 $x^2-7x+18=0$

333

a, b가 유리수이고 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$

따라서 $a=-4$, $b=1$이므로

$a+b=-4+1=-3$ 답 ②

334

a, b가 실수이고 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $3+2i$이므로 다른 한 근은 $3-2i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2i)+(3-2i)=a$
$(3+2i)(3-2i)=b$
따라서 $a=6$, $b=13$이므로
$a+b=6+13=19$ 답 ⑤

335

$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=1+\sqrt{3}$

a가 유리수이고 이차방정식 $x^2-ax-2=0$의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다.
근과 계수의 관계에 의하여
$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=a$ $\therefore a=2$
따라서 유리수 a의 값과 다른 한 근의 합은
$2+(1-\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$ 답 ④

336

$\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{1+1}=1+i$ 가

a, b가 실수이고 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.
근과 계수의 관계에 의하여
$(1+i)+(1-i)=-a$ $\therefore a=-2$
$(1+i)(1-i)=b$ $\therefore b=2$ 나

따라서 $f(x)=x^2-2x+2$라 하면
$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-1)=1+2+2=5$ 다

단계	채점 요소	비율
가	$\frac{2}{1-i}$를 간단히 하기	30%
나	이차방정식의 다른 한 근을 구하고 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값 구하기	40%
다	다항식 x^2+ax+b를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지 구하기	30%

답 5

337

이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근은 근의 공식에 의하여
$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$
$\therefore x^2+2x-4=\{x-(-1+\sqrt{5})\}\{x-(-1-\sqrt{5})\}$
$=(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})$ 답 ⑤

338

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근은 근의 공식에 의하여
$x=1\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot3}=1\pm\sqrt{2}i$
$\therefore x^2-2x+3=\{x-(1+\sqrt{2}i)\}\{x-(1-\sqrt{2}i)\}$
$=(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$
답 $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

339

이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 두 근은 근의 공식에 의하여
$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot2}=-1\pm i$
$\therefore x^2+2x+2=\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}$
$=(x+1-i)(x+1+i)$
따라서 인수인 것은 ④이다. 답 ④

340

이차방정식 $4x^2-2x+1=0$의 두 근은 근의 공식에 의하여
$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$ 가

$\therefore 4x^2-2x+1=4\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{4}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{4}\right)$
$=4\cdot\frac{4x-1-\sqrt{3}i}{4}\cdot\frac{4x-1+\sqrt{3}i}{4}$
$=\frac{1}{4}(4x-1-\sqrt{3}i)(4x-1+\sqrt{3}i)$ 나

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=-1-\sqrt{3}i$, $c=-1+\sqrt{3}i$
또는 $a=\frac{1}{4}$, $b=-1+\sqrt{3}i$, $c=-1-\sqrt{3}i$이므로
$a+b+c=\frac{1}{4}+(-1-\sqrt{3}i)+(-1+\sqrt{3}i)=-\frac{7}{4}$ 다

단계	채점 요소	비율
가	이차방정식 $4x^2-2x+1=0$의 근 구하기	30%
나	이차식 $4x^2-2x+1$을 복소수 범위에서 인수분해하여 $a(4x+b)(4x+c)$의 꼴로 나타내기	50%
다	$a+b+c$의 값 구하기	20%

답 $-\frac{7}{4}$

341

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=4$
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(4x-2)=0$이려면
$4x-2=\alpha$ 또는 $4x-2=\beta$
$\therefore x=\frac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{4}$
즉, 이차방정식 $f(4x-2)=0$의 두 근은
$x=\frac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{4}$
따라서 두 근의 합은
$\frac{\alpha+2}{4}+\frac{\beta+2}{4}=\frac{\alpha+\beta+4}{4}=\frac{4+4}{4}=2$ 답 ①

342

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha\beta=18$
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x)=0$이려면
$3x=\alpha$ 또는 $3x=\beta$
$\therefore x=\frac{\alpha}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta}{3}$
즉, 이차방정식 $f(3x)=0$의 두 근은

$x=\frac{\alpha}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta}{3}$

따라서 두 근의 곱은

$\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{\beta}{3}=\frac{\alpha\beta}{9}=\frac{18}{9}=2$ 답 ②

343

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

$f(2x+3)=0$이려면

$2x+3=\alpha$ 또는 $2x+3=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-3}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-3}{2}$

즉, 이차방정식 $f(2x+3)=0$의 두 근은

$x=\frac{\alpha-3}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-3}{2}$

따라서 두 근의 곱은

$\frac{\alpha-3}{2}\cdot\frac{\beta-3}{2}=\frac{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9}{4}=\frac{4-3\cdot3+9}{4}=1$ 답 ②

344

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f\left(\frac{1}{3}x-2\right)=0$이려면

$\frac{1}{3}x-2=\alpha$ 또는 $\frac{1}{3}x-2=\beta$

$\therefore x=3\alpha+6$ 또는 $x=3\beta+6$

즉, 이차방정식 $f\left(\frac{1}{3}x-2\right)=0$의 두 근은

$x=3\alpha+6$ 또는 $x=3\beta+6$

따라서 두 근의 곱은

$(3\alpha+6)(3\beta+6)=9\alpha\beta+18(\alpha+\beta)+36$

$=9\cdot(-2)+18\cdot2+36=54$ 답 54

실력 콕콕 본문 p.60~61

345 ③	**346** ④	**347** ②	**348** 16 cm	**349** 2	**350** ①
351 ②	**352** 68	**353** ①	**354** ③	**355** ③	**356** ②
357 24	**358** -1	**359** 1	**360** 28		

345

$x^2-2mx+m-7=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^2-2m\cdot(-1)+m-7=0$

$3m=6$　　$\therefore m=2$ …… ㉠

㉠을 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 다른 한 근은 5이다. 답 ③

346

$2\sqrt{3}(x+1)(x-1)=x-\sqrt{3}$에서

$2\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}=0$

양변에 $\sqrt{3}$을 곱하여 정리하면

$6x^2-\sqrt{3}x-3=0$

근의 공식에 의하여

$x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot6\cdot(-3)}}{2\cdot6}$

$=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{75}}{12}=\frac{\sqrt{3}\pm5\sqrt{3}}{12}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$4p^2+3q^2=4\cdot\frac{3}{4}+3\cdot\frac{1}{3}=4$ 답 ④

347

$x^2-2|x-1|-1=0$에서

(i) $x<1$일 때, $x^2+2(x-1)-1=0$

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x<1$이므로 $x=-3$

(ii) $x\geq1$일 때, $x^2-2(x-1)-1=0$

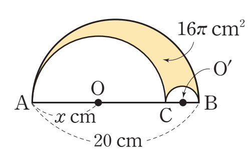
$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 모든 근의 합은 $-3+1=-2$ 답 ②

348



오른쪽 그림과 같이 두 번째로 작은 반원의 중심을 O, 가장 작은 반원의 중심을 O′이라 하고 $\overline{AO}=x$ cm라 하면

$\overline{BC}=(20-2x)$ cm이므로

색칠한 부분의 넓이는

$\frac{10^2}{2}\pi-\left\{\frac{x^2}{2}\pi+\frac{(10-x)^2}{2}\pi\right\}=16\pi$

$100-\{x^2+(10-x)^2\}=32$

$x^2-10x+16=0$, $(x-2)(x-8)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=8$

따라서 $\overline{AC}>\overline{BC}$이므로 $x=\overline{AO}=8$ (cm)

$\therefore \overline{AC}=2\overline{AO}=2\cdot8=16$ (cm) 답 16 cm

349

$x^2-(kx-2)x+3=0$에서

$(1-k)x^2+2x+3=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D>0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=1^2-(1-k)\cdot3>0$

$-2+3k>0$　　$\therefore k>\frac{2}{3}$

그런데 $k=1$이면 ㉠이 이차방정식이 아니므로 자연수 k의 최솟값은 2이다. 답 2

350

x에 대한 이차방정식 $4x^2-(4a-1)x+a^2=0$의 판별식을 D라 하면 이 방정식이 허근을 가지므로 $D<0$이어야 한다. 즉,

$D=\{-(4a-1)\}^2-4\cdot4\cdot a^2=-8a+1<0$

$\therefore a>\frac{1}{8}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 ①

351

x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+2b^2-ab=0$의 판별식을 D라 하면 이 방정식이 중근을 가지므로 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-(2b^2-ab)=0$

$a^2+ab-2b^2=0$에서

$(a-b)(a+2b)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $a=-2b$

그런데 $a>0$, $b>0$이므로 $a=b$

$\therefore \frac{a}{b}=1$

다른 풀이

x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+2b^2-ab=0$의 판별식을 D라 하면 이 방정식이 중근을 가지므로 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-(2b^2-ab)=0$

$a^2+ab-2b^2=0$의 양변을 b^2으로 나누면

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}-2=0$

$\left(\frac{a}{b}+2\right)\left(\frac{a}{b}-1\right)=0$

$\therefore \frac{a}{b}=-2$ 또는 $\frac{a}{b}=1$

그런데 $a>0$, $b>0$이므로 $\frac{a}{b}=1$ 답 ②

352

이차식 $x^2-4ax+(ka+b-4k)$가 k의 값에 관계없이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2-4ax+(ka+b-4k)=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-(ka+b-4k)=0$에서

$(4-a)k+4a^2-b=0$ …… ㉠

이때, ㉠이 k에 대한 항등식이므로

$4-a=0$, $4a^2-b=0$

따라서 $a=4$, $b=64$이므로

$a+b=4+64=68$ 답 68

353

이차방정식 $3x^2+x+a-4=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{1}{3}$, $\alpha\beta=\frac{a-4}{3}$

두 근의 차가 $\frac{4}{3}$이므로 $|\alpha-\beta|=\frac{4}{3}$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$\frac{16}{9}=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-4\cdot\frac{a-4}{3}$

$12a=33 \quad \therefore a=\frac{11}{4}$ 답 ①

354

이차방정식 $3x^2-12x-k=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-\frac{k}{3}$

두 근의 절댓값의 합이 8이므로 $|\alpha|+|\beta|=8$

$\therefore (|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$=16+\frac{2k}{3}+\frac{2|k|}{3}=64$

$2(k+|k|)=144$

$\therefore k+|k|=72$

이때, $k\le0$이면 성립하지 않으므로 $k>0$이다.

$\therefore k=36$ 답 ③

355

이차방정식 $x^2-(4+i)x+(m-1)i+4=0$의 한 실근을 α라 하면

$\alpha^2-(4+i)\alpha+(m-1)i+4=0$에서

$(\alpha^2-4\alpha+4)+(-\alpha+m-1)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha^2-4\alpha+4=0$에서 $(\alpha-2)^2=0$

$\therefore \alpha=2$

$-\alpha+m-1=0$에서 $-2+m-1=0$

$\therefore m=3$ 답 ③

356

이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\frac{1}{\beta}=3$, 즉 $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}=3$ …… ㉠

$\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=-2$, 즉 $\frac{\alpha}{\beta}=-2$ …… ㉡

한편, $\frac{1}{\alpha}$, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 $x^2-ax+b=0$이라 하면

$a=\frac{1}{\alpha}+\beta$, $b=\frac{\beta}{\alpha}$

그런데 ㉠에서 $\alpha\beta+1=3\beta$이고, ㉡에서 $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{2}$이므로

$a=\frac{1}{\alpha}+\beta=\frac{1+\alpha\beta}{\alpha}=\frac{3\beta}{\alpha}=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$,

$b=\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$

$\therefore 2x^2+3x-1=0$ 답 ②

357

a, b가 실수이고 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이

$\frac{6i}{1+i}=\frac{6i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{6i+6}{2}=3+3i$

이므로 다른 한 근은 $3-3i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+3i)+(3-3i)=a$

$(3+3i)(3-3i)=b$

따라서 $a=6$, $b=18$이므로

$a+b=6+18=24$ 답 24

358

x에 대한 이차방정식 $x^2+(a^2-a-2)x+a-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 실근의 절댓값은 같고 부호는 서로 다르므로

$\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta<0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a^2-a-2)=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$ …… ㉠

$\alpha\beta=a-2<0$

$\therefore a<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$ 답 -1

359

이차방정식 $x^2-4(k+1)x+12k=0$의 두 근을 α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

가

$\alpha+3\alpha=4(k+1)$에서 $4\alpha=4(k+1)$

$\therefore \alpha=k+1$ …… ㉠

$\alpha\cdot3\alpha=12k$에서 $3\alpha^2=12k$

$\therefore \alpha^2=4k$ …… ㉡

나

㉡에 ㉠을 대입하면 $(k+1)^2=4k$

$k^2-2k+1=0$, $(k-1)^2=0$

$\therefore k=1$

다

단계	채점 요소	비율
가	두 근을 α, 3α로 놓기	20%
나	α를 k에 대한 식으로 나타내기	50%
다	실수 k의 값 구하기	30%

답 1

360

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근의 공식을

$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 풀었을 때, 두 근이 -1, 3이므로 두 근의 합은

$\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}=2$

$\therefore b=2a$ …… ㉠

가

또한 두 근의 곱은

$\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\frac{ac}{4a^2}$

$=\frac{c}{4a}=-3$

$\therefore c=-12a$ …… ㉡

나

㉠, ㉡을 주어진 이차방정식에 대입하면

$ax^2+2ax-12a=0$에서 $x^2+2x-12=0$ $(\because a\neq0)$

이때, 이 이차방정식의 원래의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-12$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2)^2-2\cdot(-12)=28$

다

단계	채점 요소	비율
가	b를 a에 대한 식으로 나타내기	30%
나	c를 a에 대한 식으로 나타내기	30%
다	$\alpha^2+\beta^2$의 값 구하기	40%

답 28

06 이차방정식과 이차함수

개념 콕콕

본문 p.63~64

361

(1) 기울기와 y절편이 모두 양수인 직선이므로 제1, 2, 3 사분면을 지난다.
(2) 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선이므로 제1, 3, 4 사분면을 지난다.
(3) 기울기와 y절편이 모두 음수인 직선이므로 제2, 3, 4 사분면을 지난다.
(4) 기울기가 음수이고 원점을 지나는 직선이므로 제2, 4 사분면을 지난다.

답 (1) 제1, 2, 3 사분면 (2) 제1, 3, 4 사분면
(3) 제2, 3, 4 사분면 (4) 제2, 4 사분면

362

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

(1) $ab>0$, $bc<0$이므로 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$
따라서 기울기가 음수이고 y절편이 양수인 직선이므로 제1, 2, 4 사분면을 지난다.

(2) $ab<0$, $bc>0$이므로 $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$
따라서 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선이므로 제1, 3, 4 사분면을 지난다.

(3) $c=0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x$이고, $ab<0$이므로 $-\frac{a}{b}>0$
따라서 기울기가 양수이고 원점을 지나는 직선이므로 제1, 3 사분면을 지난다.

(4) $a=0$이므로 $y=-\frac{c}{b}$이고, $bc<0$이므로 $-\frac{c}{b}>0$
따라서 x축에 평행하고 모든 실수 x에 대하여 y의 값이 $-\frac{c}{b}>0$으로 일정한 직선이므로 제1, 2 사분면을 지난다.

답 (1) 제1, 2, 4 사분면 (2) 제1, 3, 4 사분면
(3) 제1, 3 사분면 (4) 제1, 2 사분면

363

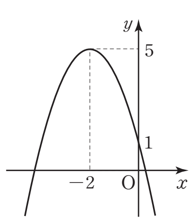
(1) $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로
꼭짓점의 좌표 : $(2, -1)$
축의 방정식 : $x=2$

(2) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-3=-\frac{1}{3}(x-3)^2$이므로
꼭짓점의 좌표 : $(3, 0)$
축의 방정식 : $x=3$

답 (1) $(2, -1)$, $x=2$ (2) $(3, 0)$, $x=3$

364

이차함수 $y=-(x+2)^2+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



ㄱ. 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 5)$이다. (참)
ㄴ. x^2의 계수가 음수이므로 위로 볼록한 포물선이다. (거짓)
ㄷ. 모든 사분면을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

365

(1) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ $\therefore b<0$
또한 y축과의 교점이 x축 아래쪽에 있으므로 $c<0$
(2) 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$ $\therefore b<0$
또한 y축과의 교점이 x축 위쪽에 있으므로 $c>0$

답 (1) $a>0$, $b<0$, $c<0$ (2) $a<0$, $b<0$, $c>0$

366

(1) 꼭짓점의 좌표가 $(2, 3)$이므로 $y=a(x-2)^2+3$이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(1, 4)$를 지나므로
$4=a(1-2)^2+3$
$a+3=4$ $\therefore a=1$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=(x-2)^2+3$
$\therefore y=x^2-4x+7$
(2) x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(1, 0)$에서 만나므로 $y=a(x+2)(x-1)$이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로
$2=a(0+2)(0-1)$
$-2a=2$ $\therefore a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-(x+2)(x-1)$
$\therefore y=-x^2-x+2$
(3) 축의 방정식이 $x=-2$이므로 $y=a(x+2)^2+b$라 하면 이 함수의 그래프가 두 점 $(-2, -4)$, $(0, 0)$을 지나므로
$-4=b$, $0=4a+b$ $\therefore a=1$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=(x+2)^2-4$
$\therefore y=x^2+4x$

답 (1) $y=x^2-4x+7$ (2) $y=-x^2-x+2$
(3) $y=x^2+4x$

367

(1) 이차방정식 $2x^2-4x=0$에서 $2x(x-2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 0, 2이다.
(2) 이차방정식 $-x^2-3x+4=0$에서 $x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 -4, 1이다.
(3) 이차방정식 $-x^2+12x-36=0$에서 $x^2-12x+36=0$
$(x-6)^2=0$
$\therefore x=6$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 6이다.

답 (1) 0, 2 (2) -4, 1 (3) 6

368

(1) 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$
이므로 방정식 $x^2-3x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다.

(2) 이차방정식 $2x^2-2x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(-3)=7>0$

이므로 방정식 $2x^2-2x-3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.

(3) 이차방정식 $-9x^2+6x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(-9)\cdot(-1)=0$

이므로 방정식 $-9x^2+6x-1=0$은 중근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1이다.

답 (1) 0 (2) 2 (3) 1

369

이차방정식 $x^2-4x-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-2k)=4+2k$

(1) $\frac{D}{4}=4+2k>0$ $\quad\therefore k>-2$

(2) $\frac{D}{4}=4+2k=0$ $\quad\therefore k=-2$

(3) $\frac{D}{4}=4+2k<0$ $\quad\therefore k<-2$

답 (1) $k>-2$ (2) $k=-2$ (3) $k<-2$

370

(1) $x^2-x+1=x+1$에서

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표는 0, 2이다.

(2) $-x^2+2x+1=-2x+5$에서

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

따라서 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표는 2이다.

답 (1) 0, 2 (2) 2

371

(1) $x^2+3x+1=-2x-1$, 즉 $x^2+5x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot1\cdot2=17>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $2x^2-3x+8=x-1$, 즉 $2x^2-4x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot9=-14<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(3) $x^2+6x+1=2x-3$, 즉 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다 (접한다.).

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 만나지 않는다.

(3) 한 점에서 만난다(접한다.).

372

$x^2-4x-5=-2x+k$, 즉 $x^2-2x-5-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-5-k)=k+6$

(1) $\frac{D}{4}=k+6>0$ $\quad\therefore k>-6$

(2) $\frac{D}{4}=k+6=0$ $\quad\therefore k=-6$

(3) $\frac{D}{4}=k+6<0$ $\quad\therefore k<-6$

답 (1) $k>-6$ (2) $k=-6$ (3) $k<-6$

373

$x^2+2x-k=x-1$, 즉 $x^2+x-k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-k+1)=4k-3$

(1) $D=4k-3>0$

$\therefore k>\frac{3}{4}$

(2) $D=4k-3=0$

$\therefore k=\frac{3}{4}$

(3) $D=4k-3<0$

$\therefore k<\frac{3}{4}$

답 (1) $k>\frac{3}{4}$ (2) $k=\frac{3}{4}$ (3) $k<\frac{3}{4}$

374

(1) $y=x^2-6x+4=(x-3)^2-5$

따라서 $x=3$일 때 최솟값은 -5이고, 최댓값은 없다.

(2) $y=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

따라서 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{1}{4}$이고, 최솟값은 없다.

(3) $y=-\frac{1}{4}x^2+x+1=-\frac{1}{4}(x-2)^2+2$

따라서 $x=2$일 때 최댓값은 2이고, 최솟값은 없다.

답 (1) 최댓값 : 없다., 최솟값 : -5

(2) 최댓값 : $\frac{1}{4}$, 최솟값 : 없다.

(3) 최댓값 : 2, 최솟값 : 없다.

375

$f(x)=x^2-6x+10=(x-\boxed{3})^2+\boxed{1}$

이때, $f(-3)=\boxed{37}$, $f(2)=\boxed{2}$이므로

최댓값은 $\boxed{37}$, 최솟값은 $\boxed{2}$이다.

답 3, 1, 37, 2, 37, 2

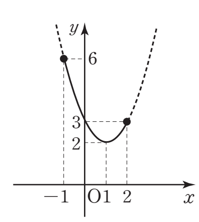
376

(1) $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

$-1\le x\le2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $f(-1)=6$, $f(1)=2$, $f(2)=3$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 2이다.

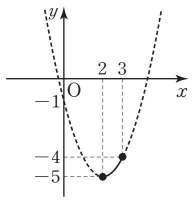


(2) $f(x)=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$

$2\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $f(2)=-5$, $f(3)=-4$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 -4, 최솟값은 -5이다.

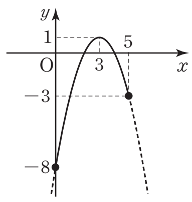


(3) $f(x)=-x^2+6x-8=-(x-3)^2+1$

$0\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $f(0)=-8$, $f(3)=1$, $f(5)=-3$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -8이다.



답 (1) 최댓값 : 6, 최솟값 : 2

(2) 최댓값 : -4, 최솟값 : -5

(3) 최댓값 : 1, 최솟값 : -8

377

$f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$

(1) 실수 전체에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값은 3이고, 최솟값은 없다.

(2) $-1\le x\le 2$에서 $f(-1)=-1$, $f(1)=3$, $f(2)=2$이므로 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

(3) $3\le x\le 5$에서 $f(3)=-1$, $f(5)=-13$이므로 $f(x)$의 최댓값은 -1, 최솟값은 -13이다.

답 (1) 최댓값 : 3, 최솟값 : 없다.

(2) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1

(3) 최댓값 : -1, 최솟값 : -13

유형 콕콕 본문 p.65~71

378 ③	**379** 7	**380** ④	**381** ③	**382** ②	**383** 16
384 ⑤	**385** ⑤	**386** ②	**387** 1	**388** ⑤	**389** ⑤
390 ②	**391** ③	**392** ②	**393** 1	**394** ④	**395** ①
396 10	**397** ②	**398** ④	**399** $\frac{4}{3}$	**400** ③	**401** ④
402 36	**403** ③	**404** ①	**405** ①	**406** 1	**407** ①
408 ③	**409** ③	**410** ③	**411** ④	**412** ②	
413 -4	**414** ③	**415** ⑤	**416** ④	**417** 5	**418** ②
419 20	**420** ③	**421** 2	**422** ②	**423** ③	**424** 12

378

$y=ax+b$의 그래프에서 $a>0$, $b<0$이므로

$y=bx-a$의 그래프는 기울기가 음수이고 y절편이 음수인 그래프이다.

따라서 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ③이다. 답 ③

379

일차함수 $y=(a-1)x+b+2$의 그래프의 기울기가 2이고 y절편이 6이므로

$a-1=2$에서 $a=3$

$b+2=6$에서 $b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$ 답 7

380

직선 $ax-by+c=0$에서 $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$

주어진 그래프는 기울기가 음수이고 y절편이 양수인 그래프이다.

$\frac{a}{b}<0$이므로 a, b의 부호는 다르다.

$\therefore ab<0$ …… ㉠

$\frac{c}{b}>0$이므로 b, c의 부호는 같다.

$\therefore bc>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a, c의 부호는 다르므로

$ac<0$

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

381

$f(x)=ax+b$라 하면 $a>0$이므로

$f(-2)=-2a+b=1$ …… ㉠

$f(4)=4a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{4}{3}$

$\therefore a+b=\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=\frac{3}{2}$ 답 ③

382

$f(x)=ax+b$라 하면 $a<0$이므로

$f(-1)=-a+b=4$ …… ㉠

$f(1)=a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=1$

$\therefore a+2b=-3+2\cdot 1=-1$ 답 ②

383

$f(x)=-2x+k$라 하면 $-2<0$이므로

$-1\le x\le 4$에서 최솟값은 $f(4)$이고 최댓값은 $f(-1)$이다.

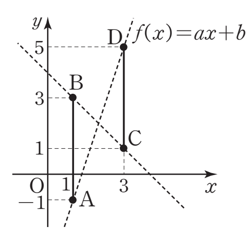
$f(4)=-2\cdot 4+k=-1$ $\therefore k=7$

$f(-1)=-2\cdot(-1)+7=9$ $\therefore M=9$

$\therefore k+M=7+9=16$ 답 16

384

$f(x)=ax+b$라 하면 두 선분 AB, CD를 동시에 지나야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, a는 $y=f(x)$의 그래프의 기울기이다.

(i) $\overline{AD}$의 기울기는 a의 최댓값이므로

$a=\frac{5-(-1)}{3-1}=3$

(ii) $\overline{BC}$의 기울기는 a의 최솟값이므로

$a=\frac{1-3}{3-1}=-1$

(i), (ii)에서 상수 a의 최댓값과 최솟값의 차는

$3-(-1)=4$ 답 ⑤

385

$y=-x^2+2kx-4k+2=-(x-k)^2+k^2-4k+2$

이 그래프의 꼭짓점 $(k,\ k^2-4k+2)$가 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$k^2-4k+2=k$

$\therefore\ k^2-5k+2=0$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 5이다.

답 ⑤

386

$y=x^2-2mx+m+2=(x-m)^2-m^2+m+2$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+2)$

이 꼭짓점이 x축 위에 있으므로 $-m^2+m+2=0$

즉, $m^2-m-2=0$에서

$(m+1)(m-2)=0$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=2$

그런데 $m>0$이므로 $m=2$

답 ②

387

$y=x^2+4ax+a^2-b=(x+2a)^2-3a^2-b$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2a,\ -3a^2-b)$

㉮

또한 $y=-x^2+2bx-b^2+a=-(x-b)^2+a$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(b,\ a)$

㉯

이때, 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점이 일치하므로

$-2a=b$ …… ㉠

$-3a^2-b=a$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $-3a^2+2a=a$

$3a^2-a=0,\ a(3a-1)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}\ (\because\ a\neq 0)$

㉠에 $a=\frac{1}{3}$을 대입하면 $b=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ a-b=\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=1$

㉰

단계	채점 요소	비율
㉮	이차함수 $y=x^2+4ax+a^2-b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표 구하기	40%
㉯	이차함수 $y=-x^2+2bx-b^2+a$의 그래프의 꼭짓점의 좌표 구하기	40%
㉰	두 꼭짓점이 일치함을 이용하여 $a-b$의 값 구하기	20%

답 1

388

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

① 아래로 볼록하므로 $a>0$

② 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ $\quad\therefore\ b<0$

③ y축과의 교점이 x축 아래쪽에 있으므로 $c<0$

④ $x=1$일 때, $y=a+b+c<0$

⑤ $x=-1$일 때, $y=a-b+c>0$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

389

$y=ax+b$의 그래프에서 기울기 a와 y절편 b의 부호는 각각

$a<0,\ b>0$이므로 $y=ax^2+b$의 그래프에서

(i) $a<0$이므로 위로 볼록하다.

(ii) x의 계수가 0이므로 축의 방정식은 $x=0$

즉, y축에 대하여 대칭이다.

(iii) $b>0$이므로 y축과의 교점이 x축 위쪽에 있다.

따라서 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

390

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때, (직선의 기울기)>0, (y절편)<0이므로

$-\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}<0$에서 $\frac{a}{b}<0,\ \frac{c}{b}>0$

$\therefore\ a>0,\ b<0,\ c<0$ 또는 $a<0,\ b>0,\ c>0$

그런데 $abc>0$이므로 $a>0,\ b<0,\ c<0$이다.

$y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

(i) $a>0$이므로 아래로 볼록하다.

(ii) $ab<0$이므로 대칭축이 y축의 오른쪽에 있다.

(iii) $c<0$이므로 y축과의 교점이 x축 아래쪽에 있다.

따라서 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

답 ②

391

꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 2)$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x-3)^2+2$

라 하면 이 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$3=a(2-3)^2+2$

$3=a+2$ $\quad\therefore\ a=1$

따라서 $y=(x-3)^2+2=x^2-6x+11$이므로

$a=1,\ b=-6,\ c=11$

$\therefore\ a+b+c=1+(-6)+11=6$

답 ③

392

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x-1)^2+2$

라 하면 이 그래프가 점 $(3,\ 10)$을 지나므로

$10=a(3-1)^2+2$

$10=4a+2$ $\quad\therefore\ a=2$ …… ㉠

$y=a(x-1)^2+2$에 ㉠을 대입하면

$y=2(x-1)^2+2$ …… ㉡

㉡에 $x=0$을 대입하면 $y=4$

따라서 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 4이다.

답 ②

393

이차항의 계수가 1이고 꼭짓점의 좌표가 $(k,\ -k+3)$이므로 이차함수의 식을

$y=(x-k)^2-k+3$

이라 하면 이 그래프가 점 $(-1,\ 6)$을 지나므로

$6=(-1-k)^2-k+3,\ k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0$ $\quad\therefore\ k=-2$ 또는 $k=1$

그런데 k는 양수이므로 $k=1$

따라서 $y=(x-1)^2+2=x^2-2x+3$이므로

$a=-2,\ b=3\qquad \therefore\ a+b=-2+3=1$ 답 1

394

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로
$y=a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)=a(x-1)^2-4a$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -4a)$이고, 이 꼭짓점이 직선 $x+y=5$ 위에 있으므로
$1-4a=5\qquad \therefore\ a=-1$
따라서 $y=-(x^2-2x-3)=-x^2+2x+3$이므로
$a=-1,\ b=2,\ c=3$
$\therefore\ a+b+c=(-1)+2+3=4$ 답 ④

395

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 한 점 $(1,\ 0)$에서 만나므로 꼭짓점은 x축 위에 있다.
즉, 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로 이차함수의 식을
$y=a(x-1)^2$ …… ㉠
이라 하면 y축과 만나는 점의 y좌표가 -4이므로
㉠에 $x=0,\ y=-4$를 대입하면 $a=-4$
㉠에 $a=-4$를 대입하면
$y=-4(x-1)^2=-4x^2+8x-4$
따라서 $a=-4,\ b=8,\ c=-4$이므로
$a-b-c=-4-8-(-4)=-8$ 답 ①

396

이차항의 계수가 -1이고, 이차함수의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로
$y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$
$\therefore\ a=2,\ b=3$
㉮

따라서 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 4)$
$\therefore\ m=1,\ n=4$
㉯

$\therefore\ a+b+m+n=2+3+1+4=10$
㉰

단계	채점 요소	비율
㉮	조건을 만족시키는 이차함수의 식을 구하여 a, b의 값 구하기	50%
㉯	이차함수의 식을 표준형으로 변형하여 꼭짓점의 좌표 $(m,\ n)$ 구하기	40%
㉰	$a+b+m+n$의 값 구하기	10%

답 10

397

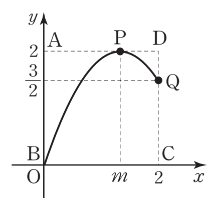
점 Q의 좌표를 $(m,\ 0)$ $(m\neq 0)$이라 하면 두 점 P, R의 좌표는 각각
$\mathrm{P}(m,\ m^2)$, $\mathrm{R}(m,\ am^2)$ $(a<0)$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=m^2$, $\overline{\mathrm{QR}}=-am^2$
이때, $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=1:3$이므로
$m^2:(-am^2)=1:3$
$-am^2=3m^2\qquad \therefore\ a=-3\ (\because\ m\neq 0)$
$\therefore\ a^2=(-3)^2=9$ 답 ②

398

두 점 Q, R의 x좌표를 각각 $m,\ n$ $(0<m<n)$이라 하면
$\mathrm{Q}(m,\ m^2)$, $\mathrm{R}(n,\ an^2)$
이때, 두 점 Q, R의 y좌표가 같으므로
$m^2=an^2$ …… ㉠
또한 $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=1:2$에서
$m:(n-m)=1:2,\ n-m=2m$
$\therefore\ n=3m$ …… ㉡
㉠에 ㉡을 대입하면 $m^2=a\cdot(3m)^2=9am^2$
$9a=1\qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{9}$ 답 ④

399

$\overline{\mathrm{AB}}$를 y축, $\overline{\mathrm{BC}}$를 x축, 점 B를 원점으로 하여 주어진 그림을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, $\overline{\mathrm{AP}}=m$이라 하면 이차함수의 꼭짓점의 좌표는 $(m,\ 2)$이므로 이차함수의 식은
$y=a(x-m)^2+2$ …… ㉠
이 그래프는 두 점 $\mathrm{B}(0,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(2,\ \dfrac{3}{2}\right)$을 지나므로 두 점을 각각 ㉠에 대입하면
$0=am^2+2$에서 $a=-\dfrac{2}{m^2}$ …… ㉡
$\dfrac{3}{2}=a(2-m)^2+2$ …… ㉢
㉢에 ㉡을 대입하면 $\dfrac{3}{2}=-\dfrac{2}{m^2}(2-m)^2+2$
$3m^2-16m+16=0,\ (3m-4)(m-4)=0$
$\therefore\ m=\dfrac{4}{3}$ 또는 $m=4$
그런데 $0<m<2$이므로 $m=\dfrac{4}{3}$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{3}$ 답 $\dfrac{4}{3}$

400

이차함수 $y=x^2-2x+k-1$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이때, 이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(k-1)>0,\ 2-k>0$
$\therefore\ k<2$ 답 ③

401

이차함수 $y=x^2-2ax-b^2+14$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax-b^2+14=0$이 허근을 가져야 한다.
이때, 이차방정식 $x^2-2ax-b^2+14=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(-b^2+14)<0$
$a^2+b^2-14<0\qquad \therefore\ a^2+b^2<14$ …… ㉠
㉠을 만족시키는 두 자연수 a, b를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면
$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 8이다. 답 ④

402

이차함수 $y=x^2+(a+1)x-a+2$의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2+(a+1)x-a+2=0$이 중근을 가져야 한다.

이때, 이차방정식 $x^2+(a+1)x-a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+1)^2-4(-a+2)=0$

$a^2+6a-7=0$, $(a+7)(a-1)=0$

$\therefore a=-7$ 또는 $a=1$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$q=-7+1=-6$

$\therefore q^2=(-6)^2=36$ 답 36

403

이차함수 $y=x^2-2x-a$의 그래프와 직선 $y=2x-3a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2-2x-a=2x-3a$, 즉 $x^2-4x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2a>0$

$4-2a>0$ $\quad\therefore a<2$ 답 ③

404

이차함수 $y=x^2-x-1$의 그래프와 직선 $y=mx-2$가 한 점에서 만나므로 방정식 $x^2-x-1=mx-2$, 즉 $x^2-(m+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m+1)\}^2-4\cdot1\cdot1=0$, $m^2+2m-3=0$

$(m+3)(m-1)=0$ $\quad\therefore m=-3$ 또는 $m=1$

따라서 모든 상수 m의 값의 합은

$-3+1=-2$ 답 ①

405

이차함수 $y=x^2-3x+k$의 그래프와 직선 $y=-x-1$이 만나지 않으므로 방정식 $x^2-3x+k=-x-1$, 즉 $x^2-2x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k+1)<0$, $-k<0$

$\therefore k>0$

$\therefore a=0$ 답 ①

406

이차함수 $y=x^2+(k+1)x+1$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2+(k+1)x+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(k+1)^2-4\cdot1\cdot1=0$, $k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0$ $\quad\therefore k=-3$ 또는 $k=1$ …… ㉠

가

또한 이차함수 $y=x^2+(k+1)x+1$의 그래프가 직선 $y=kx+k$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2+(k+1)x+1=kx+k$, 즉 $x^2+x+1-k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot1\cdot(1-k)>0$

$1-4+4k>0$ $\quad\therefore k>\frac{3}{4}$ …… ㉡

나

㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값은 1이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	이차함수 $y=x^2+(k+1)x+1$의 그래프가 x축에 접하도록 하는 k의 값 구하기	40%
나	이차함수 $y=x^2+(k+1)x+1$의 그래프와 직선 $y=kx+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위 구하기	40%
다	가, 나를 동시에 만족시키는 k의 값 구하기	20%

답 1

407

이차함수 $y=-x^2+ax$의 그래프와 직선 $y=x+b$가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $-x^2+ax=x+b$의 실근과 같으므로 이차방정식 $x^2+(1-a)x+b=0$의 두 근은 -2, 3이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-(1-a)=-2+3$, $b=-2\cdot3$이므로

$a=2$, $b=-6$

$\therefore a+b=2+(-6)=-4$ 답 ①

408

이차함수 $y=-x^2+2x-5$의 그래프와 직선 $y=-x-3$의 교점의 x좌표는 방정식 $-x^2+2x-5=-x-3$, 즉 $x^2-3x+2=0$의 두 실근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 교점의 x좌표의 합은 3이다. 답 ③

409

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 x좌표는 $x^2=ax+b$, 즉 $x^2-ax-b=0$의 두 실근이다.

이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$

$-b=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore a+b=2+2=4$ 답 ③

410

이차함수 $y=-x^2+ax+b$가 $x=3$에서 최댓값 2를 가지므로

$y=-(x-3)^2+2=-x^2+6x-7$

따라서 $a=6$, $b=-7$이므로

$a+b=6+(-7)=-1$ 답 ③

411

이차함수 $y=ax^2+8x-a+3$이 $x=-2$에서 최솟값 b를 가지므로

$y=a(x+2)^2+b=ax^2+4ax+4a+b$에서

$8=4a$, $-a+3=4a+b$

따라서 $a=2$, $b=-7$이므로

$a-b=2-(-7)=9$ 답 ④

412

이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=-3$에서 최댓값 6을 가지므로

$y=a(x+3)^2+6$

이 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=a+6$ $\quad\therefore a=-6$

따라서 $y=-6(x+3)^2+6=-6x^2-36x-48$이므로

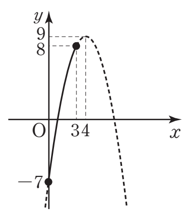
$b=-36$, $c=-48$

$\therefore a+b-c=-6+(-36)-(-48)=6$ 답 ②

413
$f(x)=x^2+2kx+3k=(x+k)^2-k^2+3k$
이차함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 최솟값 -4를 가지므로
$-k^2+3k=-4 \qquad \therefore k^2-3k-4=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 k의 값의 곱은 -4이다.
답 -4

414
$f(x)=2x^2-4x+k=2(x-1)^2-2+k$이므로
$1\le x\le 2$일 때, $x=1$에서 최솟값 $-2+k$, $x=2$에서 최댓값 k를 갖는다.
이때, $x=2$에서 최댓값이 2이므로 $k=2$
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로
$f(1)=-2+k=-2+2=0$
답 ③

415
$f(x)=-x^2+8x-7=-(x-4)^2+9$이므로
$0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지므로
$f(3)=-(3-4)^2+9=8$



답 ⑤

416
$f(x)=x^2+6x+a=(x+3)^2-9+a$이므로
$-2\le x\le 2$일 때, $x=-2$에서 최솟값 $-8+a$, $x=2$에서 최댓값 $16+a$를 갖는다.
이때, $x=-2$에서 최솟값이 -2이므로
$-8+a=-2 \qquad \therefore a=6$
따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로
$f(2)=16+a=16+6=22$
답 ④

417
$f(x)=x^2+2x-k=(x+1)^2-1-k$이므로
$x=-1$에서 최솟값 $-1-k$를 갖는다.
가

즉, $-1-k=1$에서 $k=-2$
나

$\therefore f(x)=(x+1)^2+1$
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 가지므로
$f(1)=(1+1)^2+1=5$
다

단계	채점 요소	비율
가	이차함수의 최솟값을 k에 대한 식으로 나타내기	40%
나	최솟값이 1임을 이용하여 k의 값 구하기	30%
다	주어진 범위에서 이차함수의 최댓값 구하기	30%

답 5

418
$x^2+2y^2-6x+4y+13=(x-3)^2+2(y+1)^2+2$
이때, x, y가 실수이므로
$(x-3)^2\ge 0$, $(y+1)^2\ge 0$
$\therefore x^2+2y^2-6x+4y+13\ge 2$
따라서 주어진 식의 최솟값은 2이다.
답 ②

419
$-x^2-y^2+4x+6y+2=-(x-2)^2-(y-3)^2+15$
이때, x, y는 실수이므로 $(x-2)^2\ge 0$, $(y-3)^2\ge 0$
$\therefore -x^2-y^2+4x+6y+2\le 15$
따라서 주어진 식은 $x=2$, $y=3$에서 최댓값 15를 가지므로
$a=2$, $b=3$, $c=15$
$\therefore a+b+c=2+3+15=20$
답 20

420
$x+y=4$에서 $y=4-x$이므로
$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2=2x^2-8x+16=2(x-2)^2+8$
이때, x는 실수이므로 $(x-2)^2\ge 0$
$\therefore x^2+y^2\ge 8$
따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다.
답 ③

421
$a-b=2$에서 $a=b+2$
$\therefore ab=(b+2)b=b^2+2b=(b+1)^2-1$
이때, $-1\le b\le 1$이므로 $b=-1$에서 최솟값 -1, $b=1$에서 최댓값 3을 갖는다.
따라서 ab의 최댓값과 최솟값의 합은 $3+(-1)=2$
답 2

422
직사각형의 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $10-x$이므로 직사각형의 대각선의 길이를 l이라 하면
$l^2=x^2+(10-x)^2=2x^2-20x+100=2(x-5)^2+50$
이때, $0<x<10$이므로 $x=5$일 때, l^2의 최솟값은 50이다.
따라서 직사각형의 대각선의 길이의 최솟값은 $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
답 ②

423
물받이의 높이를 x cm, 빗금친 단면의 넓이를 y cm^2라 하면
$y=x(8-2x)=-2x^2+8x=-2(x-2)^2+8$
이때, $0<x<4$이므로 $x=2$일 때, 최댓값은 8이다.
따라서 빗금친 단면의 넓이가 최대일 때, 물받이의 높이는 2 cm이다.
답 ③

424
점 B의 좌표를 $(a, 0)(a>0)$이라 하면 점 C의 좌표는
$C(a, -a^2+5)$
$\therefore \overline{AB}=2a$, $\overline{BC}=-a^2+5$
가

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$2(-a^2+2a+5)=-2a^2+4a+10=-2(a-1)^2+12$
나

이때, $0<a<\sqrt{5}$이므로 $a=1$일 때, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 12이다.
다

단계	채점 요소	비율
가	B$(a,\ 0)$ $(a>0)$이라 하고 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타내기	40%
나	직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하는 식 세우기	40%
다	직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값 구하기	20%

답 12

실력 콕콕

본문 p.72~73

425 ④	**426** ③	**427** ①	**428** ③	**429** 62	**430** ①
431 ③	**432** ①	**433** ③	**434** ②	**435** ①	**436** ④
437 12	**438** ②	**439** 800 cm^2		**440** 6초 후	

425

$y=x^2-2ax+2a^2+a-3$
$\quad=(x-a)^2+a^2+a-3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ a^2+a-3)$
이 꼭짓점이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$a^2+a-3=2a-1 \qquad \therefore a^2-a-2=0$
따라서 상수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다.

답 ④

426

$y=x^2+2(a-1)x+2a^2-2$
$\quad=\{x+(a-1)\}^2+a^2+2a-3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-a+1,\ a^2+2a-3)$
이 꼭짓점이 x축 위에 있으므로
$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$
$\therefore a=-3$ ($\because a<0$)

답 ③

427

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서
(i) 아래로 볼록하므로 $a>0$
(ii) 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0 \qquad \therefore b<0$
(iii) y축과의 교점이 x축 아래쪽에 있으므로 $c<0$
(i)~(iii)에서 $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 $c<0$이므로 위로 볼록하고, $bc>0$이므로 축이 y축의 왼쪽에 있다.
또한 $a>0$이므로 y축과의 교점이 x축 위쪽에 있다.
따라서 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ①이다.

답 ①

428

이차함수 $y=ax^2-2x+b$의 그래프가 두 점 $(0,\ 3)$, $(-3,\ 0)$을 지나므로
$x=0$, $y=3$을 대입하면 $b=3$
$x=-3$, $y=0$을 대입하면
$0=a\cdot(-3)^2-2\cdot(-3)+3$
$9a+9=0 \qquad \therefore a=-1$
$\therefore a+b=-1+3=2$

답 ③

429

이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 실근이다.
이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고, 한 근이 $3-\sqrt{7}$이므로 다른 한 근은 $3+\sqrt{7}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(3-\sqrt{7})+(3+\sqrt{7})=6$
$b=(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})=2$
$\therefore 10a+b=10\cdot6+2=62$

답 62

430

이차함수 $y=x^2+4x-k$의 그래프가 직선 $y=2x-3$과 만나지 않으므로 방정식 $x^2+4x-k=2x-3$, 즉 $x^2+2x-k+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=1^2-(-k+3)<0$
$1+k-3<0$
$\therefore k<2$
따라서 자연수 k는 1의 1개이다.

답 ①

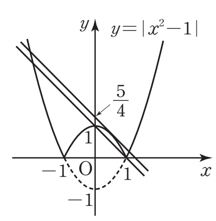
431

이차함수 $y=x^2-2x+k$의 그래프와 직선 $y=2x-k$가 한 점에서 만나므로 방정식 $x^2-2x+k=2x-k$, 즉 $x^2-4x+2k=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2k=0$
$4-2k=0$
$\therefore k=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$
$x^2-4x+2k=0$에 ㉠을 대입하면
$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$
$\therefore x=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$
$y=2x-2$에 ㉡을 대입하면 $y=2$
따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 $a=2$, $b=2$
$\therefore ab=2\cdot2=4$

답 ③

432

x에 대한 방정식 $|x^2-1|=-x+k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 두 함수 $y=|x^2-1|$, $y=-x+k$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
이때, 두 함수의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음 두 가지이다.
(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, $k=1$
(ii) 직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프와 접할 때,
$-x^2+1=-x+k$에서 $x^2-x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4(k-1)=0$
$5-4k=0$
$\therefore k=\dfrac{5}{4}$



(i), (ii)에서 정수 k는 1의 1개이다.

답 ①

433

이차함수 $y=2x^2+2ax+a$가 $x=-2$에서 최솟값 m을 가지므로

$y=2(x+2)^2+m=2x^2+8x+8+m$

따라서 $2a=8$, $a=8+m$이므로

$a=4$, $m=-4$

$\therefore a+m=4+(-4)=0$ 답 ③

434

함수 $f(x)$가 $f(-2)=f(8)$을 만족시키므로

$f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{-2+8}{2}$, 즉 $x=3$에 대하여 대칭이다.

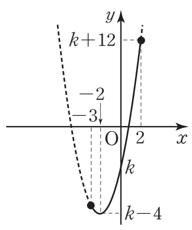
따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값을 갖는다.

$\therefore k=3$ 답 ②

435

$f(x)=x^2+4x+k=(x+2)^2+k-4$이므로

$-3\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-2$에서 최솟값 $k-4$, $x=2$에서 최댓값 $k+12$를 갖고, 최댓값과 최솟값의 합이 0이므로

$(k+12)+(k-4)=0$, $2k+8=0$

$\therefore k=-4$ 답 ①

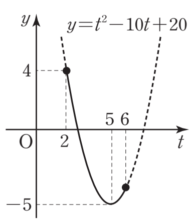
436

$x^2-2x+3=t$로 치환하면

$y=t^2-10t+20=(t-5)^2-5$

$1\le x\le 3$일 때, $2\le t\le 6$이므로

함수 $y=t^2-10t+20$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=5$일 때 최솟값은 -5이고, $t=2$일 때 최댓값은 4이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $4+(-5)=-1$ 답 ④

437

$f(x)=2x^2-4ax+a^2-6a+3$

$\quad=2(x-a)^2-a^2-6a+3$

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $-a^2-6a+3$을 가지므로

$g(a)=-a^2-6a+3=-(a+3)^2+12$

따라서 함수 $g(a)$는 $a=-3$에서 최댓값 12를 갖는다. 답 12

438

$x+y=3$에서 $y=3-x$

$\therefore x^2+2y^2=x^2+2(3-x)^2=3x^2-12x+18=3(x-2)^2+6$

이때, $0\le x\le 3$이므로

$x=2$에서 최솟값 6, $x=0$에서 최댓값 18을 갖는다.

따라서 x^2+2y^2의 최댓값과 최솟값의 합은 $18+6=24$ 답 ②

439

직사각형 DEFG에서 $\overline{DE}=\overline{GF}=x$ cm라 하면

$\overline{BE}=\overline{DE}$이고 $\overline{CF}=\overline{GF}$이므로 $\overline{BE}=\overline{CF}=x$ cm

$\therefore \overline{EF}=(80-2x)$ cm

가

이때, 직사각형 DEFG의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=x(80-2x)$

$\quad=-2x^2+80x$

$\quad=-2(x-20)^2+800$

나

이므로 $x=20$일 때 최댓값 800을 갖는다.

따라서 직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값은 800 cm^{2}이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	$\overline{DE}$, $\overline{EF}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타내기	30%
나	직사각형 DEFG의 넓이 구하는 식 세우기	40%
다	직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값 구하기	30%

답 800 cm^2

440

x초 후에 $\overline{AP}=2x$, $\overline{BQ}=x$, $\overline{PB}=24-2x$이므로

가

삼각형 PBQ의 넓이를 y라 하면

$y=\dfrac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{BQ}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times(24-2x)\times x$

$\quad=-x^2+12x$

$\quad=-(x-6)^2+36$

나

이때, $0<x<12$이므로 $x=6$일 때 최댓값 36을 갖는다.

따라서 6초 후에 삼각형 PBQ의 넓이는 최대가 된다.

다

단계	채점 요소	비율
가	$\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{PB}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타내기	30%
나	삼각형 PBQ의 넓이 구하는 식 세우기	40%
다	삼각형 PBQ의 넓이가 최대가 되는 것은 출발한 지 몇 초 후인지 구하기	30%

답 6초 후

Ⅱ. 방정식과 부등식

07 삼차방정식과 사차방정식

개념 콕콕 본문 p.75

441

(1) $x^3-8=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(2) $x^3+2x^2-15x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2+2x-15)=0,\ x(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

(3) $x^3+3x^2-x-3=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x+3)-(x+3)=0,\ (x+3)(x^2-1)=0$

$(x+3)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 (1) $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(2) $x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

(3) $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

442

(1) $f(x)=3x^3-x^2-8x-4$로 놓으면

$f(-1)=-3-1+8-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -1 & -8 & -4 \\ & & -3 & 4 & 4 \\ \hline & 3 & -4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(3x^2-4x-4)$

$=(x+1)(3x+2)(x-2)$

따라서 주어진 방정식은 $(x+1)(3x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+x+1$로 놓으면

$f(1)=1-3+1+1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-2x-1)$

따라서 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

(3) $f(x)=x^3+x^2-3x-6$으로 놓으면

$f(2)=8+4-6-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ & & 2 & 6 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+3x+3)$

따라서 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+3x+3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

(2) $x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

(3) $x=2$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$

443

(1) $x^4-16=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x^2+4)(x^2-4)=0,\ (x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm2i$

(2) $x^4+27x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3+27)=0,\ x(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $f(x)=x^4-7x^3+17x^2-17x+6$으로 놓으면

$f(1)=1-7+17-17+6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -7 & 17 & -17 & 6 \\ & & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 11 & -6 & \boxed{0} \\ & & 1 & -5 & 6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$

따라서 주어진 방정식은 $(x-1)^2(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

답 (1) $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm2i$

(2) $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

444

(1) $x^2=X$라 하면 주어진 방정식은

$X^2-4X+4=0,\ (X-2)^2=0$

$\therefore X=2$

따라서 $x^2=2$이므로 $x=\pm\sqrt{2}$

(2) $x^2=X$라 하면 주어진 방정식은

$X^2-4X-5=0,\ (X+1)(X-5)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=5$

따라서 $x^2=-1$ 또는 $x^2=5$이므로

$x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$

(3) $x^2-4x=X$라 하면 주어진 방정식은

$X^2+X-12=0,\ (X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$, 즉 $x^2-4x=-4$에서

$(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

(ii) $X=3$, 즉 $x^2-4x=3$에서

$x^2-4x-3=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{7}$

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

답 (1) $x=\pm\sqrt{2}$

(2) $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$

(3) $x=2$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

445

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta+\gamma=1$
(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$
(3) $\alpha\beta\gamma=3$
(4) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=1^2-2\cdot3=-5$

답 (1) 1 (2) 3 (3) 3 (4) -5

446
x^3의 계수가 1이고 세 근이 -1, 3, 7인 삼차방정식은
$x^3-(-1+3+7)x^2+\{(-1)\cdot3+3\cdot7+7\cdot(-1)\}x-(-1)\cdot3\cdot7=0$
$\therefore x^3-9x^2+11x+21=0$ 답 $x^3-9x^2+11x+21=0$

447
계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{2}$이므로 $2-\sqrt{2}$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 -4, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-4(2+\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})(-4)=-14=-a$
$-4(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=-8=-b$
$\therefore a=14,\ b=8$ 답 $a=14,\ b=8$

448
계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 5, $1+i$, $1-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$5(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot5=12=a$
$5(1+i)(1-i)=10=-b$
$\therefore a=12,\ b=-10$ 답 $a=12,\ b=-10$

449
$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$
(1) ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로
$\omega^2+\omega+1=0$
(2), (3) ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$
(4) $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로
$\omega^{14}+\omega^{10}+1=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1$
$=\omega^2+\omega+1=0$

답 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0

유형 콕콕 본문 p.76~79

450 ⑤	451 ⑤	452 2	453 ②	454 ④	455 3
456 ①	457 10	458 ①			
459 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$				460 ④	461 ④
462 1	463 ④	464 ③	465 -5	466 ⑤	467 ②
468 $x^3-6x-4=0$	469 ④	470 ②	471 11	472 ③	
473 $-\frac{5}{2}$	474 ⑤	475 0			

450
$f(x)=x^3-x^2-3x-1$로 놓으면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ & & -1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+1)(x^2-2x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$
$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=1+(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)=1+2\sqrt{2}$ 답 ⑤

451
$f(x)=x^3-8x^2+17x-10$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -8 & 17 & -10 \\ & & 1 & -7 & 10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2-7x+10)=0$, $(x-1)(x-2)(x-5)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$
따라서 가장 큰 근 $\alpha=5$, 가장 작은 근 $\beta=1$이므로
$\alpha+\beta=5+1=6$ 답 ⑤

452
$f(x)=x^3-x^2-x-2$로 놓으면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2+x+1)=0$
따라서 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-1)^3-3\cdot1\cdot(-1)=2$ 답 2

453
$f(x)=2x^4+x^3-6x^2+x+2$로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 1 & -6 & 1 & 2 \\ & & 2 & 3 & -3 & -2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & -3 & -2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 5 & 2 & \\ \hline & 2 & 5 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x-1)^2(2x^2+5x+2)=0$, $(x-1)^2(x+2)(2x+1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$
따라서 가장 큰 근 $\alpha=1$, 가장 작은 근 $\beta=-2$이므로
$\alpha\beta=1\cdot(-2)=-2$ 답 ②

454
$f(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$으로 놓으면 $f(1)=0$, $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 3 & 3 & -1 & -6 \\
 & & 1 & 4 & 7 & 6 \\
\hline
-2 & 1 & 4 & 7 & 6 & \boxed{0} \\
 & & -2 & -4 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x-1)(x+2)(x^2+2x+3)=0$

따라서 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2)^2-2\cdot3=-2$

답 ④

455

$f(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$으로 놓으면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\
 & & -1 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
2 & 1 & 0 & -1 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & 4 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

따라서 주어진 방정식의 두 실근 α, β는 -1, 2이므로

$\alpha^2+\beta^2=1+4=5$

또한 주어진 방정식의 두 허근 γ, δ는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-2$, $\gamma\delta=3$

$\therefore \gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$=(-2)^2-2\cdot3=-2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=5+(-2)=3$

답 3

456

$x^2+1=X$라 하면 주어진 방정식은 $X^2-6X+8=0$

$(X-2)(X-4)=0$ $\quad\therefore X=2$ 또는 $X=4$

(i) $X=2$, 즉 $x^2+1=2$에서

$x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

(ii) $X=4$, 즉 $x^2+1=4$에서

$x^2=3$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 양수인 근의 합은 $1+\sqrt{3}$이다.

답 ①

457

$x(x-2)(x-4)(x-6)-20=0$에서

$(x^2-6x)(x^2-6x+8)-20=0$

$x^2-6x=X$라 하면 주어진 방정식은

$X(X+8)-20=0$, $X^2+8X-20=0$

$(X+10)(X-2)=0$

$\therefore X=-10$ 또는 $X=2$

(i) $X=-10$, 즉 $x^2-6x=-10$에서

$x^2-6x+10=0$ $\quad\therefore x=3\pm i$

(ii) $X=2$, 즉 $x^2-6x=2$에서

$x^2-6x-2=0$ $\quad\therefore x=3\pm\sqrt{11}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 허근은 $3\pm i$이므로 모든 허근의 곱의 절댓값은

$|(3+i)(3-i)|=|9-(-1)|=10$

답 10

458

$x^2=X$라 하면 주어진 방정식은 $X^2+2X-35=0$

$(X+7)(X-5)=0$ $\quad\therefore X=-7$ 또는 $X=5$

(i) $X=-7$, 즉 $x^2=-7$에서 $x=\pm\sqrt{7}i$

(ii) $X=5$, 즉 $x^2=5$에서 $x=\pm\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $\pm\sqrt{5}$이므로 모든 실근의 곱은

$\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5})=-5$

답 ①

459

$x^4+x^2+1=0$에서 $(x^4+2x^2+1)-x^2=0$

$(x^2+1)^2-x^2=0$, $(x^2+1+x)(x^2+1-x)=0$

(i) $x^2+x+1=0$에서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $x^2-x+1=0$에서 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

460

삼차방정식 $x^3-x^2+ax-1=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1-1+a-1=0$ $\quad\therefore a=1$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-x^2+x-1=0$이므로

$x^2(x-1)+(x-1)=0$, $(x-1)(x^2+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\pm i$

$\therefore a+\alpha+\beta=1+i+(-i)=1$

답 ④

461

삼차방정식 $x^3+ax^2+x+6=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1+a+1+6=0$ $\quad\therefore a=-8$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-8x^2+x+6=0$이고 한 근이 1이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -8 & 1 & 6 \\
 & & 1 & -7 & -6 \\
\hline
 & 1 & -7 & -6 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x-1)(x^2-7x-6)=0$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-7x-6=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 나머지 두 근의 합은 7이다.

답 ④

462

사차방정식 $x^4+ax^2+4=0$의 한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$16+4a+4=0$ $\quad\therefore a=-5$

가

즉, 주어진 방정식은 $x^4-5x^2+4=0$이므로 $x^2=X$라 하면

$X^2-5X+4=0$, $(X-1)(X-4)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=4$

(i) $X=1$, 즉 $x^2=1$에서 $x=\pm1$

(ii) $X=4$, 즉 $x^2=4$에서 $x=\pm2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 나머지 세 근은 -2, -1, 1이다.

나

$\therefore\ a+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-5+(-2)^2+(-1)^2+1^2=1$

다

단계	채점 요소	비율
가	상수 a의 값 구하기	30%
나	나머지 세 근 α, β, γ 구하기	50%
다	$a+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값 구하기	20%

답 1

463

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=2^2-2\cdot(-7)=18$

답 ④

464

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=8$

$\therefore\ (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=8-4+(-2)-1=1$

답 ③

465

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=3$

이때, $\alpha+\beta+\gamma=-2$에서

$\alpha+\beta=-2-\gamma$, $\beta+\gamma=-2-\alpha$, $\gamma+\alpha=-2-\beta$

$\therefore\ (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)$

$=-8-4(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=-8-4\cdot(-2)-2\cdot1-3=-5$

답 -5

466

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$, $\alpha\beta\gamma=7$

이때, 구하는 삼차방정식의 세 근이 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$이므로

$-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=-3$

$(-\alpha)(-\beta)+(-\beta)(-\gamma)+(-\gamma)(-\alpha)=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$

$(-\alpha)(-\beta)(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-7$

따라서 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+3x^2+5x+7=0$

답 ⑤

467

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-a$

삼차방정식 $x^3+bx^2+cx+12=0$의 세 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3$

$=3+3=6=-b$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=-5+2\cdot3+3=4=c$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-a+(-5)+3+1$

$=-a-1=-12$

따라서 $a=11$, $b=-6$, $c=4$이므로

$a+b+c=11+(-6)+4=9$

답 ②

468

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6$, $\alpha\beta\gamma=-4$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$이고

$\alpha+\beta+\gamma=0$에서 $\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$

이므로

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=(-\gamma)(-\alpha)+(-\alpha)(-\beta)+(-\beta)(-\gamma)$

$=\gamma\alpha+\alpha\beta+\beta\gamma=-6$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)(-\alpha)(-\beta)=-\alpha\beta\gamma=4$

따라서 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-6x-4=0$

답 $x^3-6x-4=0$

469

계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 $1+\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})+\alpha=-a$ …… ㉠

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\alpha+\alpha(1-\sqrt{2})=b$ …… ㉡

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\alpha=-2$ $\quad\therefore\ \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $a=-4$, $b=3$

$\therefore\ a^2+b^2=16+9=25$

답 ④

470

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=0$ $\quad\therefore\ \alpha=-2$

따라서 $(1+i)(1-i)\cdot(-2)=a$이므로 $a=-4$

다른 풀이

$x=1+i$를 대입하여 복소수가 서로 같을 조건을 이용해서 풀어도 된다.

답 ②

471

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $2-i$이므로 $2+i$도 근이다.

가

나머지 한 실근이 α이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)+\alpha=-a$ …… ㉠

$(2-i)(2+i)+(2+i)\alpha+\alpha(2-i)=9$ $\quad\therefore\ \alpha=1$

$(2-i)(2+i)\alpha=-b$ …… ㉡

$\alpha=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $a=-5$, $b=-5$

나

$\therefore |\alpha|+|a|+|b|=1+5+5=11$ ······ 다

단계	채점 요소	비율
가	$2+i$도 주어진 방정식의 근임을 알기	30%
나	근과 계수의 관계를 이용하여 α, a, b의 값 구하기	50%
다	$\lvert\alpha\rvert+\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$의 값 구하기	20%

답 11

472

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때, 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

② $(1+\omega)(1+\omega^2)=1+\omega+\omega^2+\omega^3=0+1=1$ (참)

③ $\omega^5+\omega^3+\omega+1=\omega^3\cdot\omega^2+1+\omega+1$

$=\omega^2+\omega+1+1=0+1=1$ (거짓)

④ $\omega^{46}+\omega^{44}=(\omega^3)^{15}\cdot\omega+(\omega^3)^{14}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$ (참)

⑤ $\omega^{49}+\dfrac{1}{\omega^{49}}=(\omega^3)^{16}\cdot\omega+\dfrac{1}{(\omega^3)^{16}\cdot\omega}$

$=\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

473

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때, 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \dfrac{\omega+1}{2\omega^2}+\dfrac{2\omega^2}{\omega+1}=\dfrac{-\omega^2}{2\omega^2}+\dfrac{2\omega^2}{-\omega^2}$

$=-\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{5}{2}$

답 $-\dfrac{5}{2}$

474

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때, 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

② $(1-\omega)(1+\omega^2)=1-\omega+\omega^2-\omega^3=0-(-1)=1$ (참)

③ $\omega^5+\omega^3+\omega+1=\omega^3\cdot\omega^2+(-1)+\omega+1$

$=-\omega^2+\omega=1$ (참)

④ $\omega^{49}+\omega^{47}=(\omega^3)^{16}\cdot\omega+(\omega^3)^{15}\cdot\omega^2=\omega-\omega^2=1$ (참)

⑤ $\omega^{50}+\dfrac{1}{\omega^{50}}=(\omega^3)^{16}\cdot\omega^2+\dfrac{1}{(\omega^3)^{16}\cdot\omega^2}$

$=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}$

$=\dfrac{-\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$ (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

475

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때, 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^5-\omega^4+\omega^3-\omega^2+\omega-1$

$=\omega^3\cdot\omega^2-\omega^3\cdot\omega+(-1)-\omega^2+\omega-1$

$=-\omega^2+\omega-1-(\omega^2-\omega+1)$

$=-2(\omega^2-\omega+1)=0$

답 0

실력 콕콕

본문 p.80~81

476 ⑤	477 9	478 ④	479 ①	480 ④	481 15
482 5	483 ③	484 ②	485 ⑤	486 26	487 ③
488 ④	489 ①	490 32	491 1		

476

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2-x-6)=0$, $(x-1)(x+2)(x-3)=0$

따라서 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$이므로

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=2+1+3=6$

답 ⑤

477

삼차방정식 $x^3-4x^2+kx+2=0$의 한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$8-16+2k+2=0$, $2k=6$ $\therefore k=3$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-4x^2+3x+2=0$이고 한 근이 2이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ & & 2 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2-2x-1)=0$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근 α, β는 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot(-1)=6$

$\therefore k+\alpha^2+\beta^2=3+6=9$

답 9

478

$f(x)=x^4-3x^3+x^2+4$로 놓으면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & -2 & -4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x-2)^2(x^2+x+1)=0$

따라서 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-1)^3-3\cdot1\cdot(-1)=2$

답 ④

479

$x^2+3x=X$라 하면 주어진 방정식은 $X^2-2X-8=0$

$(X+2)(X-4)=0$ $\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$, 즉 $x^2+3x=-2$에서

$x^2+3x+2=0$, $(x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=4$, 즉 $x^2+3x=4$에서

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 음의 실근의 곱은

$(-2)\cdot(-1)\cdot(-4)=-8$ 답 ①

480

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=1$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{(-5)^2-2\cdot1\cdot(-3)}{1}=31$$
답 ④

481

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a$, $\alpha\beta\gamma=5$

이때, $\alpha+\beta+\gamma=2$에서 $\beta+\gamma=2-\alpha$, $\gamma+\alpha=2-\beta$, $\alpha+\beta=2-\gamma$이므로

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{2-\alpha}{\alpha}+\frac{2-\beta}{\beta}+\frac{2-\gamma}{\gamma}$$
$$=\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-3=3$$

즉, $2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=6$이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{a}{5}=3$$

$\therefore a=15$ 답 15

482

$f(1)=f(2)=f(3)=1$에서

$f(1)-1=f(2)-1=f(3)-1=0$이므로 삼차방정식 $f(x)-1=0$의 세 실근이 1, 2, 3이다.

세 수 1, 2, 3을 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+3)x^2+(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1)x-1\cdot2\cdot3=0$

$\therefore x^3-6x^2+11x-6=0$

즉, $f(x)-1=x^3-6x^2+11x-6$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+11x-5$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 5이다. 답 5

483

직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 a, b, c라 하면 a, b, c는 방정식 $x^3-4x^2+3x+k=0$의 근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b+c=4$, $ab+bc+ca=3$, $abc=-k$

따라서 주어진 직육면체의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$$
$$=\sqrt{4^2-2\cdot3}=\sqrt{10}$$
답 ③

484

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=-1$

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2=-a$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2=b$$
$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1=-c$$

따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=1$이므로

$abc=(-2)\cdot2\cdot1=-4$ 답 ②

485

계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 $1+\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})+\alpha=a$ …… ㉠

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\alpha+\alpha(1-\sqrt{2})=b$ …… ㉡

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\alpha=-3$ $\therefore \alpha=3$

$\alpha=3$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $a=5$, $b=5$

$\therefore a+b=5+5=10$ 답 ⑤

486

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $3-2i$이므로 $3+2i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3-2i)+(3+2i)+\alpha=4$ $\therefore \alpha=-2$

주어진 삼차방정식의 세 근이 $3-2i$, $3+2i$, -2이므로

$a=(3-2i)(3+2i)+(3+2i)(-2)+(-2)(3-2i)=1$

$-b=(3-2i)(3+2i)(-2)=-26$

따라서 $a=1$, $b=26$이므로

$ab=1\cdot26=26$ 답 26

487

계수가 유리수인 사차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로 $1-\sqrt{2}$도 근이고, $1+i$가 근이므로 $1-i$도 근이다.

또한 x^4의 계수가 1이므로 주어진 사차방정식은

$(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x-1-i)(x-1+i)=0$

$(x^2-2x-1)(x^2-2x+2)=0$

$x^2-2x=X$라 하면 $(X-1)(X+2)=0$이므로 $X^2+X-2=0$

$(x^2-2x)^2+(x^2-2x)-2=0$, $x^4-4x^3+4x^2+x^2-2x-2=0$

$\therefore x^4-4x^3+5x^2-2x-2=0$

따라서 $a=5$, $b=-2$이므로

$a+b=5+(-2)=3$ 답 ③

488

$f(x)=x^3-2x^2+(k-3)x-3k$로 놓으면 $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -2 & k-3 & -3k \\ & & 3 & 3 & 3k \\ \hline & 1 & 1 & k & 0 \end{array}$$

$(x-3)(x^2+x+k)=0$

이때, 주어진 삼차방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2+x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=1-4k\geq 0 \qquad \therefore k\leq\frac{1}{4}$

답 ④

489

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때, 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^7-\omega^6+\omega^5-\omega^4+\omega^3-\omega^2+\omega$

$=\omega^5(\omega^2-\omega+1)-\omega^2(\omega^2-\omega+1)+\omega$

$=\omega=a+bi$

따라서 $\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $\omega=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a^2+b^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

답 ①

490

사차방정식 $x^4-x^3+ax+b=0$의 두 근이 1, -2이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr|l}
1 & 1 & -1 & 0 & a & b \\
 & & 1 & 0 & 0 & a \\
\hline
-2 & 1 & 0 & 0 & a & a+b=0 \quad \cdots\cdots ㉠ \\
 & & -2 & 4 & -8 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 4 & a-8=0 & \quad \cdots\cdots ㉡
\end{array}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-8$

가

즉, 주어진 방정식은 $x^4-x^3+8x-8=0$이므로

$(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)=0$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근 α, β는 이차방정식

$x^2-2x+4=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

나

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot4\cdot2=-16$

$\therefore |a|+|b|+|\alpha^3+\beta^3|=8+8+16=32$

다

단계	채점 요소	비율
가	a, b의 값 구하기	40%
나	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	40%
다	$\|a\|+\|b\|+\|\alpha^3+\beta^3\|$의 값 구하기	20%

답 32

491

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 허근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

가

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$

즉, 두 허근 α, β는 삼차방정식 $x^3-1=0$의 근이므로

$\alpha^3=1$, $\beta^3=1$, $\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$

나

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{25}$

$=(1+\alpha+\alpha^2)+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{21}(1+\alpha+\alpha^2)+(\alpha^{24}+\alpha^{25})$

$=\alpha^{24}+\alpha^{25}=(\alpha^3)^8+(\alpha^3)^8\cdot\alpha$

$=1+\alpha$

같은 방법으로 $1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{25}=1+\beta$

다

$\therefore (1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{25})(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{25})$

$=(1+\alpha)(1+\beta)$

$=1+\alpha+\beta+\alpha\beta=1+(-1)+1=1$

라

단계	채점 요소	비율
가	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	20%
나	α^3, β^3, $\alpha^2+\alpha+1$, $\beta^2+\beta+1$의 값 구하기	30%
다	$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{25}$, $1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{25}$을 간단히 하기	30%
라	주어진 식의 값 구하기	20%

답 1

08 연립방정식

개념 콕콕

본문 p.83

492

(1) $\begin{cases} 2x-3y=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 3$을 하면 $-7x=-14$ $\quad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면 $6-y=3$ $\quad \therefore y=3$

$\therefore x=2,\ y=3$

(2) $\begin{cases} x=y+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(y+7)+3y=4,\ 5y=-10$ $\quad \therefore y=-2$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-2+7=5$

$\therefore x=5,\ y=-2$

답 (1) $x=2,\ y=3$ (2) $x=5,\ y=-2$

493

(1) $y=x+1$을 $x^2+y^2=13$에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=13,\ 2x^2+2x-12=0$

$x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

이것을 $y=x+1$에 대입하면

$x=-3$일 때, $y=-2$ 또는 $x=2$일 때, $y=3$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

(2) $x-y=2$에서 $y=x-2$ $\quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=20,\ 2x^2-4x-16=0$

$x^2-2x-8=0,\ (x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

이것을 ㉠에 대입하면

$x=-2$일 때, $y=-4$ 또는 $x=4$일 때, $y=2$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

494

(1) $(x-2y)(2x+y)=0$에서

$x=2y$ 또는 $y=-2x$

(ⅰ) $x=2y$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$(2y)^2+y^2=5,\ 5y^2=5$

$y^2=1$ $\quad \therefore y=\pm 1$

$x=2y$이므로

$x=\pm 2,\ y=\pm 1$ (복부호동순)

(ⅱ) $y=-2x$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(-2x)^2=5,\ 5x^2=5$

$x^2=1$ $\quad \therefore x=\pm 1$

$y=-2x$이므로

$x=\pm 1,\ y=\mp 2$ (복부호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $x^2+2xy-3y^2=0$에서 $(x-y)(x+3y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=-3y$

(ⅰ) $x=y$를 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$y^2+y^2=10,\ 2y^2=10$

$y^2=5$ $\quad \therefore y=\pm\sqrt{5}$

$x=y$이므로

$x=\pm\sqrt{5},\ y=\pm\sqrt{5}$ (복부호동순)

(ⅱ) $x=-3y$를 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$(-3y)^2+y^2=10,\ 10y^2=10$

$y^2=1$ $\quad \therefore y=\pm 1$

$x=-3y$이므로

$x=\pm 3,\ y=\mp 1$ (복부호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

495

(1) $x+y=2,\ xy=-3$이므로 $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-2t-3=0$의 두 근이다.

$(t+1)(t-3)=0$ $\quad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $x+y=-2,\ xy=-8$이므로 $x,\ y$는 이차방정식 $t^2+2t-8=0$의 두 근이다.

$(t+4)(t-2)=0$ $\quad \therefore t=-4$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

496

(1) $3x+2y=15$에서 $y=\dfrac{15-3x}{2}$

y가 자연수이므로 $\dfrac{15-3x}{2}\ge 1$ $\quad \therefore x\le\dfrac{13}{3}$

x가 자연수이므로 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$

x	1	2	3	4
y	6	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{3}{2}$

위의 표에서 구하는 자연수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(1,\ 6),\ (3,\ 3)$

(2) $(x-1)(y+1)=-1$에서 x, y는 정수이므로

(i) $x-1=-1$, $y+1=1$일 때, $x=0$, $y=0$

(ii) $x-1=1$, $y+1=-1$일 때, $x=2$, $y=-2$

(i), (ii)에서 구하는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(0, 0)$, $(2, -2)$

(3) $(x+2)(y+3)=9$에서 x, y는 정수이므로

(i) $x+2=-9$, $y+3=-1$일 때, $x=-11$, $y=-4$

(ii) $x+2=-3$, $y+3=-3$일 때, $x=-5$, $y=-6$

(iii) $x+2=-1$, $y+3=-9$일 때, $x=-3$, $y=-12$

(iv) $x+2=1$, $y+3=9$일 때, $x=-1$, $y=6$

(v) $x+2=3$, $y+3=3$일 때, $x=1$, $y=0$

(vi) $x+2=9$, $y+3=1$일 때, $x=7$, $y=-2$

(i)~(vi)에서 구하는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(-11, -4)$, $(-5, -6)$, $(-3, -12)$, $(-1, 6)$, $(1, 0)$, $(7, -2)$

답 (1) $(1, 6)$, $(3, 3)$
(2) $(0, 0)$, $(2, -2)$
(3) $(-11, -4)$, $(-5, -6)$, $(-3, -12)$, $(-1, 6)$, $(1, 0)$, $(7, -2)$

497

(1) 주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형하면

$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=0$

$(x-2)^2+(y+3)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로 $x-2=0$, $y+3=0$

$\therefore x=2$, $y=-3$

(2) 주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형하면

$(x^2+4x+4)+(y^2-8y+16)=0$

$(x+2)^2+(y-4)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로 $x+2=0$, $y-4=0$

$\therefore x=-2$, $y=4$

답 (1) $x=2$, $y=-3$ (2) $x=-2$, $y=4$

498

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 두 이차방정식의 공통근은 -1이므로 $x=-1$은 이차방정식 $x^2-kx+14=0$의 근이다. 즉,

$1+k+14=0$ $\quad\therefore k=-15$

답 -15

499

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a\alpha+3=0$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha^2+3\alpha+a=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $(a-3)\alpha+3-a=0$

$(a-3)(\alpha-1)=0$ $\quad\therefore a=3$ 또는 $\alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-4$

따라서 a의 값은 3 또는 -4이다.

답 3 또는 -4

유형 콕콕 본문 p.84~87

500 ①	501 ①	502 4	503 ③	504 ③	505 3
506 ④	507 ⑤	508 10	509 ①	510 ⑤	
511 0 또는 3		512 ⑤	513 ⑤		
514 $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$				515 ④	516 ④
517 -1	518 ①	519 ③	520 ④	521 ①	522 ⑤
523 -5					

500

(i) 주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{a}{4}=\frac{3}{a-1}\neq\frac{1}{1}$

$\frac{a}{4}=\frac{3}{a-1}$에서 $a(a-1)=12$

$a^2-a-12=0$, $(a+3)(a-4)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because a\neq4$)

(ii) 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으려면

$\frac{a}{4}=\frac{3}{a-1}=\frac{1}{1}$ $\quad\therefore a=4$

(i), (ii)에서 $m=-3$, $n=4$이므로

$m+n=-3+4=1$

다른 풀이

$\begin{cases} ax+3y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+(a-1)y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$\times a-$㉠$\times4$를 하면 $(a^2-a-12)y=a-4$

$(a+3)(a-4)y=a-4$

(i) $a=-3$일 때, $0\cdot y=-7$이므로 주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않는다.

(ii) $a=4$일 때, $0\cdot y=0$이므로 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많다.

(i), (ii)에서 $m=-3$, $n=4$이므로

$m+n=-3+4=1$

답 ①

501

주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{a}{6}=\frac{1}{a+1}\neq\frac{4}{12}$

$\frac{a}{6}=\frac{1}{a+1}$에서 $a(a+1)=6$

$a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because a\neq2$)

다른 풀이

$\begin{cases} ax+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x+(a+1)y=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times(a+1)-$㉡을 하면 $(a^2+a-6)x=4a-8$

$(a+3)(a-2)x=4(a-2)$

$a=-3$일 때, $0\cdot x=-20$이므로 주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않는다.

답 ①

502

주어진 두 연립방정식의 해가 서로 같으므로 두 연립방정식

$\begin{cases} x+y=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$, $\begin{cases} x+my=1 \\ nx+2y=-8 \end{cases}$

의 해도 서로 같다.

㉠+㉡을 하면 $2x=2$ $\therefore x=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $y=-3$

가

따라서 연립방정식 $\begin{cases} x+my=1 \\ nx+2y=-8 \end{cases}$의 해가 $x=1$, $y=-3$이므로

$1-3m=1$, $n-6=-8$

$\therefore m=0$, $n=-2$

나

$\therefore m^2+n^2=0^2+(-2)^2=4$

다

단계	채점 요소	비율
가	두 연립방정식의 해가 연립방정식 $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=4 \end{cases}$의 해와 같음을 알고, 이 방정식의 해 구하기	50%
나	m, n의 값 구하기	40%
다	m^2+n^2의 값 구하기	10%

답 4

503

$x-y=2$에서 $y=x-2$ ······ ㉠

㉠을 $x^2+4xy+y^2=22$에 대입하면

$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=22$, $6x^2-12x-18=0$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$x=-1$일 때, $y=-3$ 또는 $x=3$일 때, $y=1$

$\therefore \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=1 \end{cases}$

$\therefore \alpha\beta=3$

답 ③

504

$x-y=3$에서 $x-3=y$ ······ ㉠

㉠을 $(x-3)^2+y^2=18$에 대입하면

$y^2+y^2=18$, $2y^2=18$, $y^2=9$ $\therefore y=\pm3$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=3$일 때, $x=6$ 또는 $y=-3$일 때, $x=0$

$\therefore \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=6 \\ \beta=3 \end{cases}$

그런데 $\alpha\beta\neq0$이므로 $\alpha=6$, $\beta=3$

$\therefore \alpha-\beta=6-3=3$

답 ③

505

$\begin{cases} ax+2y=7 \\ x+y=2 \end{cases}$의 해가 $\begin{cases} x+2y=b \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$을 만족시키므로

연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$의 해를 구하면

$x+y=2$에서 $y=-x+2$ ······ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(-x+2)^2=10$, $2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$x=-1$일 때, $y=3$ 또는 $x=3$일 때, $y=-1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

(i) $x=-1$, $y=3$일 때

$ax+2y=7$에서 $-a+6=7$ $\therefore a=-1$

$x+2y=b$에서 $-1+6=b$ $\therefore b=5$

(ii) $x=3$, $y=-1$일 때

$ax+2y=7$에서 $3a-2=7$ $\therefore a=3$

$x+2y=b$에서 $3-2=b$ $\therefore b=1$

(i), (ii)에서 a, b는 자연수이므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore ab=3\cdot1=3$

답 3

506

$(x-y)(2x-y)=0$에서 $y=x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=x$를 $x^2-2xy+2y^2=10$에 대입하면

$x^2-2x^2+2x^2=10$, $x^2=10$ $\therefore x=\pm\sqrt{10}$

$\therefore x=\pm\sqrt{10}$, $y=\pm\sqrt{10}$ (복부호동순)

(ii) $y=2x$를 $x^2-2xy+2y^2=10$에 대입하면

$x^2-2x\cdot2x+2(2x)^2=10$, $5x^2=10$

$x^2=2$ $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$, $y=\pm2\sqrt{2}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 xy의 값은 10 또는 4이므로 최댓값은 10이다.

답 ④

507

$y^2-2xy=0$에서 $y(y-2x)=0$

$\therefore y=0$ 또는 $y=2x$

(i) $y=0$을 $3x^2+y^2=28$에 대입하면

$3x^2=28$, $x^2=\frac{28}{3}$ $\therefore x=\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}$

그런데 x, y는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $y=2x$를 $3x^2+y^2=28$에 대입하면

$3x^2+(2x)^2=28$, $7x^2=28$

$x^2=4$ $\therefore x=\pm2$

$\therefore x=\pm2$, $y=\pm4$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 $xy=8$

답 ⑤

508

$x^2+2xy-3y^2=0$에서 $(x+3y)(x-y)=0$

$\therefore x=-3y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-3y$를 $x^2+xy=6$에 대입하면

$(-3y)^2+(-3y)y=6$, $6y^2=6$

$y^2=1$ $\therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm3$, $y=\mp1$ (복부호동순)

(ii) $x=y$를 $x^2+xy=6$에 대입하면

$2x^2=6$, $x^2=3$ $\therefore x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{3}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=\sqrt{3} \\ \beta=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-\sqrt{3} \\ \beta=-\sqrt{3} \end{cases}$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 값은 10 또는 6이므로 최댓값은 10이다.

답 10

509

$\begin{cases} x^2+y^2+2x=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $x-y=2$ $\quad\therefore y=x-2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x-2)^2+2x=4$, $x^2-x=0$

$x(x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=0$일 때, $y=-2$ 또는 $x=1$일 때, $y=-1$

$\therefore \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-1 \end{cases}$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 값은 4 또는 2이므로 최댓값은 4이다.

답 ①

510

$\begin{cases} 14x^2+3xy=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+xy=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $16x^2+4xy=0$

$x(4x+y)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $y=-4x$

(i) $x=0$을 ㉡에 대입하면 $0=-2$ (모순)

(ii) $y=-4x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+x(-4x)=-2$, $-2x^2=-2$

$x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

$\therefore x=\pm1$, $y=\mp4$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=4 \end{cases}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=17$

답 ⑤

511

$\begin{cases} 2x^2-3xy+3y^2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy+3y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $x^2-xy=0$

$x(x-y)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=y$

(i) $x=0$을 ㉡에 대입하면 $3y^2=6$

$y^2=2$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=0$, $y=\pm\sqrt{2}$

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-2y^2+3y^2=6$, $2y^2=6$

$y^2=3$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{3}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=\sqrt{3} \\ \beta=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-\sqrt{3} \\ \beta=-\sqrt{3} \end{cases}$

따라서 $\alpha\beta$의 값은 0 또는 3이다.

답 0 또는 3

512

$x+y=2$, $xy=-15$이므로 x, y는 이차방정식 $t^2-2t-15=0$의 두 근이다.

$(t+3)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=-3$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=-3 \end{cases}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=34$

답 ⑤

513

$\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 1-xy=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡에서 $x+y=2$, $xy=-3$이므로 x, y는 이차방정식 $t^2-2t-3=0$의 두 근이다.

$(t+1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 $x-y$의 값은 −4 또는 4이므로 최댓값은 4이다.

답 ⑤

514

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b$

이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} a^2-2b+a=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ a^2-b=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $b=a^2-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a^2-2(a^2-1)+a=2$, $a^2-a=0$

$a(a-1)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$a=0$일 때, $b=-1$ 또는 $a=1$일 때, $b=0$

$\therefore \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

(i) $a=0$, $b=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore x=-1$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=-1$

(ii) $a=1$, $b=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore x=0$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=0$

(i), (ii)에서 구하는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$

답 $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$

515

$xy-x-3y+1=0$에서

$x(y-1)-3(y-1)-3+1=0$, $(x-3)(y-1)=2$

이때, x, y는 정수이므로

(i) $x-3=-2$, $y-1=-1$일 때, $x=1$, $y=0$

(ii) $x-3=-1$, $y-1=-2$일 때, $x=2$, $y=-1$

(iii) $x-3=1$, $y-1=2$일 때, $x=4$, $y=3$

(iv) $x-3=2$, $y-1=1$일 때, $x=5$, $y=2$

(i)~(iv)에서 구하는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 0)$, $(2, -1)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$의 4개이다.

답 ④

516

이차방정식 $x^2-(m-5)x+m+2=0$의 두 근이 α, β $(\alpha<\beta)$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m-5$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=m+2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠에서 $\alpha\beta-\alpha-\beta=7$

$(\alpha-1)(\beta-1)=8$

이때, α, β는 자연수이고 $\alpha<\beta$이므로

(i) $\alpha-1=1$, $\beta-1=8$일 때, $\alpha=2$, $\beta=9$

이것을 ㉠에 대입하면 $11=m-5$ $\quad\therefore m=16$

(ii) $\alpha-1=2$, $\beta-1=4$일 때, $\alpha=3$, $\beta=5$

이것을 ㉠에 대입하면 $8=m-5$ $\quad\therefore m=13$

(i), (ii)에서 구하는 모든 정수 m의 값의 합은

$16+13=29$

답 ④

517

이차방정식 $x^2-2mx+2m^2-2=0$의 두 근이 정수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^2-(2m^2-2)\ge0$, $-m^2+2\ge0$

$m^2-2\le0$, $(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})\le0$

$\therefore -\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$

이때, m은 정수이므로 $m=-1, 0, 1$

(i) $m=-1$일 때, $x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

(ii) $m=0$일 때, $x^2-2=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$ (x가 정수가 아니므로 모순)

(iii) $m=1$일 때, $x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(i)~(iii)에서 구하는 모든 정수 m의 값의 곱은

$-1\cdot1=-1$

답 -1

518

주어진 방정식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(-y+1)x+(2y^2-4y+2)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때, x가 실수이므로 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-y+1)^2-(2y^2-4y+2)\ge0$

$y^2-2y+1-2y^2+4y-2\ge0$

$-y^2+2y-1\ge0$, $(y-1)^2\le0$ $\quad\therefore y=1$

$y=1$을 ㉠에 대입하면 $x^2=0$ $\quad\therefore x=0$

$\therefore x+y=0+1=1$

답 ①

519

$(x^2+xy+y^2-7)^2+(x+y+1)^2=0$에서 x, y가 실수이므로

$\begin{cases} x^2+xy+y^2-7=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-x-1$이므로 ㉠에 대입하면

$x^2+x(-x-1)+(-x-1)^2-7=0$

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

이것을 ㉡에 대입하면

$x=-3$일 때, $y=2$ 또는 $x=2$일 때, $y=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

$\therefore x^2+y^2=13$

답 ③

520

주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형하면

$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=0$

이때, x, y가 실수이므로 $x+2=0$, $y-3=0$

따라서 $x=-2$, $y=3$이므로

$x-y=-2-3=-5$

답 ④

521

두 이차방정식의 공통근이 α이므로

$\begin{cases} \alpha^2+m\alpha+6=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+6\alpha+m=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $(m-6)\alpha+6-m=0$

$(m-6)(\alpha-1)=0$ $\quad\therefore m=6$ 또는 $\alpha=1$

(i) $m=6$일 때, 두 이차방정식은 $x^2+6x+6=0$으로 같게 되므로 공통근이 두 개가 되어 공통근이 한 개라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$1+m+6=0$ $\quad\therefore m=-7$

(i), (ii)에서 $m+\alpha=-7+1=-6$

답 ①

522

$x=-2$는 두 이차방정식 $x^2+ax+2=0$, $2x^2+x+b=0$의 공통근이므로

$4-2a+2=0$ $\quad\therefore a=3$

$8-2+b=0$ $\quad\therefore b=-6$

$\therefore a^2+b^2=3^2+(-6)^2=45$

답 ⑤

523

$x^2+5x+4=0$에서 $(x+4)(x+1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-1$

가

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$로 놓으면

$f(1)=1-(a+2)+2a+1-a=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -a-2 & 2a+1 & -a \\ & & 1 & -a-1 & a \\ \hline & 1 & -a-1 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)\{x^2-(a+1)x+a\}$

$=(x-1)(x-a)(x-1)$

$=(x-1)^2(x-a)$

즉, 방정식 $f(x)=0$의 근은 $x=1$ 또는 $x=a$이므로 주어진 두 방정식이 공통근을 가지려면

$a=-4$ 또는 $a=-1$

나

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$-4+(-1)=-5$

다

단계	채점 요소	비율
가	방정식 $x^2+5x+4=0$의 근 구하기	40%
나	방정식 $x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a=0$의 근 구하기	50%
다	모든 상수 a의 값의 합 구하기	10%

답 -5

실력 콕콕 본문 p.88~89

524 ①	525 ②	526 ②	527 ⑤	528 25	529 ①
530 ①	531 ②	532 41	533 ⑤	534 ⑤	535 ①
536 ④	537 ②	538 1, 13	539 $\sqrt{13}$		

524

$\frac{1}{x}=X$, $\frac{1}{y}=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} 6X+2Y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3X-4Y=-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2+㉡을 하면 $15X=-5$ $\quad\therefore X=-\frac{1}{3}$

$X=-\frac{1}{3}$을 ㉡에 대입하면 $-4Y=-2$ $\quad\therefore Y=\frac{1}{2}$

$\therefore X=-\frac{1}{3},\ Y=\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$이므로 $x=-3$, $y=2$

$\therefore \alpha=-3,\ \beta=2$

$\therefore \alpha\beta=-3\cdot 2=-6$

답 ①

525

(i) $x\ge0$, $y\ge0$일 때, $\begin{cases} 3x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-3y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3+㉡을 하면 $10x=11$ $\quad\therefore x=\frac{11}{10}$

$x=\frac{11}{10}$을 ㉠에 대입하면 $y=-\frac{3}{10}$

$\therefore x=\frac{11}{10},\ y=-\frac{3}{10}$

이것은 $x\ge0$, $y\ge0$인 조건을 만족시키지 않으므로 해는 없다.

(ii) $x\ge0$, $y<0$일 때, $\begin{cases} 3x+y=3 & \cdots\cdots ㉢ \\ x-y=2 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢+㉣을 하면 $4x=5$ $\quad\therefore x=\frac{5}{4}$

$x=\frac{5}{4}$를 ㉣에 대입하면 $y=-\frac{3}{4}$

$\therefore x=\frac{5}{4},\ y=-\frac{3}{4}$

(iii) $x<0$, $y\ge0$일 때, $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉤ \\ x-3y=2 & \cdots\cdots ㉥ \end{cases}$

㉤−㉥을 하면 $4y=1$ $\quad\therefore y=\frac{1}{4}$

$y=\frac{1}{4}$을 ㉤에 대입하면 $x=\frac{11}{4}$

$\therefore x=\frac{11}{4},\ y=\frac{1}{4}$

이것은 $x<0$, $y\ge0$인 조건을 만족시키지 않으므로 해는 없다.

(iv) $x<0$, $y<0$일 때, $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉦ \\ x-y=2 & \cdots\cdots ㉧ \end{cases}$

㉦+㉧을 하면 $2x=5$ $\quad\therefore x=\frac{5}{2}$

$x=\frac{5}{2}$를 ㉦에 대입하면 $y=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{5}{2},\ y=\frac{1}{2}$

이것은 $x<0$, $y<0$인 조건을 만족시키지 않으므로 해는 없다.

(i)~(iv)에서 구하는 해는 $x=\frac{5}{4}$, $y=-\frac{3}{4}$이므로 $\alpha=\frac{5}{4}$, $\beta=-\frac{3}{4}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

답 ②

526

$\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2-4=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(x+y)=0$ $\quad\therefore y=x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+2x^2-4=0,\ x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2},\ y=\pm\sqrt{2}$ (복부호동순)

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2-4=0,\ x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\mp1$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

$\therefore \alpha=1,\ \beta=-1$ ($\because \alpha>0,\ \beta<0$)

$\therefore \alpha-\beta=1-(-1)=2$

답 ②

527

$\begin{cases} x^2-xy=2y^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-xy-2y^2=0$, $(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2+y^2=9,\ y^2=3$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\mp\sqrt{3}$ (복부호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$8y^2+y^2=9,\ y^2=1$ $\quad\therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm2,\ y=\pm1$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} \alpha=\sqrt{3} \\ \beta=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-\sqrt{3} \\ \beta=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=-1 \end{cases}$

따라서 $\alpha\beta$의 값은 -3 또는 2이므로 $\alpha\beta$의 서로 다른 모든 값의 합은

$-3+2=-1$

답 ⑤

528

$\begin{cases} 3x+4y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{a}{4}$이므로 ㉡에 대입하면

$x^2+\left(-\frac{3}{4}x+\frac{a}{4}\right)^2=a$

$x^2+\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{8}ax+\frac{a^2}{16}-a=0$

$25x^2-6ax+a^2-16a=0$ $\cdots\cdots ㉢$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3a)^2-25(a^2-16a)=0$

$-16a^2+25\cdot16a=0$, $a(a-25)=0$

$\therefore a=25$ ($\because a>0$) 답 25

529

$\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times7-$㉡$\times5$를 하면 $9x^2-3xy-2y^2=0$

$(3x+y)(3x-2y)=0$ $\quad\therefore y=-3x$ 또는 $y=\frac{3}{2}x$

(i) $y=-3x$를 ㉠에 대입하면

$2x^2-3x^2-9x^2=5$, $-10x^2=5$

$x^2=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $y=\mp\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ (복부호동순)

(ii) $y=\frac{3}{2}x$를 ㉠에 대입하면

$2x^2+\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}x^2=5$, $\frac{5}{4}x^2=5$

$x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm2$

따라서 $x=\pm2$, $y=\pm3$ (복부호동순)이므로 허근이 아니다.

(i), (ii)에서

$\begin{cases} \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \beta=-\frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \beta=\frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{9}{2}\right)=-5$ 답 ①

530

$\begin{cases} xy=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{4}$이므로 ㉠을 대입하면

$x+y=6$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢에서 x, y는 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore \alpha=2$, $\beta=4$ ($\because \alpha<\beta$)

$\therefore \frac{\beta}{\alpha}=\frac{4}{2}=2$ 답 ①

531

$x+y=2a+6$, $xy=a^2+2a$이므로 x, y는 이차방정식

$t^2-(2a+6)t+a^2+2a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

의 두 근이다.

주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-(a^2+2a)\geq0$

$a^2+6a+9-a^2-2a\geq0$, $4a+9\geq0$

$\therefore a\geq-\frac{9}{4}$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 -2이다. 답 ②

532

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$x^2y+xy^2=xy(x+y)=ab$

이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} a+b=29 & \cdots\cdots ㉠ \\ ab=180 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $b=29-a$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$a(29-a)=180$, $a^2-29a+180=0$

$(a-9)(a-20)=0$ $\quad\therefore a=9$ 또는 $a=20$

이것을 ㉢에 대입하면

$a=9$일 때, $b=20$ 또는 $a=20$일 때, $b=9$

(i) $a=9$, $b=20$, 즉 $x+y=9$, $xy=20$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-9t+20=0$의 두 근이므로

$(t-4)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=4$ 또는 $t=5$

$\therefore x=4$, $y=5$ 또는 $x=5$, $y=4$

(ii) $a=20$, $b=9$, 즉 $x+y=20$, $xy=9$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-20t+9=0$의 두 근이고 $t=10\pm\sqrt{91}$이므로 x, y가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x^2+y^2=41$ 답 41

533

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$에서 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{4}$

$4x+4y=xy$, $xy-4x-4y+16=16$

$x(y-4)-4(y-4)=16$ $\quad\therefore (x-4)(y-4)=16$

x, y가 자연수이므로 $x-4$, $y-4$는

$x-4\geq-3$, $y-4\geq-3$

인 정수이고 16의 약수이다.

따라서 $x-4$, $y-4$의 값은 다음과 같다.

$x-4$	1	2	4	8	16
$y-4$	16	8	4	2	1

위의 표에서 구하는 자연수 x, y의 값은

$\begin{cases} x=5 \\ y=20 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=12 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=20 \\ y=5 \end{cases}$

이므로 $x-y$의 최댓값은 15이다. 답 ⑤

534

$xy+2x=y+6$에서 $xy+2x-y-6=0$, $(x-1)(y+2)=4$이고 x, y는 정수이므로

(i) $x-1=-4$, $y+2=-1$일 때, $x=-3$, $y=-3$

(ii) $x-1=-2$, $y+2=-2$일 때, $x=-1$, $y=-4$

(iii) $x-1=-1$, $y+2=-4$일 때, $x=0$, $y=-6$

(iv) $x-1=1$, $y+2=4$일 때, $x=2$, $y=2$

(v) $x-1=2$, $y+2=2$일 때, $x=3$, $y=0$

(vi) $x-1=4$, $y+2=1$일 때, $x=5$, $y=-1$

(i)~(vi)에서 xy의 값은 9, 4, 0, -5이므로 xy의 최댓값은 9이다. 답 ⑤

535

주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형하면

$(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-2ky+k^2)=0$

$(x+2y)^2+(y-k)^2=0$
이때, x, y, k가 실수이므로 $x+2y=0$, $y-k=0$
$\therefore x=-2y$, $y=k$
한편, 주어진 방정식을 만족시키는 x, y의 값이 $x=a$, $y=5$뿐이므로
$a=-2\cdot5=-10$, $k=5$
$\therefore a+k=-10+5=-5$ 답 ①

536

두 이차방정식의 공통근이 α이므로
$\alpha^2+(2m+1)\alpha-m-3=0$ …… ㉠
$\alpha^2+(m+1)\alpha+m-3=0$ …… ㉡
㉠－㉡을 하면 $m\alpha-2m=0$
$m(\alpha-2)=0$ $\therefore m=0$ 또는 $\alpha=2$
(i) $m=0$일 때, 두 이차방정식은 $x^2+x-3=0$으로 같게 되므로 공통근이 두 개가 되어 공통근이 한 개라는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $\alpha=2$를 ㉠에 대입하면
$4+2(2m+1)-m-3=0$, $3m+3=0$
$\therefore m=-1$
(i), (ii)에서 $m+\alpha=-1+2=1$ 답 ④

537

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면
$\alpha^2+a\alpha+b=0$ …… ㉠
$\alpha^2+b\alpha+a=0$ …… ㉡
㉠－㉡을 하면 $(a-b)\alpha+b-a=0$
$(a-b)(\alpha-1)=0$ $\therefore \alpha=1$ ($\because a\neq b$)
$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+a+b=0$
$\therefore b=-a-1$ …… ㉢
㉢을 $x^2+ax+b=0$에 대입하면
$x^2+ax-a-1=0$, $(x+a+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-a-1$ 또는 $x=1$
㉢을 $x^2+bx+a=0$에 대입하면
$x^2-(a+1)x+a=0$, $(x-a)(x-1)=0$
$\therefore x=a$ 또는 $x=1$
따라서 공통근이 아닌 두 근의 합은
$-a-1+a=-1$ 답 ②

538

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b$
이므로 주어진 연립방정식은
$\begin{cases} a^2-2b+2a=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ a+b=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡에서 $b=1-a$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-2(1-a)+2a=3$
$a^2+4a-5=0$, $(a+5)(a-1)=0$
$\therefore a=-5$ 또는 $a=1$
이것을 ㉢에 대입하면
$a=-5$일 때, $b=6$ 또는 $a=1$일 때, $b=0$
가

(i) $a=-5$, $b=6$, 즉 $x+y=-5$, $xy=6$일 때
x, y는 이차방정식 $t^2+5t+6=0$의 두 근이므로
$(t+3)(t+2)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=-2$
$\therefore x=-3$, $y=-2$ 또는 $x=-2$, $y=-3$
(ii) $a=1$, $b=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때
x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로
$t(t-1)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=1$
$\therefore x=0$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=0$
나

(i), (ii)에서 구하는 해는
$\begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\end{cases}$
따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 값은 13, 1이다.
다

단계	채점 요소	비율
가	$x+y$, xy의 값 구하기	40%
나	x, y의 값 구하기	40%
다	$\alpha^2+\beta^2$의 값 구하기	20%

답 1, 13

539

직육면체 ABCD－EFGH의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면
$\begin{cases} 4(x+y+z)=24 \\ 2(xy+yz+zx)=22 \\ xyz=6 \end{cases}$
즉, $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases}$
가

따라서 x, y, z는 삼차방정식 $t^3-6t^2+11t-6=0$의 세 근이다.
$f(t)=t^3-6t^2+11t-6$으로 놓으면
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(t)$를 인수분해하면
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$
$(t-1)(t^2-5t+6)=0$, $(t-1)(t-2)(t-3)=0$
$\therefore t=1$ 또는 $t=2$ 또는 $t=3$
나

따라서 $\overline{AC}=\sqrt{x^2+y^2}$이므로
$x=2$, $y=3$, $z=1$ 또는 $x=3$, $y=2$, $z=1$
일 때 선분 AC의 길이는 최댓값 $\sqrt{13}$을 갖는다.
다

단계	채점 요소	비율
가	연립방정식 세우기	30%
나	연립방정식의 해 구하기	50%
다	선분 AC의 길이의 최댓값 구하기	20%

답 $\sqrt{13}$

09 여러 가지 부등식

개념 콕콕 본문 p.91~92

540

ㄱ. 부등식의 양변에 같은 수를 더하여도 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로 $a+1>b+1$ (참)

ㄴ. 부등식의 양변에서 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로 $a-2>b-2$ (참)

ㄷ. 부등식의 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로 $\frac{a}{5}>\frac{b}{5}$ (거짓)

ㄹ. 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하면 부등호의 방향은 바뀌므로 $-2a<-2b$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ㄷ뿐이다.

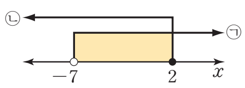
답 ㄷ

541

(1) $2x+8>-6$에서 $2x>-14$　　$\therefore x>-7$　　…… ㉠

$x-3\geq 2x-5$에서 $-x\geq -2$　　$\therefore x\leq 2$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

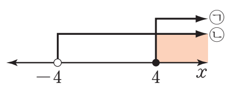


$\therefore -7<x\leq 2$

(2) $x+3\geq 7$에서 $x\geq 4$　　…… ㉠

$3x-5<3+5x$에서 $-2x<8$　　$\therefore x>-4$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



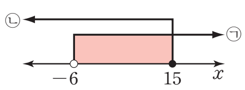
$\therefore x\geq 4$

(3) $2x-5<4x+7$에서 $-2x<12$　　$\therefore x>-6$　　…… ㉠

$\frac{x-1}{2}\leq\frac{x+6}{3}$에서 양변에 6을 곱하면

$3x-3\leq 2x+12$　　$\therefore x\leq 15$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



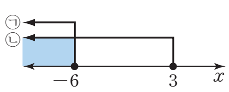
$\therefore -6<x\leq 15$

(4) $4x+2\leq 3x-4\leq 5$에서 $\begin{cases}4x+2\leq 3x-4\\3x-4\leq 5\end{cases}$

$4x+2\leq 3x-4$에서 $x\leq -6$　　…… ㉠

$3x-4\leq 5$에서 $3x\leq 9$　　$\therefore x\leq 3$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore x\leq -6$

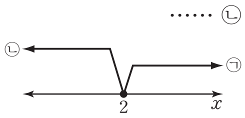
답 (1) $-7<x\leq 2$　(2) $x\geq 4$　(3) $-6<x\leq 15$　(4) $x\leq -6$

542

(1) $5x\geq 10$에서 $x\geq 2$　　…… ㉠

$4x\leq 3x+2$에서 $x\leq 2$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



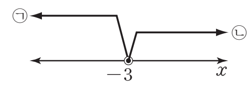
$\therefore x=2$

(2) $3x+2<x-4$에서 $2x<-6$　　$\therefore x<-3$　　…… ㉠

$0.2-0.1x\leq 0.5$에서 양변에 10을 곱하면

$2-x\leq 5$, $-x\leq 3$　　$\therefore x\geq -3$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 해는 없다.

답 (1) $x=2$　(2) 해는 없다.

543

(1) $|x-1|<1$에서 $-1<x-1<1$

$\therefore 0<x<2$

(2) $|3-x|\leq 2$에서 $-2\leq 3-x\leq 2$

$-5\leq -x\leq -1$　　$\therefore 1\leq x\leq 5$

(3) $|2x-1|\geq 3$에서 $2x-1\leq -3$ 또는 $2x-1\geq 3$

$2x\leq -2$ 또는 $2x\geq 4$　　$\therefore x\leq -1$ 또는 $x\geq 2$

(4) $|x-1|\geq 2x+1$에서

(ⅰ) $x\geq 1$일 때

$x-1\geq 2x+1$, $-x\geq 2$　　$\therefore x\leq -2$

그런데 $x\geq 1$이므로 부등식의 해는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $x<1$일 때

$-(x-1)\geq 2x+1$, $-3x\geq 0$　　$\therefore x\leq 0$

그런데 $x<1$이므로 $x\leq 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 부등식의 해는 $x\leq 0$

답 (1) $0<x<2$　(2) $1\leq x\leq 5$　(3) $x\leq -1$ 또는 $x\geq 2$　(4) $x\leq 0$

544

답 (1) $\alpha\leq x\leq\gamma$　(2) $x<\beta$ 또는 $x>\delta$

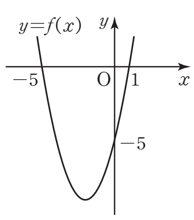
545

(1) 이차방정식 $x^2+4x-5=0$에서

$(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

$f(x)=x^2+4x-5$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)<0$의 해는



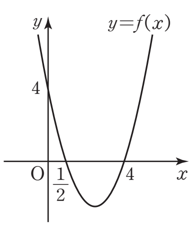
$-5<x<1$

(2) 이차방정식 $2x^2-9x+4=0$에서

$(2x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$

$f(x)=2x^2-9x+4$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)\geq 0$의 해는



$x\leq\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 4$

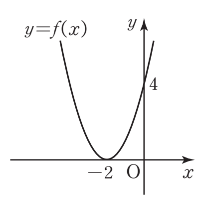
답 (1) $-5<x<1$　(2) $x\leq\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 4$

546

(1) $f(x)=x^2+4x+4$라 하면

$f(x)=(x+2)^2$

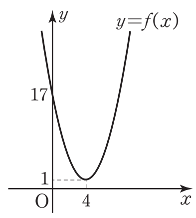
따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\geq 0$의 해는 모든 실수이다.



(2) $f(x)=x^2-8x+17$이라 하면

$f(x)=(x-4)^2+1$

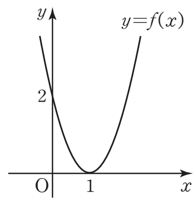
따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)<0$의 해는 없다.



(3) $f(x)=2x^2-4x+2$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)>0$의 해는 $x\neq 1$인 모든 실수이다.

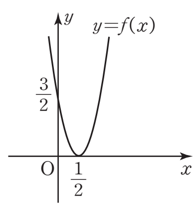


(4) $f(x)=6x^2-6x+\frac{3}{2}$이라 하면

$f(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\leq 0$의 해는

$x=\frac{1}{2}$



답 (1) 모든 실수 (2) 해는 없다.

(3) $x\neq 1$인 모든 실수 (4) $x=\frac{1}{2}$

547

(1) $x^2-x-2<0$에서 $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

(2) $2x^2-5x+2>0$에서 $(2x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$

(3) $-x^2+4x+5\leq 2x-3$에서 $x^2-2x-8\geq 0$

$(x+2)(x-4)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$

답 (1) $-1<x<2$ (2) $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$

(3) $x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$

548

(1) (i) $x\geq 0$일 때

$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<2$

(ii) $x<0$일 때

$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

그런데 $x<0$이므로 $-2<x<0$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<2$

(2) (i) $x\geq 3$일 때

$x^2-3x>x-3$, $x^2-4x+3>0$

$(x-1)(x-3)>0$ $\quad\therefore x<1$ 또는 $x>3$

그런데 $x\geq 3$이므로 $x>3$

(ii) $x<3$일 때

$x^2-3x>-(x-3)$, $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$ $\quad\therefore x<-1$ 또는 $x>3$

그런데 $x<3$이므로 $x<-1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-1$ 또는 $x>3$

답 (1) $-2<x<2$ (2) $x<-1$ 또는 $x>3$

549

(1) $(x-1)(x-2)<0$에서 $x^2-3x+2<0$

(2) $(x+1)(x-5)\geq 0$에서 $x^2-4x-5\geq 0$

답 (1) $x^2-3x+2<0$ (2) $x^2-4x-5\geq 0$

550

(1) $x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$

따라서 $x^2+2x+1>0$의 해는 $x\neq -1$인 모든 실수이다.

(2) $x^2-12x+36=(x-6)^2\geq 0$

따라서 $x^2-12x+36<0$의 해는 없다.

(3) $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$

따라서 $x^2+4x+4\geq 0$의 해는 모든 실수이다.

(4) $x^2-14x+49=(x-7)^2\geq 0$

따라서 $x^2-14x+49\leq 0$의 해는 $x=7$이다.

답 (1) $x\neq -1$인 모든 실수 (2) 해는 없다.

(3) 모든 실수 (4) $x=7$

551

(1) $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2$

따라서 $x^2+2x+3>0$의 해는 모든 실수이다.

(2) $4x^2+4x+5=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\geq 4$

따라서 $4x^2+4x+5\leq 0$의 해는 없다.

답 (1) 모든 실수 (2) 해는 없다.

552

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 이차함수 $y=x^2-2x+k+1$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-2x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(k+1)<0$

$1-k-1<0$ $\quad\therefore k>0$

답 $k>0$

553

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 이차함수 $y=-x^2-kx-2k+3$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2-kx-2k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot(-1)\cdot(-2k+3)<0$

$k^2-8k+12<0$, $(k-2)(k-6)<0$

$\therefore 2<k<6$

답 $2<k<6$

554

(1) $2x^2-3>2x+1$에서 $2x^2-2x-4>0$

$2(x+1)(x-2)>0$ $\quad\therefore x<-1$ 또는 $x>2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+2x-3\leq 0$에서 $(x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3 \le x < -1$

(2) $2x+4<x^2+1<2x$에서 $\begin{cases} 2x+4<x^2+1 \\ x^2+1<2x \end{cases}$

$2x+4<x^2+1$에서 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$ ...... ㉠

$x^2+1<2x$에서 $x^2-2x+1<0$

그런데 $x^2-2x+1=(x-1)^2 \ge 0$이므로 해는 없다. ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위가 없으므로 해는 없다.

답 (1) $-3 \le x < -1$ (2) 해는 없다.

555

답 (1) $\ge$, $>$, $>$ (2) $\ge$, $>$, $<$ (3) $<$

556

$f(x)=x^2-2kx+16$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1보다 크므로

(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-1 \cdot 16 \ge 0$에서 $k^2-16 \ge 0$

$(k+4)(k-4) \ge 0$

$\therefore k \le -4$ 또는 $k \ge 4$

(ii) $f(-1)=(-1)^2-2k \cdot (-1)+16>0$에서

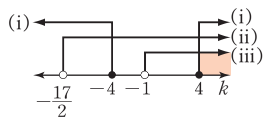
$2k+17>0$ $\therefore k>-\frac{17}{2}$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k>-1$

(i)~(iii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$k \ge 4$



답 $k \ge 4$

557

$f(x)=x^2-2kx+6-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1보다 작으므로

(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-1 \cdot (6-k) \ge 0$에서 $k^2+k-6 \ge 0$

$(k+3)(k-2) \ge 0$

$\therefore k \le -3$ 또는 $k \ge 2$

(ii) $f(-1)=(-1)^2-2k \cdot (-1)+6-k>0$에서

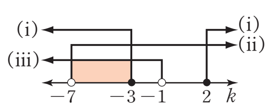
$k+7>0$ $\therefore k>-7$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<-1$

(i)~(iii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$-7<k \le -3$



답 $-7<k \le -3$

558

$f(x)=x^2+kx+1-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 -1이 있으므로

$f(-1)=(-1)^2+k \cdot (-1)+1-k<0$

$2-2k<0$ $\therefore k>1$

답 $k>1$

유형 콕콕 본문 p.93~101

559 ②	**560** ③	**561** ④	**562** ⑤	**563** ④	**564** 1
565 ④	**566** ③	**567** $-6<x \le -2$		**568** ③	**569** ⑤
570 해는 없다.		**571** $0<a \le 1$		**572** $10 \le a<11$	
573 2	**574** $a>-2$		**575** ③	**576** ③	
577 200 g	**578** ②	**579** ②	**580** 4	**581** ④	**582** ①
583 4	**584** ④	**585** ①	**586** $x<-3$ 또는 $x>1$		
587 ②	**588** ④	**589** $-5a<x<-7a$		**590** ⑤	**591** ③
592 $x<-2$ 또는 $x>2$			**593** ③	**594** ⑤	
595 100	**596** ②	**597** ②	**598** -7	**599** ②	**600** ③
601 ④	**602** ⑤	**603** ②	**604** ①	**605** ①	**606** ④
607 12 이상 15 이하		**608** ⑤	**609** ①	**610** $0<a \le 4$	
611 ②	**612** ②	**613** $-11<k<-4$			

559

② $a=1$, $b=-2$이면 $1>-2$이지만 $1^2<(-2)^2$ (거짓)

③ $a>b>0$이면 $ab>0$이므로

$\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$ $\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

560

ㄱ. $a>b$이면 $a-c>b-c$ (참)

ㄴ. $a>b$이고 $c>d$이므로 $a-b>0$, $c-d>0$

$(a-b)+(c-d)>0$, $(a+c)-(b+d)>0$

$\therefore a+c>b+d$ (참)

ㄷ. $c<0$이므로 $c^2>0$

$a>b$이고 $c^2>0$이므로 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

561

$a>b>0>c>d$일 때

① $a>b$이고 $c>d$이므로 $a-b>0$, $c-d>0$

$(a-b)+(c-d)>0$, $(a-d)-(b-c)>0$

$\therefore a-d>b-c$ (참)

② $a>b$이고 $c<0$이므로 $ac<bc$ (참)

③ $a>d$이고 $c<0$이므로 $\frac{a}{c}<\frac{d}{c}$ (참)

④ $a=3$, $b=1$, $c=-1$, $d=-2$이면

$a>b>0>c>d$이지만

$ac=-3$, $bd=-2$이므로 $ac<bd$ (거짓)

⑤ $a>b>0$이므로 $a+b>0$, $a-b>0$

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$ ...... ㉠

$d<c<0$이므로 $d+c<0$, $d-c<0$

$\therefore d^2-c^2=(d+c)(d-c)>0$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $a^2-b^2+d^2-c^2>0$

$\therefore a^2+d^2>b^2+c^2$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

562

$(a-2)x>a+b$의 해가 $x<2$이므로 $a-2<0$

$\therefore x<\frac{a+b}{a-2}$

따라서 $\frac{a+b}{a-2}=2$이므로 $a+b=2a-4$

$\therefore a-b=4$ ...... ㉠

부등식 $(a-b)x\ge8$에 ㉠을 대입하면

$4x\ge8$ $\quad\therefore x\ge2$

답 ⑤

563

$ax\ge b$의 해가 $x\le-1$이므로 $a<0$

$\therefore x\le\frac{b}{a}$

따라서 $\frac{b}{a}=-1$이므로 $b=-a$ ...... ㉠

부등식 $ax\ge a+b$에 ㉠을 대입하면

$ax\ge a-a$, $ax\ge0$

$\therefore x\le0$ ($\because a<0$)

답 ④

564

$ax-2>b+4x$에서 $(a-4)x>b+2$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a-4=0$, $b+2<0$

$\therefore a=4$, $b<-2$

따라서 정수 b의 최댓값은 -3이므로 $a+b$의 최댓값은

$4+(-3)=1$

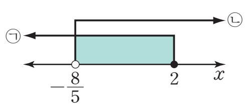
답 1

565

$5x+2\le12$에서 $5x\le10$ $\quad\therefore x\le2$ ...... ㉠

$4-3x<2x+12$에서 $-5x<8$ $\quad\therefore x>-\frac{8}{5}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{8}{5}<x\le2$



따라서 $M=2$, $m=-1$이므로

$M+m=2+(-1)=1$

답 ④

566

$\frac{4+2x}{3}<\frac{3x+9}{4}\le\frac{x+1}{2}+1$에서 $\begin{cases}\frac{4+2x}{3}<\frac{3x+9}{4}\\ \frac{3x+9}{4}\le\frac{x+1}{2}+1\end{cases}$

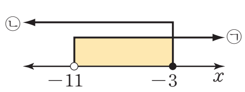
$\frac{4+2x}{3}<\frac{3x+9}{4}$에서 양변에 12를 곱하면

$16+8x<9x+27$, $-x<11$ $\quad\therefore x>-11$ ...... ㉠

$\frac{3x+9}{4}\le\frac{x+1}{2}+1$에서 양변에 4를 곱하면

$3x+9\le2x+2+4$ $\quad\therefore x\le-3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-11<x\le-3$



따라서 정수 x는 $-10, -9, \cdots, -3$의 8개이다.

답 ③

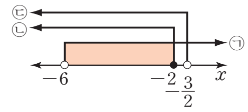
567

$1-x<7$에서 $-x<6$ $\quad\therefore x>-6$ ...... ㉠

$2-3x\ge x+10$에서 $-4x\ge8$ $\quad\therefore x\le-2$ ...... ㉡

$5x+7<3x+4$에서 $2x<-3$ $\quad\therefore x<-\frac{3}{2}$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-6<x\le-2$



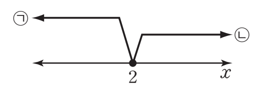
답 $-6<x\le-2$

568

$x+2\ge2(x-3)+6$에서 $x+2\ge2x$ $\quad\therefore x\le2$ ...... ㉠

$3(x+1)\le4x+1$에서 $3x+3\le4x+1$ $\quad\therefore x\ge2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $x=2$



답 ③

569

$4-3x<-(2x+1)+3\le6-4x$에서 $\begin{cases}4-3x<-(2x+1)+3\\ -(2x+1)+3\le6-4x\end{cases}$

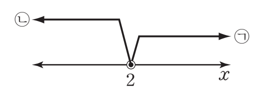
$4-3x<-(2x+1)+3$에서 $4-3x<-2x+2$

$\therefore x>2$ ...... ㉠

$-(2x+1)+3\le6-4x$에서 $-2x+2\le6-4x$, $2x\le4$

$\therefore x\le2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 해는 없다.



답 ⑤

570

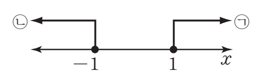
$\frac{5(1-x)}{2}\le-2x+2$에서 양변에 2를 곱하면

$5-5x\le-4x+4$ $\quad\therefore x\ge1$ ...... ㉠

$\frac{x-1}{2}\le\frac{x-2}{3}$에서 양변에 6을 곱하면

$3x-3\le2x-4$ $\quad\therefore x\le-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 해는 없다.



답 해는 없다.

571

$2x+1<3(2-x)$에서 $2x+1<6-3x$, $5x<5$ $\quad\therefore x<1$ ...... ㉠

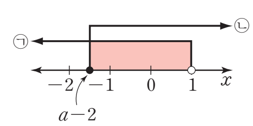
$3x+a-1\le4x+1$에서 $x\ge a-2$ ...... ㉡

연립부등식을 만족시키는 정수인 해가 2개이려면 정수인 해가 -1, 0 이다.

따라서 오른쪽 그림에서

$-2<a-2\le-1$

$\therefore 0<a\le1$



답 $0<a\le1$

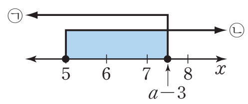
572

$2x+a+2\ge5+3x$에서 $x\le a-3$ ...... ㉠

$3(x-2)\ge2x-1$에서 $3x-6\ge2x-1$ $\quad\therefore x\ge5$ ...... ㉡

연립부등식을 만족시키는 정수인 해의 합이 18이려면 정수인 해가 5, 6, 7이다.

따라서 오른쪽 그림에서



$7 \le a-3 < 8$

$\therefore 10 \le a < 11$

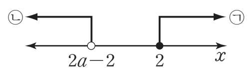
답 $10 \le a < 11$

573

$5(x-1) \ge 3x-1$에서 $5x-5 \ge 3x-1$, $2x \ge 4$ $\therefore x \ge 2$ ······ ㉠

$2x+1 < 4a-3$에서 $2x < 4a-4$ $\therefore x < 2a-2$ ······ ㉡

연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림에서



$2a-2 \le 2$, $2a \le 4$ $\therefore a \le 2$

따라서 상수 a의 최댓값은 2이다.

답 2

574

$2x-4 \le 3(2-x) < x+a$에서 $\begin{cases} 2x-4 \le 3(2-x) \\ 3(2-x) < x+a \end{cases}$

$2x-4 \le 3(2-x)$에서 $2x-4 \le 6-3x$, $5x \le 10$

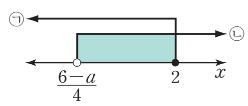
$\therefore x \le 2$ ······ ㉠

$3(2-x) < x+a$에서 $6-3x < x+a$, $-4x < a-6$

$\therefore x > \frac{6-a}{4}$ ······ ㉡

가

이 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



나

$\frac{6-a}{4} < 2$, $6-a < 8$ $\therefore a > -2$

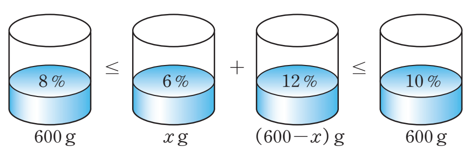
다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 부등식 풀기	40%
나	해를 갖도록 수직선 위에 나타내기	20%
다	상수 a의 값의 범위 구하기	40%

답 $a > -2$

575

6 %의 소금물의 양을 x g이라 하면 12 %의 소금물의 양은 $(600-x)$ g이므로



$\frac{8}{100} \times 600 \le \frac{6}{100} \times x + \frac{12}{100} \times (600-x) \le \frac{10}{100} \times 600$

에서 양변에 100을 곱하면

$4800 \le 6x + 7200 - 12x \le 6000$

$-2400 \le -6x \le -1200$

$\therefore 200 \le x \le 400$

따라서 6 %의 소금물의 양은 200 g 이상 400 g 이하이므로

$A=200$, $B=400$

$\therefore A+B=200+400=600$

답 ③

576

현재 딸의 나이를 x세라 하면 아버지의 나이는 $(64-x)$세이므로

$\begin{cases} 64-x \ge 3x & \cdots\cdots ㉠ \\ (64-x)+16 \le 2(x+16) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-4x \ge -64$ $\therefore x \le 16$

㉡에서 $64-x+16 \le 2x+32$, $-3x \le -48$ $\therefore x \ge 16$

$\therefore x=16$

따라서 현재 딸의 나이는 16세, 아버지의 나이는 48세이므로 아버지와 딸의 나이 차는

$48-16=32$

답 ③

577

식품 A의 섭취량을 x g이라 하면 식품 B의 섭취량은 $(400-x)$ g이다.

성분 / 식품	열량(kcal)	단백질(g)
A	20	0.5
B	10	1.5

주어진 표는 10 g에 대한 열량과 단백질을 나타내고 있으므로 1 g의 열량과 단백질을 구하려면 10으로 나누어야 한다.

$\therefore \begin{cases} \frac{20}{10}x + \frac{10}{10}(400-x) \ge 600 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{0.5}{10}x + \frac{1.5}{10}(400-x) \ge 40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

가

㉠에서 $2x+400-x \ge 600$ $\therefore x \ge 200$

㉡에서 $0.5x+600-1.5x \ge 400$ $\therefore x \le 200$

$\therefore x=200$

나

따라서 식품 A를 200 g 섭취해야 한다.

다

단계	채점 요소	비율
가	식품 A의 섭취량을 x로 하는 연립부등식 세우기	50%
나	연립부등식의 해 구하기	40%
다	식품 A의 섭취량 구하기	10%

답 200 g

578

$|2x-a| \le 4$에서 $-4 \le 2x-a \le 4$

$a-4 \le 2x \le a+4$ $\therefore \frac{a-4}{2} \le x \le \frac{a+4}{2}$

주어진 부등식의 해가 $b \le x \le 3$이므로

$\frac{a-4}{2}=b$, $\frac{a+4}{2}=3$

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로

$a+b=2+(-1)=1$

답 ②

579

$4 < |3x+1| < 7$에서

$-7 < 3x+1 < -4$ 또는 $4 < 3x+1 < 7$

(i) $-7 < 3x+1 < -4$에서 $-8 < 3x < -5$ $\therefore -\frac{8}{3} < x < -\frac{5}{3}$

(ii) $4 < 3x+1 < 7$에서 $3 < 3x < 6$ $\therefore 1 < x < 2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{8}{3}<x<-\frac{5}{3}$ 또는 $1<x<2$

따라서 $a=-\frac{8}{3}$, $b=2$이므로

$a+b=-\frac{8}{3}+2=-\frac{2}{3}$ 답 ②

580

$2|x+1|+|x-1|<7$에서

(i) $x<-1$일 때

$-2(x+1)-(x-1)<7$, $-2x-2-x+1<7$

$-3x<8$ $\quad\therefore x>-\frac{8}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\frac{8}{3}<x<-1$

가

(ii) $-1\le x<1$일 때

$2(x+1)-(x-1)<7$, $2x+2-x+1<7$

$\therefore x<4$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$

나

(iii) $x\ge 1$일 때

$2(x+1)+(x-1)<7$, $2x+2+x-1<7$

$3x<6$ $\quad\therefore x<2$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<2$

다

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{8}{3}<x<2$

따라서 이 부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

라

단계	채점 요소	비율
가	$x<-1$일 때 주어진 부등식의 해 구하기	20%
나	$-1\le x<1$일 때 주어진 부등식의 해 구하기	20%
다	$x\ge 1$일 때 주어진 부등식의 해 구하기	20%
라	주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수 구하기	40%

답 4

581

$0\le x\le 3$ ...... ㉠

$2\le y\le 4$에서 $-12\le -3y\le -6$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $-12\le x-3y\le -3$이므로

$a=-12$, $b=-3$

$\therefore b-a=-3-(-12)=9$ 답 ④

582

$|x+1|<2$에서 $-2<x+1<2$이므로

$-3<x<1$ $\quad\therefore -6<2x<2$ ...... ㉠

$|y-2|<5$에서 $-5<y-2<5$

$-3<y<7$ $\quad\therefore -7<-y<3$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $-13<2x-y<5$

$\therefore a\le -13$, $b\ge 5$

따라서 실수 a의 최댓값은 -13이고, 실수 b의 최솟값은 5이므로

$-13+5=-8$ 답 ①

583

$1\le x<3$에서 $4\le 4x<12$ ...... ㉠

$-1<y\le a$에서 $-\frac{a}{4}\le -\frac{1}{4}y<\frac{1}{4}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $4-\frac{a}{4}\le 4x-\frac{1}{4}y<\frac{49}{4}$

따라서 $4-\frac{a}{4}=3$이므로

$\frac{a}{4}=1$ $\quad\therefore a=4$ 답 4

584

이차부등식 $x^2-6x+9>0$의 해는 이차함수 $y=x^2-6x+9$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 구하는 부등식의 해는 $x\ne 3$인 모든 실수이다. 답 ④

585

이차부등식 $-x^2+2x-1\ge 0$의 해는 이차함수 $y=-x^2+2x-1$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 구하는 부등식의 해는 $x=1$이다. 답 ①

586

이차부등식 $ax^2+bx+c<mx+n$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$x<-3$ 또는 $x>1$ 답 $x<-3$ 또는 $x>1$

587

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 해는 $x=2\pm\sqrt{3}$이므로

이차부등식 $x^2-4x+1\le 0$의 해는

$2-\sqrt{3}\le x\le 2+\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=2-\sqrt{3}$, $\beta=2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha-\beta=(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

다른 풀이

이차부등식 $x^2-4x+1\le 0$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$이므로 α, β가 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\cdot 1=12$

이때, $\alpha<\beta$에서 $\alpha-\beta<0$이므로

$\alpha-\beta=-2\sqrt{3}$ 답 ②

588

$x^2+2x-8<0$에서 $(x+4)(x-2)<0$

$\therefore -4<x<2$

① $|x|<2$에서 $-2<x<2$

② $|x|+1<4$에서 $|x|<3$ $\quad\therefore -3<x<3$

③ $|x|-1<3$에서 $|x|<4$ $\quad\therefore -4<x<4$

④ $|x+1|<3$에서 $-3<x+1<3$ $\quad\therefore -4<x<2$

⑤ $|x+1|<5$에서 $-5<x+1<5$ $\quad\therefore -6<x<4$

따라서 주어진 이차부등식과 해가 같은 것은 ④이다. 답 ④

589

$a<0$이므로 $ax^2+12a^2x+35a^3>0$에서

$x^2+12ax+35a^2<0$, $(x+5a)(x+7a)<0$

이때, $-5a<-7a$이므로 주어진 이차부등식의 해는

$-5a<x<-7a$ 답 $-5a<x<-7a$

590

$x^2-2x-7<2|x-1|$에서

(i) $x\geq1$일 때

$x^2-2x-7<2(x-1)$, $x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0$ $\quad\therefore -1<x<5$

그런데 $x\geq1$이므로 $1\leq x<5$

(ii) $x<1$일 때

$x^2-2x-7<-2(x-1)$, $x^2-9<0$

$(x+3)(x-3)<0$ $\quad\therefore -3<x<3$

그런데 $x<1$이므로 $-3<x<1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3<x<5$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=5$이므로

$\beta-2\alpha=5-2\cdot(-3)=11$ 답 ⑤

591

$x^2-3|x-1|<3x+6$에서

(i) $x\geq1$일 때

$x^2-3(x-1)<3x+6$, $x^2-6x-3<0$

$\therefore 3-2\sqrt{3}<x<3+2\sqrt{3}$

그런데 $x\geq1$이므로 $1\leq x<3+2\sqrt{3}$

(ii) $x<1$일 때

$x^2+3(x-1)<3x+6$, $x^2-9<0$

$(x+3)(x-3)<0$ $\quad\therefore -3<x<3$

그런데 $x<1$이므로 $-3<x<1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3<x<3+2\sqrt{3}$

따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$의 9개이다. 답 ③

592

$|x^2-1|>3$에서 $x^2-1<-3$ 또는 $x^2-1>3$

(i) $x^2-1<-3$에서 $x^2<-2$

그런데 $x^2\geq0$이므로 해는 없다.

(ii) $x^2-1>3$에서 $x^2-4>0$

$(x+2)(x-2)>0$ $\quad\therefore x<-2$ 또는 $x>2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-2$ 또는 $x>2$ 답 $x<-2$ 또는 $x>2$

593

$ax^2+\frac{b}{4}x-3<0$의 해가 $-\frac{1}{4}<x<\frac{4}{3}$이므로 $a>0$

해가 $-\frac{1}{4}<x<\frac{4}{3}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)<0$ $\quad\therefore x^2-\frac{13}{12}x-\frac{1}{3}<0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{13}{12}ax-\frac{1}{3}a<0$

이 부등식이 $ax^2+\frac{b}{4}x-3<0$과 같으므로

$-\frac{13}{12}a=\frac{b}{4}$, $-\frac{1}{3}a=-3$

따라서 $a=9$, $b=-39$이므로

$a+b=9+(-39)=-30$

다른 풀이

이차부등식 $ax^2+\frac{b}{4}x-3<0$의 해가 $-\frac{1}{4}<x<\frac{4}{3}$이므로 이차방정식

$ax^2+\frac{b}{4}x-3=0$의 두 근이 $-\frac{1}{4}$, $\frac{4}{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{4a}=-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{a}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}$

따라서 $a=9$, $b=-39$이므로

$a+b=9+(-39)=-30$ 답 ③

594

$ax^2+3x+b<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>5$이므로 $a<0$

해가 $x<-2$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-5)>0$ $\quad\therefore x^2-3x-10>0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-3ax-10a<0$

이 부등식이 $ax^2+3x+b<0$과 같으므로

$-3a=3$, $-10a=b$

따라서 $a=-1$, $b=10$이므로

$a+b=-1+10=9$ 답 ⑤

595

$-2x^2+ax+b>0$의 해가 $1<x<3$이므로

$-2(x-1)(x-3)>0$ $\quad\therefore -2x^2+8x-6>0$

······ 가

이 부등식이 $-2x^2+ax+b>0$과 같으므로

$a=8$, $b=-6$

$\therefore a^2+b^2=8^2+(-6)^2=100$

······ 나

단계	채점 요소	비율
가	x^2의 계수가 -2이고 해가 $1<x<3$인 이차부등식 구하기	60%
나	a, b의 값을 구하고 a^2+b^2의 값 구하기	40%

답 100

596

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+6ax+8a(a-1)\geq0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+6ax+8a(a-1)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3a)^2-1\cdot8a(a-1)\leq0$, $a^2+8a\leq0$

$a(a+8)\leq0$ $\quad\therefore -8\leq a\leq0$ 답 ②

597

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+4ax+8>0$이 성립해야 하므로

$a>0$ ······ ㉠

이차방정식 $ax^2+4ax+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-a\cdot8<0$, $4a(a-2)<0$

$\therefore 0<a<2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 실수 a의 값의 범위는 $0<a<2$

따라서 정수 a의 값은 1이다. 답 ②

598

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+4ax+3a-7<0$이 성립해야 하므로 $a<0$ …… ㉠

가

이차방정식 $ax^2+4ax+3a-7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-a(3a-7)<0$

$a^2+7a<0$, $a(a+7)<0$

$\therefore -7<a<0$ …… ㉡

나

㉠, ㉡에서 실수 a의 값의 범위는 $-7<a<0$이므로

$\alpha=-7$, $\beta=0$

$\therefore \alpha+\beta=-7+0=-7$

다

단계	채점 요소	비율
가	$a<0$임을 알기	40%
나	판별식 $D<0$임을 이용하여 a의 값의 범위 구하기	40%
다	α, β의 값을 구하고 $\alpha+\beta$의 값 구하기	20%

답 -7

599

ㄱ. $x^2-6x+9=(x-3)^2\geq0$

이므로 $x^2-6x+9\leq0$의 해는 $x=3$이다.

ㄴ. $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq1$

이므로 $x^2+4x+5\leq0$의 해는 없다.

ㄷ. $-3x^2+3x-1<0$에서 $3x^2-3x+1>0$

$3x^2-3x+1=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}$

이므로 해는 모든 실수이다.

따라서 해가 없는 이차부등식은 ㄴ뿐이다.

다른 풀이

ㄱ. $x^2-6x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot9=0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-6x+9\geq0$

즉, $x^2-6x+9\leq0$의 해는 $x=3$이다.

ㄴ. $x^2+4x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4x+5>0$

즉, $x^2+4x+5\leq0$의 해는 없다.

ㄷ. $-3x^2+3x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot(-3)\cdot(-1)=-3<0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $-3x^2+3x-1<0$

즉, $-3x^2+3x-1<0$의 해는 모든 실수이다.

따라서 해가 없는 이차부등식은 ㄴ뿐이다. 답 ②

600

이차부등식 $x^2-4x+k\leq0$이 단 한 개의 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=0$, $4-k=0$

$\therefore k=4$ 답 ③

601

① $x^2-8x+16=(x-4)^2\geq0$이므로

$x^2-8x+16>0$의 해는 $x\neq4$인 모든 실수이다.

② $x^2+6x+9=(x+3)^2\geq0$이므로

$x^2+6x+9\leq0$의 해는 $x=-3$이다.

③ $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq0$이므로

$4x^2-4x+1\geq0$, 즉 $4x^2\geq4x-1$의 해는 모든 실수이다.

④ $4x^2-20x+25=(2x-5)^2\geq0$이므로

$4x^2-20x+25<0$, 즉 $20x-25>4x^2$의 해는 없다.

⑤ $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$이므로

$x^2+2x-3\leq0$의 해는 $-3\leq x\leq1$이다.

따라서 해가 존재하지 않는 것은 ④이다. 답 ④

602

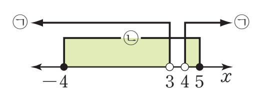
$x^2-7x+12>0$에서 $(x-3)(x-4)>0$

$\therefore x<3$ 또는 $x>4$ …… ㉠

$x^2-x-20\leq0$에서 $(x+4)(x-5)\leq0$

$\therefore -4\leq x\leq5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면



$-4\leq x<3$ 또는 $4<x\leq5$

따라서 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 5의 8개이다. 답 ⑤

603

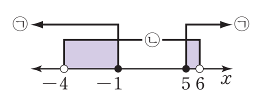
$x^2-4x-5\geq0$에서 $(x+1)(x-5)\geq0$

$\therefore x\leq-1$ 또는 $x\geq5$ …… ㉠

$-x-24<-x^2+x$에서 $x^2-2x-24<0$

$(x+4)(x-6)<0$ $\therefore -4<x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면



$-4<x\leq-1$ 또는 $5\leq x<6$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 5이므로

그 합은 $-3+(-2)+(-1)+5=-1$ 답 ②

604

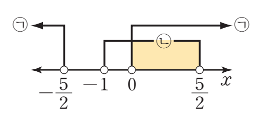
$|4x+5|>5$에서 $4x+5<-5$ 또는 $4x+5>5$

$\therefore x<-\frac{5}{2}$ 또는 $x>0$ …… ㉠

$2x^2-3x-5<0$에서 $(x+1)(2x-5)<0$

$\therefore -1<x<\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면



$0<x<\frac{5}{2}$

따라서 정수 x는 1, 2의 2개이다.

답 ①

605

세 변의 길이는 모두 양수이므로

$x>0$, $x+1>0$, $x+2>0$

$\therefore x>0$ …… ㉠

삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작으므로

$x+2<x+(x+1)$ $\therefore x>1$ …… ㉡

둔각삼각형의 가장 긴 변의 길이의 제곱은 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합보다 크므로

$(x+2)^2>x^2+(x+1)^2$

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ …… ㉢

㉠~㉢의 공통 범위를 구하면 $1<x<3$

따라서 자연수 x는 2의 1개이다. 답 ①

606

가장 짧은 변의 길이를 x라 하면 빗변을 제외한 나머지 한 변의 길이는 $12-x$이므로

$x>0$, $12-x>0$, $x<12-x$

$\therefore 0<x<6$ …… ㉠

또한 직각삼각형의 넓이가 16보다 크므로

$\frac{1}{2}x(12-x)>16$

$x^2-12x+32<0$, $(x-4)(x-8)<0$

$\therefore 4<x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4<x<6$

따라서 이 직각삼각형의 가장 짧은 변의 길이가 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

607

가로줄의 개수를 x라 하면 세로줄의 개수는 $27-x$이므로

$x>0$, $27-x>0$ $\quad\therefore 0<x<27$ …… ㉠

또한 의자에 180명 이상 앉을 수 있으므로

$x(27-x)\geq 180$

$x^2-27x+180\leq 0$, $(x-12)(x-15)\leq 0$

$\therefore 12\leq x\leq 15$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $12\leq x\leq 15$

따라서 가로줄의 개수는 12 이상 15 이하이다. 답 12 이상 15 이하

608

$f(x)=2x^2-6x+k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-3)^2-2\cdot k\geq 0$에서 $9-2k\geq 0$

$\therefore k\leq\frac{9}{2}$

(ii) $f(1)=2-6+k>0$에서 $-4+k>0$

$\therefore k>4$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{3}{2}>1$을 만족시킨다.

(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는 $4<k\leq\frac{9}{2}$ 답 ⑤

609

$f(x)=x^2+2ax+6-a$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 양수, 즉 0보다 크므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(6-a)\geq 0$에서 $a^2+a-6\geq 0$

$(a+3)(a-2)\geq 0$ $\quad\therefore a\leq -3$ 또는 $a\geq 2$

(ii) $f(0)=6-a>0$에서 $a<6$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$이므로

$-a>0$ $\quad\therefore a<0$

(i)~(iii)에서 실수 a의 값의 범위는 $a\leq -3$

다른 풀이

이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 양수이려면

(i) $\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(6-a)\geq 0$에서 $a^2+a-6\geq 0$

$(a+3)(a-2)\geq 0$ $\quad\therefore a\leq -3$ 또는 $a\geq 2$

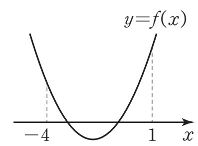
(ii) $\alpha+\beta=-2a>0$ $\quad\therefore a<0$

(iii) $\alpha\beta=6-a>0$ $\quad\therefore a<6$

(i)~(iii)에서 실수 a의 값의 범위는 $a\leq -3$ 답 ①

610

$f(x)=x^2+4x+a$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -4와 1 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



가

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot a\geq 0$에서 $4-a\geq 0$

$\therefore a\leq 4$

나

(ii) $f(-4)=16-16+a>0$에서 $a>0$ …… ㉠

$f(1)=1+4+a>0$에서 $a>-5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a>0$

다

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이고 $-4<-2<1$이므로 항상 성립한다.

라

(i)~(iii)에서 실수 a의 값의 범위는 $0<a\leq 4$

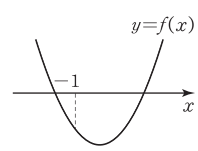
마

단계	채점 요소	비율
가	$f(x)=x^2+4x+a$라 하고, 주어진 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프의 개형 그리기	30%
나	판별식 $D\geq 0$임을 이용하여 a의 값의 범위 구하기	20%
다	$f(-4)>0$, $f(1)>0$임을 이용하여 a의 값의 범위 구하기	20%
라	그래프의 축의 위치를 이용하여 a의 값의 범위 구하기	20%
마	나, 다, 라를 만족시키는 a의 값의 범위 구하기	10%

답 $0<a\leq 4$

611

$f(x)=x^2+2ax+3a^2-6$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 -1이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(-1)=1-2a+3a^2-6<0$

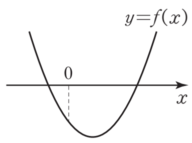
$3a^2-2a-5<0$, $(a+1)(3a-5)<0$

$\therefore -1<a<\frac{5}{3}$

따라서 정수 a는 0, 1의 2개이다. 답 ②

612

$f(x)=x^2-3ax+2a-6$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 가지므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(0)=2a-6<0 \quad \therefore a<3$

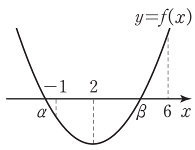
따라서 자연수 a는 1, 2이므로 그 합은

$1+2=3$

답 ②

613

$f(x)=x^2-4x+k-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha<-1$, $2<\beta<6$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(-1)=1+4+k-1<0 \quad \therefore k<-4$

(ii) $f(2)=4-8+k-1<0 \quad \therefore k<5$

(iii) $f(6)=36-24+k-1>0 \quad \therefore k>-11$

(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는

$-11<k<-4$

답 $-11<k<-4$

실력 콕콕

본문 p.102~103

614 ①	615 ⑤	616 32	617 ④	618 ⑤	619 ①
620 ②	621 ③	622 ②	623 1	624 ①	625 ③
626 ②	627 80	628 5	629 $0\le k\le\frac{3}{2}$		

614

$a+b=0$에서 $b=-a$ ...... ㉠

주어진 부등식에 ㉠을 대입하면

$(2a+a)x>3a-2a+12$, $3ax>a+12$

이 부등식의 해가 $x<-1$이므로 $a<0$

$\therefore x<\frac{a+12}{3a}$

따라서 $\frac{a+12}{3a}=-1$이므로 $a+12=-3a$

$4a=-12 \quad \therefore a=-3$

답 ①

615

$|3x-1|\le a$에서 $-a\le 3x-1\le a$

$\therefore \frac{-a+1}{3}\le x\le\frac{a+1}{3}$

이 부등식의 해가 $-2\le x\le b$이므로

$\frac{-a+1}{3}=-2$, $\frac{a+1}{3}=b$

따라서 $a=7$, $b=\frac{8}{3}$이므로

$a+3b=7+3\cdot\frac{8}{3}=15$

답 ⑤

616

$2(x-6)\le x+2b<2x-a$에서

$\begin{cases} 2(x-6)\le x+2b & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2b<2x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x-12\le x+2b \quad \therefore x\le 2b+12$

㉡에서 $x>a+2b$

이므로 연립부등식의 해는

$a+2b<x\le 2b+12$

이때, 연립부등식의 해가 $b<x\le a$이므로

$a+2b=b$, $2b+12=a$

따라서 $a=4$, $b=-4$이므로

$a^2+b^2=4^2+(-4)^2=32$

답 32

617

$f(x)=ax+b$라 하면

$0\le f(0)\le 2$이므로 $0\le b\le 2$

$-2\le -b\le 0$ ...... ㉠

$3\le f(1)\le 6$이므로 $3\le a+b\le 6$ ...... ㉡

㉡의 각 변에 2를 곱하면

$6\le 2a+2b\le 12$ ...... ㉢

한편, $f(2)=2a+b$이므로

㉠+㉢에서 $6+(-2)\le(2a+2b)-b\le 12+0$

$\therefore 4\le 2a+b\le 12$

따라서 $M=12$, $m=4$이므로

$M-m=12-4=8$

답 ④

618

$f(x)>0$의 해는 $x<-2$ 또는 $x>1$

$g(x)\ge 0$의 해는 $-1\le x\le 3$

이므로 연립부등식 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$의 해는 $1<x\le 3$

따라서 정수 x는 2, 3이므로 그 합은

$2+3=5$

답 ⑤

619

이차함수 $y=x^2-kx+2$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 항상 위쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2-kx+2>x+1$, 즉 $x^2-(k+1)x+1>0$이 성립한다.

이때, 이차방정식 $x^2-(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+1)\}^2-4\cdot1\cdot1<0$

$k^2+2k-3<0$, $(k+3)(k-1)<0$

$\therefore -3<k<1$

따라서 정수 k의 최댓값은 0이다.

답 ①

620

해가 $-2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)<0 \quad \therefore x^2-x-6<0$

이 부등식이 $x^2-ax-b<0$과 같으므로

$a=1$, $b=6$ ...... ㉠

부등식 $bx^2-x-a<0$에 ㉠을 대입하면

$6x^2-x-1<0$, $(3x+1)(2x-1)<0$

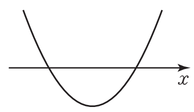
$\therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$24\alpha\beta=24\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}=-4$ 답 ②

621

이차함수 $y=x^2-2kx+2k^2-k-12$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $y<0$을 만족시키는 실수 x가 존재하려면 오른쪽 그림과 같이 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



이차방정식 $x^2-2kx+2k^2-k-12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot(2k^2-k-12)>0$

$k^2-k-12<0$, $(k+3)(k-4)<0$

$\therefore -3<k<4$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다. 답 ③

622

$f(x)=(m-1)x^2+2(m-1)x+2$라 하면

(i) $m-1=0$일 때

즉, $m=1$이면 $f(x)=2$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 항상 성립한다.

(ii) $m-1\neq0$일 때

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립해야 하므로

$m-1>0$ $\therefore m>1$ …… ㉠

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-2(m-1)<0$

$(m-1)(m-1-2)<0$, $(m-1)(m-3)<0$

$\therefore 1<m<3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1<m<3$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $1\le m<3$

따라서 정수 m은 1, 2이므로 그 합은

$1+2=3$ 답 ②

623

이차부등식 $ax^2-2(a+1)x+4<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $ax^2-2(a+1)x+4\ge0$이 성립해야 하므로

$a>0$

이차방정식 $ax^2-2(a+1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-4a\le0$

$a^2-2a+1\le0$, $(a-1)^2\le0$

$\therefore a=1$ 답 1

624

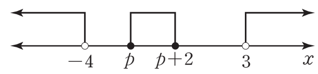
(i) $x^2+x-12>0$에서 $(x+4)(x-3)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>3$

(ii) $x^2-2(p+1)x+p^2+2p\le0$에서

$(x-p)(x-p-2)\le0$ $\therefore p\le x\le p+2$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



즉, $p\ge-4$이고 $p+2\le3$

$\therefore -4\le p\le1$

따라서 실수 p의 최솟값은 -4이다. 답 ①

625

$f(x)=x^2-2(k+1)x+2k^2-3k+1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 양수, 즉 0보다 크므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\cdot(2k^2-3k+1)\ge0$에서 $k^2-5k\le0$

$k(k-5)\le0$ $\therefore 0\le k\le5$

(ii) $f(0)=2k^2-3k+1>0$에서 $(2k-1)(k-1)>0$

$\therefore k<\frac{1}{2}$ 또는 $k>1$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k+1$이므로

$k+1>0$ $\therefore k>-1$

(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는

$0\le k<\frac{1}{2}$ 또는 $1<k\le5$

따라서 정수 k는 0, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

다른 풀이

이차방정식 $x^2-2(k+1)x+2k^2-3k+1=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 양수이려면

(i) $\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\cdot(2k^2-3k+1)\ge0$에서 $k^2-5k\le0$

$k(k-5)\le0$ $\therefore 0\le k\le5$

(ii) $\alpha+\beta=2(k+1)>0$ $\therefore k>-1$

(iii) $\alpha\beta=2k^2-3k+1>0$, $(2k-1)(k-1)>0$

$\therefore k<\frac{1}{2}$ 또는 $k>1$

(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는

$0\le k<\frac{1}{2}$ 또는 $1<k\le5$

따라서 정수 k는 0, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 답 ③

626

이차함수 $y=x^2+mx+2$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 만나는 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 선분 AB 위에 점 $(3, 2)$가 있으므로 이차방정식 $x^2+mx+2=x-1$의 두 근 사이(두 근 포함)에 3이 있어야 한다.

이차방정식 $x^2+(m-1)x+3=0$에서 $f(x)=x^2+(m-1)x+3$이라 하면 $f(3)\le0$이어야 하므로

$f(3)=9+3(m-1)+3\le0$

$3m+9\le0$ $\therefore m\le-3$

따라서 정수 m의 최댓값은 -3이다. 답 ②

627

$x+y+z=4$에서 $x+y=4-z$ …… ㉠

$xy+yz+zx=5$에서

$xy=5-(x+y)z=5-(4-z)z=z^2-4z+5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-(4-z)t+z^2-4z+5=0$의 두 실근이다.
이때, x, y는 실수이므로 이차방정식 $t^2-(4-z)t+z^2-4z+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(4-z)\}^2-4\cdot1\cdot(z^2-4z+5)\geq0$
$3z^2-8z+4\leq0$, $(3z-2)(z-2)\leq0$
$\therefore \frac{2}{3}\leq z\leq2$
따라서 $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=2$이므로
$30(\alpha+\beta)=30\cdot\left(\frac{2}{3}+2\right)=80$ 답 80

628

$|2x+a|\leq3$에서 $-3\leq2x+a\leq3$
$\therefore \frac{-3-a}{2}\leq x\leq\frac{3-a}{2}$ ...... ㉠
가
해가 ㉠이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$\left(x+\frac{3+a}{2}\right)\left(x-\frac{3-a}{2}\right)\leq0$
$\therefore x^2+ax-\frac{9-a^2}{4}\leq0$ ...... ㉡
나
㉡이 $x^2+x+b\leq0$과 같으므로
$a=1$, $b=-\frac{9-a^2}{4}$
$\therefore a=1$, $b=-2$
$\therefore a^2+b^2=1^2+(-2)^2=5$
다

단계	채점 요소	비율
가	부등식 $|2x+a|\leq3$의 해 구하기	30%
나	이차부등식 세우기	30%
다	a^2+b^2의 값 구하기	40%

답 5

629

$f(x)=x^2-2kx-k^2+3k=(x-k)^2-2k^2+3k$라 하면
$0\leq x\leq2$에서 $(f(x)$의 최솟값$)\geq0$이어야 한다.
(i) $k<0$일 때
$f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 가지므로
$f(0)=-k^2+3k\geq0$에서 $k^2-3k\leq0$
$k(k-3)\leq0$ $\therefore 0\leq k\leq3$
그런데 $k<0$이므로 실수 k의 값은 존재하지 않는다.
가
(ii) $0\leq k<2$일 때
$f(x)$는 $x=k$에서 최솟값을 가지므로
$f(k)=-2k^2+3k\geq0$에서 $2k^2-3k\leq0$
$k(2k-3)\leq0$ $\therefore 0\leq k\leq\frac{3}{2}$
그런데 $0\leq k<2$이므로 실수 k의 값의 범위는
$0\leq k\leq\frac{3}{2}$
나
(iii) $k\geq2$일 때
$f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값을 가지므로
$f(2)=4-4k-k^2+3k\geq0$에서 $k^2+k-4\leq0$
$\therefore \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\leq k\leq\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$
그런데 $k\geq2$이므로 실수 k의 값은 존재하지 않는다.
다
(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는
$0\leq k\leq\frac{3}{2}$
라

단계	채점 요소	비율
가	$k<0$일 때, 실수 k의 값의 범위 구하기	30%
나	$0\leq k<2$일 때, 실수 k의 값의 범위 구하기	30%
다	$k\geq2$일 때, 실수 k의 값의 범위 구하기	30%
라	주어진 이차부등식을 만족시키는 실수 k의 값의 범위 구하기	10%

답 $0\leq k\leq\frac{3}{2}$

10 평면좌표

개념 콕콕
본문 p. 107

630
(1) $\overline{AB}=|-4-3|=7$

(2) 점 R의 좌표를 x라 하면 $|x-5|=3$에서 $x-5=\pm3$

$\therefore x=2$ 또는 $x=8$

$\therefore$ R(2) 또는 R(8)

(3) 점 B의 좌표를 x라 하면 $|x-2|=6$에서 $x-2=\pm6$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=8$

$\therefore$ B(-4) 또는 B(8)

답 (1) 7
(2) R(2) 또는 R(8)
(3) B(-4) 또는 B(8)

631
(1) $\overline{OA}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$

(3) $\overline{CD}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{-2-(-4)\}^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

답 (1) 5 (2) $\sqrt{10}$ (3) $2\sqrt{2}$

632
(1) P$\left(\dfrac{2\cdot4+3\cdot(-1)}{2+3}\right)$ $\therefore$ P(1)

(2) Q$\left(\dfrac{2\cdot4-1\cdot(-1)}{2-1}\right)$ $\therefore$ Q(9)

(3) M$\left(\dfrac{-1+4}{2}\right)$ $\therefore$ M$\left(\dfrac{3}{2}\right)$

답 (1) P(1) (2) Q(9) (3) M$\left(\dfrac{3}{2}\right)$

633
$p=\dfrac{3\cdot6+2\cdot(-4)}{3+2}=2$, $q=\dfrac{3\cdot6-2\cdot(-4)}{3-2}=26$

$\therefore p+q=2+26=28$

답 28

634
(1) P$\left(\dfrac{3\cdot4+2\cdot(-1)}{3+2}, \dfrac{3\cdot3+2\cdot(-2)}{3+2}\right)$ $\therefore$ P$(2, 1)$

(2) Q$\left(\dfrac{2\cdot4-1\cdot(-1)}{2-1}, \dfrac{2\cdot3-1\cdot(-2)}{2-1}\right)$ $\therefore$ Q$(9, 8)$

(3) R$\left(\dfrac{1\cdot4-2\cdot(-1)}{1-2}, \dfrac{1\cdot3-2\cdot(-2)}{1-2}\right)$ $\therefore$ R$(-6, -7)$

답 (1) P$(2, 1)$ (2) Q$(9, 8)$ (3) R$(-6, -7)$

635
선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-3+a}{2}, \dfrac{7+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{a-3}{2}, 4\right)$

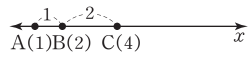
이 점의 좌표가 $(1, b)$이므로 $\dfrac{a-3}{2}=1$, $4=b$

따라서 $a=5$, $b=4$이므로

$a+b=5+4=9$

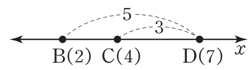
답 9

636
(1) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$이므로 점 B는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이다.



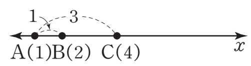
$\therefore m=1$, $n=2$

(2) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}:\overline{CD}=5:3$이므로 점 D는 선분 BC를 $5:3$으로 외분하는 점이다.



$\therefore m=5$, $n=3$

(3) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}:\overline{AC}=1:3$이므로 점 A는 선분 BC를 $1:3$으로 외분하는 점이다.



$\therefore m=1$, $n=3$

답 (1) $m=1$, $n=2$ (2) $m=5$, $n=3$ (3) $m=1$, $n=3$

637
(1) G$\left(\dfrac{2+(-1)+(-4)}{3}, \dfrac{3+2+(-2)}{3}\right)$ $\therefore$ G$(-1, 1)$

(2) G$\left(\dfrac{5+(-2)+1}{3}, \dfrac{1+6+(-3)}{3}\right)$ $\therefore$ G$\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

답 (1) G$(-1, 1)$ (2) G$\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

638
삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-a+2+1}{3}, \dfrac{1+4+b}{3}\right)=\left(\dfrac{-a+3}{3}, \dfrac{b+5}{3}\right)$

이 점의 좌표가 $(0, 1)$이므로

$\dfrac{-a+3}{3}=0$, $\dfrac{b+5}{3}=1$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$a+b=3+(-2)=1$

답 1

유형 콕콕
본문 p. 108~111

639 ④	**640** ③	**641** 10	**642** ⑤	**643** ②	**644** ①
645 ④	**646** ②	**647** C$(2\sqrt{3}, -2)$	**648** ④	**649** ⑤	
650 7	**651** ④	**652** ②	**653** 3	**654** ①	**655** ④
656 $\dfrac{2}{5}<t<\dfrac{2}{3}$		**657** ④	**658** ④	**659** ②	**660** ①
661 ①	**662** C$(2, 2\sqrt{3})$, D$(0, 0)$				

639
두 점 A$(a+2, -1)$, B$(4, a-3)$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\{4-(a+2)\}^2+\{(a-3)-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{(-a+2)^2+(a-2)^2}$

$=\sqrt{2(a-2)^2}=\sqrt{10}$

양변을 제곱하면 $2(a-2)^2=10$

$2(a^2-4a+4)=10$, $a^2-4a+4=5$

$\therefore a^2-4a-1=0$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 4이다.

답 ④

640

$\overline{AB}=2\overline{CD}$에서 $\overline{AB}^2=4\overline{CD}^2$이고

$\overline{AB}=\sqrt{(1-a)^2+(-a+1)^2}=\sqrt{2(a-1)^2}$

$\overline{CD}=\sqrt{(2-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{8}$

이므로

$2(a^2-2a+1)=4\cdot 8$, $a^2-2a+1=16$

$a^2-2a-15=0$, $(a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

답 ③

641

점 P(a, b)가 직선 $x-y+2=0$, 즉 $y=x+2$ 위의 점이므로

$b=a+2$ …… ㉠

㉮

또한 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+1)^2=(a-5)^2+(b-3)^2$

$a^2-2a+b^2+2b+2=a^2-10a+b^2-6b+34$

$\therefore a+b=4$ …… ㉡

㉯

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

$\therefore a^2+b^2=1^2+3^2=10$

㉰

단계	채점 요소	비율
㉮	점 P가 직선 $y=x+2$ 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40%
㉯	$\overline{AP}=\overline{BP}$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40%
㉰	a^2+b^2의 값 구하기	20%

답 10

642

점 P의 좌표를 P$(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-3)^2+3^2=(a-1)^2+(-1)^2$

$a^2-6a+18=a^2-2a+2$

$4a=16$, $a=4$ $\quad\therefore$ P$(4, 0)$

또한 점 Q의 좌표를 Q$(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-3)^2+(b+3)^2=(-1)^2+(b-1)^2$

$b^2+6b+18=b^2-2b+2$

$8b=-16$, $b=-2$ $\quad\therefore$ Q$(0, -2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

답 ⑤

643

점 P의 좌표를 P$(0, a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=1^2+a^2+(-4)^2+(a-2)^2$

$=1+a^2+16+a^2-4a+4$

$=2a^2-4a+21$

$=2(a^2-2a+1)+19$

$=2(a-1)^2+19$

따라서 $a=1$일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 19이다.

답 ②

644

점 P(p, q)가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$q=2p$ …… ㉠

또한 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(p+2)^2+(q+3)^2=(p-4)^2+(q-3)^2$

$p^2+4p+4+q^2+6q+9=p^2-8p+16+q^2-6q+9$

$12p+12q=12$ $\quad\therefore p+q=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$

$\therefore p-q=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

답 ①

645

삼각형 ABC의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$\overline{AB}^2=(1-0)^2+(4-0)^2=17$

$\overline{BC}^2=(5-1)^2+(3-4)^2=17$

$\overline{CA}^2=(0-5)^2+(0-3)^2=34$

이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형이다.

답 ④

646

삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$(a-6)^2+a^2=a^2+(a-3)^2$

$2a^2-12a+36=2a^2-6a+9$

$6a=27$ $\quad\therefore a=\frac{9}{2}$

답 ②

647

점 C의 좌표를 C(x, y)라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$

$(2\sqrt{3})^2+2^2=(x-2\sqrt{3})^2+(y-2)^2$

$x^2-4\sqrt{3}x+y^2-4y=0$ …… ㉠

또한 $\overline{AB}=\overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(2\sqrt{3})^2+2^2=x^2+y^2$

$x^2+y^2=16$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $-4\sqrt{3}x-4y=-16$

$\sqrt{3}x+y=4$ $\quad\therefore y=-\sqrt{3}x+4$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-\sqrt{3}x+4)^2=16$, $4x^2-8\sqrt{3}x+16=16$

$x^2-2\sqrt{3}x=0$, $x(x-2\sqrt{3})=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2\sqrt{3}$

이때, 점 C는 제4사분면 위의 점이므로 점 C의 좌표는

C$(2\sqrt{3}, -2)$

답 C$(2\sqrt{3}, -2)$

648

선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표가 $(4, 2)$이므로

$\frac{2\cdot(-2)+3\cdot a}{2+3}=4$, $\frac{2\cdot b+3\cdot(-6)}{2+3}=2$

$\frac{-4+3a}{5}=4$, $\frac{2b-18}{5}=2$

$-4+3a=20$, $2b-18=10$

$\therefore a=8$, $b=14$

$\therefore a+b=8+14=22$ 답 ④

649
선분 AB의 중점의 좌표가 $(2,\ 1)$이므로

$\frac{a-3}{2}=2,\ \frac{4+b}{2}=1$

$\therefore a=7,\ b=-2$

$\therefore a+b=7+(-2)=5$ 답 ⑤

650
선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{m\cdot 2+n\cdot(-5)}{m+n},\ \frac{m\cdot 4+n\cdot(-3)}{m+n}\right)=\left(\frac{2m-5n}{m+n},\ \frac{4m-3n}{m+n}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로 y좌표는 0이다.

$4m-3n=0 \qquad \therefore 4m=3n$

이때, m과 n은 서로소인 자연수이므로

$m=3,\ n=4$

$\therefore m+n=3+4=7$ 답 7

651
선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표가 $(4,\ b)$이므로

$\frac{3\cdot(a+1)-2\cdot(a-1)}{3-2}=4,\ \frac{3\cdot(a+4)-2\cdot 2}{3-2}=b$

$a+5=4,\ 3a+8=b$

$\therefore a=-1,\ b=5$

$\therefore a+b=-1+5=4$ 답 ④

652
선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot(-2)-2\cdot 2}{1-2},\ \frac{1\cdot 5-2\cdot 4}{1-2}\right)=(6,\ 3)$

따라서 $x=6,\ y=3$이므로

$xy=6\cdot 3=18$ 답 ②

653
선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot b-1\cdot a}{3-1},\ \frac{3\cdot 1-1\cdot 2}{3-1}\right)=\left(\frac{3b-a}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로 x좌표는 0이다.

$3b-a=0 \qquad \therefore a=3b$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{3b}{b}=3$ 답 3

654
선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{1\cdot 6+2\cdot 1}{1+2},\ \frac{1\cdot 7+2\cdot(-3)}{1+2}\right) \qquad \therefore P\left(\frac{8}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

또한 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{1\cdot 6-2\cdot 1}{1-2},\ \frac{1\cdot 7-2\cdot(-3)}{1-2}\right) \qquad \therefore Q(-4,\ -13)$

즉, 선분 PQ의 중점 M의 좌표는

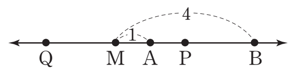
$M\left(\frac{\frac{8}{3}+(-4)}{2},\ \frac{\frac{1}{3}+(-13)}{2}\right) \qquad \therefore M\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{19}{3}\right)$

따라서 $a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{19}{3}$이므로

$a+b=-\frac{2}{3}+\left(-\frac{19}{3}\right)=-7$

다른 풀이

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 중점 M은 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점이므로



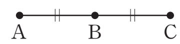
$M\left(\frac{1\cdot 6-4\cdot 1}{1-4},\ \frac{1\cdot 7-4\cdot(-3)}{1-4}\right) \qquad \therefore M\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{19}{3}\right)$

따라서 $a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{19}{3}$이므로

$a+b=-\frac{2}{3}+\left(-\frac{19}{3}\right)=-7$ 답 ①

655
점 C가 선분 AB의 연장선 위에 있고 $\overline{AC}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:1$

즉, 점 B는 선분 AC의 중점이므로



$\frac{-7+a}{2}=3,\ \frac{3+b}{2}=2$

따라서 $a=13,\ b=1$이므로

$a+b=13+1=14$

다른 풀이

점 C가 선분 AB의 연장선 위에 있고 $\overline{AC}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$이므로 점 C는 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이다.

그러므로 점 C의 좌표는

$C\left(\frac{2\cdot 3-1\cdot(-7)}{2-1},\ \frac{2\cdot 2-1\cdot 3}{2-1}\right) \qquad \therefore C(13,\ 1)$

따라서 $a=13,\ b=1$이므로

$a+b=13+1=14$ 답 ④

656
$t\overline{AC}=(2-t)\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=(2-t):t$이므로 점 C는 선분 AB를 $(2-t):t$로 내분하는 점이다. 즉,

$C\left(\frac{(2-t)\cdot(-3)+t\cdot 6}{(2-t)+t},\ \frac{(2-t)\cdot 1+t\cdot(-4)}{(2-t)+t}\right)$

$\therefore C\left(\frac{9t-6}{2},\ \frac{2-5t}{2}\right)$

이때, 점 C가 제3사분면 위에 존재하므로

$\frac{9t-6}{2}<0,\ \frac{2-5t}{2}<0$

$\frac{9t-6}{2}<0$에서 $t<\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\frac{2-5t}{2}<0$에서 $t>\frac{2}{5}$ …… ㉡

$0<t<2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $\frac{2}{5}<t<\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{5}<t<\frac{2}{3}$

657
삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2,\ -2)$이므로

$\frac{3+a-1}{3}=2,\ \frac{-2+1+2b+3}{3}=-2$

$a+2=6,\ 2b+2=-6$

$\therefore a=4,\ b=-4$

$\therefore a+b=4+(-4)=0$ 답 ④

658

점 C의 좌표를 $C(x, y)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, 2)$이므로

$\frac{-1+0+x}{3}=3,\ \frac{2+6+y}{3}=2$

$x-1=9,\ y+8=6 \quad \therefore x=10,\ y=-2$

따라서 점 C의 좌표는 $C(10, -2)$이다. 답 ④

659

세 점 $A(a, b)$, $B(1, 3)$, $C(2, 2)$에 대하여 선분 AB의 중점이 M이고, 선분 CM을 $2:1$로 내분하는 점이 G이므로 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

이때, 점 G의 좌표가 $G(4, 5)$이므로

$\frac{a+1+2}{3}=4,\ \frac{b+3+2}{3}=5$

$a+3=12,\ b+5=15$

$\therefore a=9,\ b=10$

$\therefore a+b=9+10=19$ 답 ②

660

평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{a-1}{2}=\frac{3+4}{2},\ \frac{3+b}{2}=\frac{4-6}{2}$

$a-1=7,\ 3+b=-2$

$\therefore a=8,\ b=-5$

$\therefore a+b=8+(-5)=3$ 답 ①

661

꼭짓점 D의 좌표를 $D(x, y)$라 하면 평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-1+3}{2}=\frac{5+x}{2},\ \frac{1+6}{2}=\frac{3+y}{2}$

$2=5+x,\ 7=3+y$

$\therefore x=-3,\ y=4$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $D(-3, 4)$이다. 답 ①

662

두 꼭짓점 C, D의 좌표를 각각 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$라 하자. ㉮

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하고 그 점의 좌표는 $(3, \sqrt{3})$이다.

이때, 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$이므로

$\frac{4+x_1}{2}=3,\ \frac{y_1}{2}=\sqrt{3} \quad \therefore x_1=2,\ y_1=2\sqrt{3}$

$\therefore C(2, 2\sqrt{3})$ ㉯

또한 선분 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{6+x_2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+y_2}{2}\right)$이므로

$\frac{6+x_2}{2}=3,\ \frac{2\sqrt{3}+y_2}{2}=\sqrt{3} \quad \therefore x_2=0,\ y_2=0$

$\therefore D(0, 0)$ ㉰

단계	채점 요소	비율
㉮	두 꼭짓점 C, D의 좌표를 미지수를 이용하여 나타내기	20%
㉯	점 C의 좌표 구하기	40%
㉰	점 D의 좌표 구하기	40%

답 $C(2, 2\sqrt{3})$, $D(0, 0)$

실력 콕콕

본문 p.112~113

663 4	664 ④	665 ③	666 $4\sqrt{5}$	667 ③	668 4
669 ⑤	670 ②	671 -17	672 $A(0, 3)$		673 ④
674 ②	675 ③	676 ④	677 $P(3, 3)$, 14		678 10

663

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, 6)$에 대하여 $\overline{AB}=4\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(6-y_1)^2}=4\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(x_2-x_1)^2+(6-y_1)^2=32$

이때, $(x_2-x_1)^2=|x_2-x_1|^2=4^2=16$이므로

$16+(6-y_1)^2=32,\ (6-y_1)^2=16$

$\therefore |6-y_1|=4$ 답 4

664

세 점 $A(2, a)$, $B(a, -5)$, $C(2, -1)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{(a-2)^2+(-5-a)^2}$

$=\sqrt{a^2-4a+4+a^2+10a+25}$

$=\sqrt{2a^2+6a+29}$

$\overline{BC}=\sqrt{(2-a)^2+(-1+5)^2}$

$=\sqrt{a^2-4a+20}$

이때, $\overline{AB}<\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2<\overline{BC}^2$이므로

$2a^2+6a+29<a^2-4a+20$

$a^2+10a+9<0,\ (a+9)(a+1)<0$

$\therefore -9<a<-1$

따라서 구하는 정수 a는 $-8, -7, \cdots, -2$의 7개이다. 답 ④

665

두 점 $A(-k+2, 5)$, $B(-2, k+3)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{(-2+k-2)^2+(k+3-5)^2}$

$=\sqrt{(k-4)^2+(k-2)^2}$

$=\sqrt{k^2-8k+16+k^2-4k+4}$

$=\sqrt{2k^2-12k+20}$

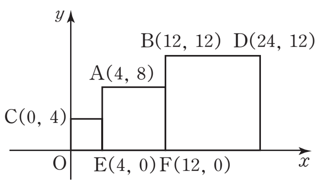
$=\sqrt{2(k^2-6k+9)+2}$

$=\sqrt{2(k-3)^2+2}$

따라서 $k=3$일 때, 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. 답 ③

666

오른쪽 그림에서 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이, 즉 $\overline{OC}=4$이므로 점 E의 좌표는 $E(4, 0)$이다.



또한 점 $D(24, 12)$에서 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12이므로 점 F의 좌표는 $F(12, 0)$이다.

$\therefore B(12, 12)$

한편, $\overline{EF}=12-4=8$이므로 점 A의 좌표는 $A(4, 8)$이다.

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(12-4)^2+(12-8)^2}$

$=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

답 $4\sqrt{5}$

667

점 $P(a, b)$가 직선 $y=x-4$ 위의 점이므로

$b=a-4$ …… ㉠

또한 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+3)^2=(a-5)^2+(b-1)^2$

$a^2-2a+1+b^2+6b+9=a^2-10a+25+b^2-2b+1$

$8a+8b=16 \quad \therefore a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore a^2+b^2=3^2+(-1)^2=10$

답 ③

668

세 점 $A(2, 2)$, $B(3, 4)$, $C(4, k)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(4-2)^2+(k-2)^2}=\sqrt{k^2-4k+8}$

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$

$5=k^2-4k+8$, $k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0 \quad \therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 구하는 모든 k의 값의 합은 $1+3=4$

답 4

669

수직선 위의 두 점 A, B의 좌표를 각각 a, b라 하면 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점이 원점 O이므로

$\frac{1\cdot b-3\cdot a}{1-3}=0$, $\frac{b-3a}{-2}=0 \quad \therefore b=3a$ …… ㉠

또한 선분 AB를 $5:1$로 외분하는 점 C의 좌표가 21이므로

$\frac{5\cdot b-1\cdot a}{5-1}=21$, $\frac{5b-a}{4}=21 \quad \therefore 5b-a=84$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=18$

$\therefore \overline{AB}=|b-a|=|18-6|=12$

답 ⑤

670

$\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$에서 점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{2\cdot 4+1\cdot(-3)}{2+1}, \frac{2\cdot k+1\cdot 4}{2+1}\right) \quad \therefore P\left(\frac{5}{3}, \frac{2k+4}{3}\right)$

이때, 점 P는 x축 위의 점이므로 y좌표가 0이다.

$2k+4=0 \quad \therefore k=-2$

답 ②

671

점 C가 선분 AB의 연장선 위에 있고 $3\overline{AC}=2\overline{BC}$에서

$\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$이므로 점 C는 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점이다.

그러므로 점 C의 좌표는

$C\left(\frac{2\cdot 1-3\cdot(-3)}{2-3}, \frac{2\cdot 6-3\cdot 2}{2-3}\right) \quad \therefore C(-11, -6)$

따라서 $a=-11$, $b=-6$이므로

$a+b=-11+(-6)=-17$

답 -17

672

세 점 A, B, C의 좌표를 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하자.

변 AB의 중점의 좌표가 $D(-1, 1)$이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=-1$, $\frac{y_1+y_2}{2}=1$

$\therefore x_1+x_2=-2$, $y_1+y_2=2$ …… ㉠

변 BC의 중점의 좌표가 $E(1, 0)$이므로

$\frac{x_2+x_3}{2}=1$, $\frac{y_2+y_3}{2}=0$

$\therefore x_2+x_3=2$, $y_2+y_3=0$ …… ㉡

변 CA의 중점의 좌표가 $F(2, 2)$이므로

$\frac{x_3+x_1}{2}=2$, $\frac{y_3+y_1}{2}=2$

$\therefore x_3+x_1=4$, $y_3+y_1=4$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(x_1+x_2+x_3)=4$, $2(y_1+y_2+y_3)=6$

$\therefore x_1+x_2+x_3=2$, $y_1+y_2+y_3=3$ …… ㉣

㉡을 ㉣에 대입하면 $x_1=0$, $y_1=3$

따라서 점 A의 좌표는 $A(0, 3)$이다.

답 $A(0, 3)$

673

두 점 B, C의 좌표를 각각 $B(a, b)$, $C(c, d)$라 하면 두 변 AB, AC의 중점의 좌표가 각각 $M(-3, 6)$, $N(3, 3)$이므로

$\frac{-6+a}{2}=-3$, $\frac{0+b}{2}=6 \quad \therefore a=0$, $b=12$

$\frac{-6+c}{2}=3$, $\frac{0+d}{2}=3 \quad \therefore c=12$, $d=6$

따라서 세 점 $A(-6, 0)$, $B(0, 12)$, $C(12, 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$G\left(\frac{-6+0+12}{3}, \frac{0+12+6}{3}\right) \quad \therefore G(2, 6)$

따라서 $x=2$, $y=6$이므로

$x+y=2+6=8$

답 ④

674

점 P는 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{2\cdot 2-1\cdot 1}{2-1}, \frac{2\cdot 4-1\cdot 2}{2-1}\right) \quad \therefore P(3, 6)$

점 Q는 선분 BC를 $2:1$로 외분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{2\cdot 3-1\cdot 2}{2-1}, \frac{2\cdot 3-1\cdot 4}{2-1}\right) \quad \therefore Q(4, 2)$

점 R는 선분 CA를 $2:1$로 외분하는 점이므로 점 R의 좌표는

$R\left(\frac{2\cdot 1-1\cdot 3}{2-1}, \frac{2\cdot 2-1\cdot 3}{2-1}\right) \quad \therefore R(-1, 1)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+4-1}{3}, \frac{6+2+1}{3}\right)=(2, 3)$

다른 풀이

삼각형 ABC와 삼각형 PQR의 무게중심이 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{2+4+3}{3}\right)=(2, 3)$ 답 ②

675

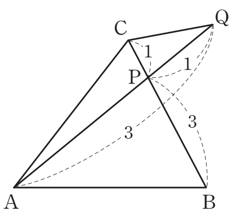
점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\frac{1+3+5}{3}=a$, $\frac{-2+6+2}{3}=b$

$\therefore a=3, b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$ 답 ③

676



삼각형 ABC에서 변 BC를 3 : 1로 내분하는 점 P와 선분 AP를 3 : 1로 외분하는 점 Q의 위치는 오른쪽 그림과 같다.

이때, $\overline{AP}:\overline{PQ}=2:1$이므로

$\triangle APC:\triangle CPQ=\overline{AP}:\overline{PQ}=2:1$

$\therefore \triangle CPQ=\frac{1}{2}\triangle APC$

또한 $\overline{BC}:\overline{PC}=4:1$이므로

$\triangle ABC:\triangle APC=\overline{BC}:\overline{PC}=4:1$

$\therefore \triangle APC=\frac{1}{4}\triangle ABC$

따라서 $\triangle CPQ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\triangle ABC=\frac{1}{8}\triangle ABC$이므로

$\frac{\triangle ABC}{\triangle CPQ}=8$ 답 ④

677

점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $P(a, a)$라 하면

가

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(a-2)^2+(a-1)^2+(a-6)^2+(a-3)^2\\&=a^2-4a+a^2-2a+5+a^2-12a+a^2-6a+45\\&=4a^2-24a+50\\&=4(a^2-6a+9)+14=4(a-3)^2+14\end{aligned}$$

나

따라서 $a=3$, 즉 점 P의 좌표가 $P(3, 3)$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 14이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	미지수를 이용하여 점 P의 좌표 나타내기	30%
나	$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 식 세우기	40%
다	점 P의 좌표와 그때의 최솟값 구하기	30%

답 $P(3, 3)$, 14

678

마름모의 성질에 의하여 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{0+p}{2}=\frac{1+q}{2}$, $\frac{4+0}{2}=\frac{1+r}{2}$

$\therefore q+1=p, r=3$ …… ㉠

가

또한 마름모의 정의에 의하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$

$1^2+(-3)^2=(p-1)^2+(-1)^2$

$(p-1)^2=9 \qquad \therefore p=4\ (\because p>0)$ …… ㉡

나

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=4$, $q=3$, $r=3$

$\therefore p+q+r=4+3+3=10$

다

단계	채점 요소	비율
가	마름모의 대각선의 성질 이용하기	40%
나	마름모의 정의 이용하기	40%
다	$p+q+r$의 값 구하기	20%

답 10

11 직선의 방정식

개념 콕콕

본문 p.115~116

679

(1) 기울기가 3이고 y절편이 2인 직선의 방정식은

$y=3x+2$

(2) 기울기가 0이고 y절편이 5인 직선의 방정식은

$y=5$

답 (1) $y=3x+2$ (2) $y=5$

680

(1) 점 $(2,\ 4)$를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-4=3(x-2)\qquad \therefore y=3x-2$

(2) 점 $(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-(-1)=-2(x-2)\qquad \therefore y=-2x+3$

(3) 점 $(2,\ 3)$을 지나고 기울기가 0인 직선의 방정식은

$y-3=0\cdot(x-2)\qquad \therefore y=3$

답 (1) $y=3x-2$ (2) $y=-2x+3$ (3) $y=3$

681

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$	직선의 기울기	직선의 방정식
(1) $A(0,\ 0)$, $B(2,\ 1)$	$\frac{1-0}{2-0}=\frac{1}{2}$	$y=\frac{1}{2}x$
(2) $A(1,\ 0)$, $B(3,\ -3)$	$\frac{-3-0}{3-1}=-\frac{3}{2}$	$y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$
(3) $A(-3,\ 2)$, $B(6,\ 2)$	$\frac{2-2}{6-(-3)}=0$	$y=2$

답 풀이 참조

682

(1) 두 점 $(-2,\ 3)$, $(3,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=3$

(2) 두 점 $(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=0$

답 (1) $y=3$ (2) $y=0$

683

(1) x절편이 5이고 y절편이 3인 직선의 방정식은

$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$

(2) x절편이 -3이고 y절편이 3인 직선의 방정식은

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$

답 (1) $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$ (2) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$

684

(1) 점 $(1,\ 5)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y=5$

(2) 점 $(-1,\ -3)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은

$x=-1$

(3) 점 $(2,\ 5)$를 지나고 x축에 수직인 직선의 방정식은

$x=2$

(4) 점 $(4,\ -3)$을 지나고 y축에 수직인 직선의 방정식은

$y=-3$

답 (1) $y=5$ (2) $x=-1$ (3) $x=2$ (4) $y=-3$

685

(1) $2\neq-3$이므로 두 직선은 한 점에서 만난다.

(2) $-3=-3$, $2\neq-7$이므로 두 직선은 서로 평행하다.

(3) $3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$이므로 두 직선은 서로 수직이다.

답 (1) 한 점에서 만난다. (2) 평행하다. (3) 수직이다.

686

(1) $\frac{2}{2}\neq\frac{1}{-1}$이므로 두 직선은 한 점에서 만난다.

(2) $3\cdot2+(-2)\cdot3=0$이므로 두 직선은 서로 수직이다.

(3) $\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}=\frac{3}{6}$이므로 두 직선은 일치한다.

답 (1) 한 점에서 만난다. (2) 수직이다. (3) 일치한다.

687

두 직선의 방정식	두 직선이 평행할 조건	a의 값
(1) $y=ax+2$, $y=3x+4$	$a=3$, $2\neq4$	3
(2) $y=ax$, $y=-7x+9$	$a=-7$, $0\neq9$	-7
(3) $x-ay=0$, $2x-3y-6=0$	$\frac{1}{2}=\frac{-a}{-3}\neq\frac{0}{-6}$	$\frac{3}{2}$
(4) $5x+y-7=0$, $(a-3)x+4y-2=0$	$\frac{5}{a-3}=\frac{1}{4}\neq\frac{-7}{-2}$	23

답 풀이 참조

688

두 직선의 방정식	두 직선이 수직일 조건	a의 값
(1) $y=ax+2$, $y=3x+4$	$a\cdot3=-1$	$-\frac{1}{3}$
(2) $y=ax$, $y=-7x+9$	$a\cdot(-7)=-1$	$\frac{1}{7}$
(3) $x-ay=0$, $2x-3y-6=0$	$1\cdot2+(-a)\cdot(-3)=0$	$-\frac{2}{3}$
(4) $5x+y-7=0$, $(a-3)x+4y-2=0$	$5\cdot(a-3)+1\cdot4=0$	$\frac{11}{5}$

답 풀이 참조

689

(1) $3x+y-2=0$에서 $y=-3x+2$

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 -3이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-3\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-3x-5$

(2) 직선 $y=-2x+7$과 평행한 직선의 기울기는 -2이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-2\{x-(-4)\}$

$\therefore y=-2x-9$

(3) $x+3y-6=0$에서 $y=-\frac{1}{3}x+2$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 3이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=3(x-1)$

$\therefore y=3x-4$

(4) 직선 $y=2x+1$과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x-1$

답 (1) $y=-3x-5$ (2) $y=-2x-9$ (3) $y=3x-4$ (4) $y=-\frac{1}{2}x-1$

690

$l: ax+by+c=0$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\lvert c\rvert$	d
(1) $x-y-2=0$	$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
(2) $6x-8y-3\sqrt{2}=0$	$\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$	$3\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{10}$

답 풀이 참조

691

$l: ax+by+c=0$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\lvert a-2b+c\rvert$	d
(1) $2x-y-2=0$	$\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$	$\lvert 2-2\cdot(-1)-2\rvert$ $=2$	$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$
(2) $5x-12y-3=0$	$\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$	$\lvert 5-2\cdot(-12)-3\rvert$ $=26$	$\frac{26}{13}=2$

답 풀이 참조

692

(1) $\frac{\lvert 1\cdot0-1\cdot2+4\rvert}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(2) 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$, 즉 $x-3y+6=0$과 점 $(2, 1)$ 사이의 거리는

$\frac{\lvert 1\cdot2-3\cdot1+6\rvert}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

답 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

693

(1) $\lvert 5-4\rvert=1$

(2) $\lvert 8-(-1)\rvert=9$

답 (1) 1 (2) 9

유형 콕콕

본문 p.117~123

694 ⑤ 695 ① 696 -5 697 ⑤ 698 ⑤
699 $y=x-1$ 700 ② 701 ⑤ 702 $x+2y=11$
703 ① 704 ④ 705 ① 706 ② 707 ⑤ 708 ④
709 ① 710 ① 711 25 712 ② 713 ④ 714 1
715 1 716 ③ 717 0 718 ③ 719 ②
720 -1 721 ④ 722 ③ 723 $x+5y-12=0$ 724 ②
725 ⑤ 726 ② 727 ③ 728 8 729 ③
730 $x+2y-5=0$ 또는 $x+2y+5=0$ 731 ⑤ 732 ②
733 ① 734 ⑤ 735 2

694

점 $(3, 2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-2=-2(x-3)$ $\quad\therefore y=-2x+8$

따라서 $a=-2$, $b=8$이므로

$a+b=-2+8=6$

답 ⑤

695

점 $(3, -1)$을 지나고 기울기가 $\tan 45°=1$인 직선의 방정식은

$y-(-1)=1\cdot(x-3)$ $\quad\therefore y=x-4$

즉, $x-y-4=0$이므로

$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-4\sqrt{2}=0$

따라서 $a=-\sqrt{2}$, $b=-4\sqrt{2}$이므로

$a+b=-\sqrt{2}+(-4\sqrt{2})=-5\sqrt{2}$

답 ①

696

두 점 $A(2, -5)$, $B(-1, 1)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot2}{1+2}, \frac{1\cdot1+2\cdot(-5)}{1+2}\right)=(1, -3)$

가

즉, 직선의 기울기가 2이고 점 $(1, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-3)=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-5$

나

따라서 y절편은 -5이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표 구하기	40%
나	직선의 방정식 구하기	40%
다	y절편 구하기	20%

답 -5

697

두 점 $(3, 2)$, $(-1, -6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{-6-2}{-1-3}(x-3)$ $\quad\therefore y=2x-4$

두 점 $(a, -8)$, $(5, b)$가 직선 $y=2x-4$ 위의 점이므로

$-8=2a-4$, $b=10-4=6$

따라서 $a=-2$, $b=6$이므로

$a+b=-2+6=4$

답 ⑤

698

$y-(-4)=\frac{2-(-4)}{-4-2}(x-2)$

$\therefore y=-x-2$

따라서 $a=-1$, $b=-2$이므로

$ab=-1\cdot(-2)=2$ 답 ⑤

699

두 점 $A(-6, -7)$, $B(4, 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot4+3\cdot(-6)}{2+3}, \frac{2\cdot3+3\cdot(-7)}{2+3}\right)=(-2, -3)$

따라서 두 점 $(-2, -3)$, $(2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

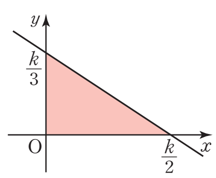
$y-(-3)=\frac{1-(-3)}{2-(-2)}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=x-1$ 답 $y=x-1$

700

직선 $2x+3y=k$에서 $\frac{2x}{k}+\frac{3y}{k}=1$

즉, x절편은 $\frac{k}{2}$, y절편은 $\frac{k}{3}$인 직선의 방정식이고 오른쪽 그림에서 삼각형의 넓이가 12이므로



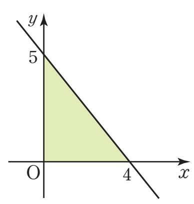
$\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{3}=12$, $k^2=144$

$\therefore k=12$ ($\because k>0$)

답 ②

701

직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$은 x절편이 4, y절편이 5이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot4\cdot5=10$

답 ⑤

702

y절편을 $a(a\neq0)$로 놓으면 x절편은 $2a$이므로 구하는 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$ $\therefore x+2y=2a$

이 직선이 점 $(3, 4)$를 지나므로

$3+2\cdot4=2a$ $\therefore a=\frac{11}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x+2y=11$ 답 $x+2y=11$

703

세 점 $A(2, 1)$, $B(a-3, 4)$, $C(6, a)$가 일직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{4-1}{(a-3)-2}=\frac{a-4}{6-(a-3)}$, 즉 $\frac{3}{a-5}=\frac{a-4}{9-a}$

$3(9-a)=(a-5)(a-4)$, $a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 모든 a의 값의 합은 $-1+7=6$ 답 ①

704

세 점 $A(k, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(-k, -1)$이 일직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{3-5}{-1-k}=\frac{-1-3}{-k-(-1)}$, 즉 $\frac{-2}{-1-k}=\frac{-4}{-k+1}$

$2k-2=4+4k$ $\therefore k=-3$ 답 ④

705

세 점 $A(1, -4)$, $B(a-3, -1)$, $C(7, a-1)$이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{-1-(-4)}{(a-3)-1}=\frac{(a-1)-(-4)}{7-1}$, 즉 $\frac{3}{a-4}=\frac{a+3}{6}$

$18=(a-4)(a+3)$, $a^2-a-30=0$

$(a+5)(a-6)=0$ $\therefore a=-5$ 또는 $a=6$

따라서 모든 a의 값의 합은 $-5+6=1$ 답 ①

706

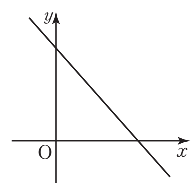
직선 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때, $ab>0$, $bc<0$이므로

$\frac{a}{b}>0$, $\frac{c}{b}<0$

$\therefore -\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$

즉, 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 ②

707

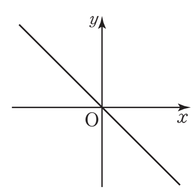
$bc=0$에서 $b=0$ 또는 $c=0$

그런데 $ab>0$이므로 $c=0$

직선 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x$

이때, $ab>0$이므로 $\frac{a}{b}>0$ $\therefore -\frac{a}{b}<0$

따라서 주어진 직선은 원점을 지나고 기울기가 음수이므로 오른쪽 그림과 같이 제2, 4사분면을 지난다.



답 ⑤

708

직선 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

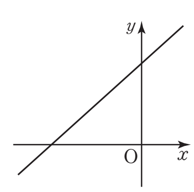
이때, $ab<0$에서 $\frac{a}{b}<0$이므로 $-\frac{a}{b}>0$

또한 $ab<0$, $ac>0$에서

$ab\cdot ac=a^2bc<0$이므로 $bc<0$ ($\because a^2>0$)

즉, $\frac{c}{b}<0$이므로 $-\frac{c}{b}>0$

주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 양수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이 직선은 제4사분면을 지나지 않는다. 답 ④

709

점 A를 지나면서 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 선분 BC의 중점을 지난다.
선분 BC의 중점의 좌표는
$\left(\frac{7+1}{2}, \frac{-5+3}{2}\right)=(4, -1)$
따라서 직선 l은 두 점 $(2, 3)$, $(4, -1)$을 지나므로
$y-3=\frac{-1-3}{4-2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-2x+7$

답 ①

710

직선 $y=ax$가 평행사변형 OABC의 넓이를 이등분하려면 평행사변형의 두 대각선의 교점, 즉 각 대각선의 중점을 지나야 한다.
이때, 대각선 BO의 중점의 좌표는
$\left(\frac{8+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right)=(4, 1)$
직선 $y=ax$는 원점과 점 $(4, 1)$을 지나므로
$1=4a$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

답 ①

711

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.
두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각
$\left(\frac{-2+(-5)}{2}, \frac{-2+(-3)}{2}\right)$, $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$
$\therefore \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $\left(3, \frac{7}{2}\right)$

가

즉, 구하는 직선은 두 점 $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $\left(3, \frac{7}{2}\right)$을 지나므로 직선의 기울기는
$\frac{\frac{7}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)}{3-\left(-\frac{7}{2}\right)}=\frac{12}{13}$

나

따라서 $p=13$, $q=12$이므로
$p+q=13+12=25$

다

단계	채점 요소	비율
가	두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표 각각 구하기	50%
나	직선의 기울기 구하기	30%
다	$p+q$의 값 구하기	20%

답 25

712

두 직선 $y=ax+b$, $y=2x+3$이 서로 평행하므로 $a=2$
따라서 직선 $y=2x+b$가 점 $(1, 3)$을 지나므로
$3=2+b$ $\quad\therefore b=1$
$\therefore ab=2\cdot 1=2$

답 ②

713

두 직선 $y=-3x+3$, $y=(2m+1)x+4$가 서로 평행하려면
$-3=2m+1$ $\quad\therefore m=-2$

답 ④

714

일반형을 표준형으로 바꾸어 위치 관계를 확인해 보자.
직선 $ax-y+1=0$에서 $y=ax+1$
직선 $(b-1)x-y-1=0$에서 $y=(b-1)x-1$
이때, 두 직선 $y=ax+1$, $y=(b-1)x-1$이 서로 평행하므로
$a=b-1$ $\quad\therefore a-b=-1$
$\therefore (a-b)^2=(-1)^2=1$

답 1

715

두 직선 $x+ay-1=0$, $(a-3)x-2y+1=0$이 서로 평행하므로
$\frac{1}{a-3}=\frac{a}{-2}\neq\frac{-1}{1}$에서
$-2=a(a-3)$, $a\neq 2$
$a^2-3a+2=0$, $a\neq 2$
$(a-1)(a-2)=0$, $a\neq 2$
$\therefore a=1$

답 1

716

두 직선 $ax+y+1=0$, $bx-2y-2=0$이 일치하므로
$\frac{a}{b}=\frac{1}{-2}=\frac{1}{-2}$ $\quad\therefore b=-2a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또한 두 직선 $ax+y+1=0$, $x+(b+3)y-1=0$이 서로 평행하므로
$\frac{a}{1}=\frac{1}{b+3}\neq\frac{1}{-1}$ $\quad\therefore a(b+3)=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면
$2a^2-3a+1=0$, $(2a-1)(a-1)=0$
$\therefore a=1$ ($\because$ a는 정수), $b=-2$
$\therefore ab=1\cdot(-2)=-2$

답 ③

717

$x+y=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$x-y+2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
$ax+y-a+1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
에서 두 직선 ㉠, ㉡은 서로 평행하지 않으므로 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.
(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행한 경우
$\frac{1}{a}=\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-a+1}$
이때, $a=1$이면 두 직선은 일치하므로 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우는 존재하지 않는다.
(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행한 경우
$\frac{1}{a}=\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{-a+1}$ $\quad\therefore a=-1$
(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=1$이므로
직선 ㉢이 점 $(-1, 1)$을 지나야 한다.
즉, $-a+1-a+1=0$ $\quad\therefore a=1$
(i)~(iii)에서 모든 실수 a의 값의 합은
$-1+1=0$

답 0

718

두 점 $A(4, 0)$, $B(0, 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-0}{0-4}=-\frac{3}{4}$

이므로 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$-\frac{3}{4}\cdot m=-1 \qquad \therefore m=\frac{4}{3}$

따라서 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 x절편이 3인 직선의 방정식은

$y=\frac{4}{3}(x-3)$, 즉 $y=\frac{4}{3}x-4$

$\therefore 4x-3y-12=0$

답 ③

719

두 직선 $ax-4y+1=0$, $(a-2)x+2y+3=0$이 서로 수직이려면

$a\cdot(a-2)+(-4)\cdot 2=0$

$a^2-2a-8=0$, $(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $-2+4=2$

답 ②

720

두 직선 $(k-2)x+10y-1=0$, $(k+1)x-4y+3=0$에 대하여

(i) 두 직선이 서로 평행하려면

$\frac{k-2}{k+1}=\frac{10}{-4}\neq\frac{-1}{3}$에서

$-4(k-2)=10(k+1)$, $-14k=2 \qquad \therefore k=-\frac{1}{7}$

$\therefore \alpha=-\frac{1}{7}$

가

(ii) 두 직선이 서로 수직이려면

$(k-2)\cdot(k+1)+10\cdot(-4)=0$

$k^2-k-42=0$, $(k+6)(k-7)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=7$

그런데 $\beta>0$이므로 $\beta=7$

나

(i), (ii)에서 $\alpha=-\frac{1}{7}$, $\beta=7$이므로

$\alpha\beta=-\frac{1}{7}\cdot 7=-1$

다

단계	채점 요소	비율
가	α의 값 구하기	40%
나	β의 값 구하기	40%
다	$\alpha\beta$의 값 구하기	20%

답 -1

721

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)=(-1, 1)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-3}{2-(-4)}=-\frac{2}{3}$

즉, 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(-1, 1)$을 지나고 기울기가 $\frac{3}{2}$이므로 그 방정식은

$y-1=\frac{3}{2}\{x-(-1)\} \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{5}{2}$이므로

$a+b=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$

답 ④

722

두 점 $A(0, -4)$, $B(6, 2)$로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형의 방정식은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식과 같다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{-4+2}{2}\right)=(3, -1)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-(-4)}{6-0}=1$

즉, 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(3, -1)$을 지나고 기울기가 -1이므로 그 방정식은

$y-(-1)=-1\cdot(x-3) \qquad \therefore y=-x+2$

다른 풀이

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\sqrt{(x-0)^2+\{y-(-4)\}^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2}$

$x^2+y^2+8y+16=x^2-12x+36+y^2-4y+4$

$12x+12y-24=0 \qquad \therefore x+y-2=0$

$\therefore y=-x+2$

답 ③

723

직선 $5x-y+5=0$에서 x절편은 -1, y절편은 5이므로

$A(-1, 0)$, $B(0, 5)$

가

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{0+5}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

또한 직선 $5x-y+5=0$, 즉 $y=5x+5$의 기울기는 5이므로 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$이다.

나

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{5}\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$\therefore x+5y-12=0$

다

단계	채점 요소	비율
가	두 점 A, B의 좌표 각각 구하기	20%
나	$\overline{AB}$의 중점의 좌표와 수직이등분선의 기울기 구하기	40%
다	$\overline{AB}$를 수직이등분하는 직선의 방정식 구하기	40%

답 $x+5y-12=0$

724

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y+3)k-(x-3y+6)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립하려면

$x+2y+3=0$, $x-3y+6=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$x=-\frac{21}{5}$, $y=\frac{3}{5}$
따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $\left(-\frac{21}{5}, \frac{3}{5}\right)$을 지나는데 점 $\left(-\frac{21}{5}, \frac{3}{5}\right)$은 제2사분면 위의 점이므로 반드시 제2사분면을 지난다.
답 ②

725
주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$2x-y-4=0$, $x-y+1=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$x=5$, $y=6$
즉, 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(5, 6)$을 지난다.
따라서 $a=5$, $b=6$이므로
$a+b=5+6=11$
답 ⑤

726
주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(2x-y)k+(x+2y-4)=0$ …… ㉠
㉠이 임의의 실수 k에 대하여 성립해야 하므로
$2x-y=0$, $x+2y-4=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{8}{5}$
따라서 점 P의 좌표는 $P\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$이고 직선 ㉠은 임의의 실수 k에 대하여 항상 점 $P\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$을 지나므로 점 P와 원점 사이의 거리는
$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{80}{25}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$
답 ②

727
주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(3x-2y-5)+k(2x+3y-1)=0$ (k는 실수) …… ㉠
으로 놓으면 이 직선이 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$\{3\cdot(-1)-2\cdot2-5\}+k\{2\cdot(-1)+3\cdot2-1\}=0$
$-12+3k=0$ $\quad\therefore k=4$
$k=4$를 ㉠에 대입하면
$(3x-2y-5)+4(2x+3y-1)=0$
$\therefore 11x+10y-9=0$
이 직선이 점 $(-11, a)$를 지나므로
$11\cdot(-11)+10a-9=0$
$\therefore a=13$
답 ③

728
주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x+3y-6)+k(2x-y-1)=0$ (단, k는 실수)
$\therefore (2k+1)x+(-k+3)y-k-6=0$ …… ㉠
직선 ㉠과 직선 $3x-5y+1=0$이 서로 평행하므로
$\frac{2k+1}{3}=\frac{-k+3}{-5}\neq\frac{-k-6}{1}$에서
$-5(2k+1)=3(-k+3)$, $-10k-5=-3k+9$
$7k=-14$ $\quad\therefore k=-2$
$k=-2$를 ㉠에 대입하여 정리하면
$3x-5y+4=0$ $\quad\therefore y=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$
따라서 이 직선의 y절편은 $\frac{4}{5}$이므로 $a=\frac{4}{5}$
$\therefore 10a=10\cdot\frac{4}{5}=8$
답 8

729
주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x+2y+3)+k(x+5y-11)=0$ (단, k는 실수)
$\therefore (k+1)x+(5k+2)y-11k+3=0$ …… ㉠
직선 ㉠과 직선 $x-y-4=0$이 서로 수직이므로
$(k+1)\cdot1+(5k+2)\cdot(-1)=0$
$-4k-1=0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{4}$
$k=-\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하여 정리하면
$\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{23}{4}=0$ $\quad\therefore 3x+3y+23=0$
답 ③

730
직선 $x+2y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$에 평행하므로 구하는 직선의 방정식을 $y=-\frac{1}{2}x+k$로 놓으면
$x+2y-2k=0$ …… ㉠
원점과 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로
$\frac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$, $|-2k|=5$ $\quad\therefore k=\pm\frac{5}{2}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$x+2y-5=0$ 또는 $x+2y+5=0$
답 $x+2y-5=0$ 또는 $x+2y+5=0$

731
원점과 주어진 직선 사이의 거리를 d라 하면
① $3x-2y-1=0 \Rightarrow d=\frac{|-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$
② $2x-3y+1=0 \Rightarrow d=\frac{|1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$
③ $3x+2y-3=0 \Rightarrow d=\frac{|-3|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$
④ $2x+3y+3=0 \Rightarrow d=\frac{|3|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$
⑤ $3x-2y-4=0 \Rightarrow d=\frac{|-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$
따라서 원점으로부터의 거리가 최대인 직선의 방정식은 ⑤이다.
답 ⑤

732
점 $(a, 5)$에서 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-2y+2=0$에 이르는 거리가 같으므로
$\frac{|2\cdot a+1\cdot5-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|1\cdot a-2\cdot5+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$|2a+4|=|a-8|$, $2a+4=\pm(a-8)$

$\therefore a=-12$ 또는 $a=\frac{4}{3}$

이때, a는 양수이므로 $a=\frac{4}{3}$ 답 ②

733

두 직선 $x+y-3=0$, $x+y-1=0$이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+y-3=0$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $x+y-1=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|1\cdot0+1\cdot3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ 답 ①

734

두 직선 $ax+3y-1=0$, $4x+(a-1)y-1=0$이 서로 평행하므로

$\frac{a}{4}=\frac{3}{a-1}\neq\frac{-1}{-1}$에서

$a(a-1)=12$, $a\neq4$

$a^2-a-12=0$, $a\neq4$

$(a+3)(a-4)=0$, $a\neq4$

$\therefore a=-3$

즉, 두 직선의 방정식은

$-3x+3y-1=0$, $4x-4y-1=0$

따라서 직선 $-3x+3y-1=0$ 위의 한 점 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$과 직선 $4x-4y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{\left|4\cdot0-4\cdot\frac{1}{3}-1\right|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{\left|-\frac{7}{3}\right|}{4\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{24}$ 답 ⑤

735

두 직선 $x+3y+1=0$, $x+3y+k=0$이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+3y+1=0$ 위의 한 점 $(-1, 0)$과 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리와 같다.

즉, $\frac{|1\cdot(-1)+3\cdot0+k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=2\sqrt{10}$이므로

$|-1+k|=20$, $-1+k=\pm20$

$\therefore k=21$ 또는 $k=-19$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$21+(-19)=2$ 답 2

실력 콕콕 본문 p.124~125

736 ①	737 ①	738 ④	739 $-\frac{1}{2}$	740 ②	741 5
742 ③	743 5	744 $y=\frac{1}{5}x+2$	745 ②	746 ④	
747 ③	748 16	749 ③	750 $\frac{8}{5}$	751 2	

736

두 점 $(1, 2a)$, $(3, 4a)$를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{4a-2a}{3-1}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

즉, 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 두 점 $(1, 1)$, $(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

따라서 구하는 직선의 y절편은 $\frac{1}{2}$이다. 답 ①

737

점 $(4, -3)$과 직선 $3x-4y+a=0$ 사이의 거리가 5이므로

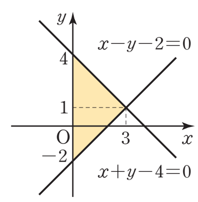
$\frac{|3\cdot4-4\cdot(-3)+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$, $|24+a|=25$

$24+a=\pm25$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a=-49$

이때, a는 양수이므로 $a=1$ 답 ①

738

세 직선 $x+y-4=0$, $x-y-2=0$, $x=0$을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, 두 직선 $x+y-4=0$, $x-y-2=0$의 교점의 좌표는 $(3, 1)$이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot3=9$

답 ④

739

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점, 즉 각 직사각형의 대각선의 중점을 지나야 한다.

이때, 직사각형 OABC의 대각선의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{5+0}{2}\right)=\left(3, \frac{5}{2}\right)$

직사각형 FADE의 대각선의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+6}{2}, \frac{3+0}{2}\right)=\left(5, \frac{3}{2}\right)$

따라서 직선 l은 두 점 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, $\left(5, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 직선 l의 기울기는

$\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{5-3}=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

740

두 직선 $y=(a-3)x+a+2$, $y=-\frac{2}{a}x+2a$가 서로 평행하려면 두 직선의 기울기는 같고, y절편은 달라야 하므로

$a-3=-\frac{2}{a}$ ...... ㉠

$a+2\neq2a$ ...... ㉡

㉠에서 $a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

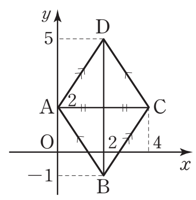
이때, ㉡에서 $a\neq2$이므로 $a=1$

따라서 구하는 상수 a의 값은 1의 1개뿐이다. 답 ②

741
두 직선 $x+ay-1=0$, $(a+1)x+2y-2=0$이 한 점에서 만나려면
$\frac{1}{a+1}\neq\frac{a}{2}$이므로
$2\neq a(a+1)$, $a^2+a-2\neq 0$
$(a+2)(a-1)\neq 0$ $\quad\therefore a\neq -2,\ a\neq 1$
따라서 $\alpha=-2$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=-2$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(-2)^2+1^2=5$ 답 5

742
두 직선 $x+ay+2=0$, $2x-by+2=0$이 서로 수직이므로
$1\cdot 2+a\cdot(-b)=0$ $\quad\therefore ab=2$
또한 두 직선 $x+ay+2=0$, $x-(b-3)y-2=0$이 서로 평행하므로
$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-3)}\neq\frac{2}{-2}$에서
$-b+3=a$ $\quad\therefore a+b=3$
$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot 2=5$ 답 ③

743
두 점 A, B의 좌표가 각각 A$(0,\ 2)$, B$(2,\ -1)$이므로 직선 AB의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이고, 마름모의 정의에서 직선 CD와 직선 AB는 서로 평행하므로 직선 CD의 기울기도 $-\frac{3}{2}$이다.

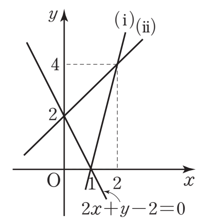


또한 두 대각선 AC와 BD가 각각 x축, y축에 평행하므로 점 C의 좌표는 C$(4,\ 2)$이다.
즉, 직선 CD는 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 점 $(4,\ 2)$를 지나므로 구하는 직선의 방정식은
$y-2=-\frac{3}{2}(x-4)$ $\quad\therefore 3x+2y=16$
따라서 $a=3$, $b=2$이므로
$a+b=3+2=5$ 답 5

744
사각형 ABCD가 정사각형이므로 두 점 B, D를 지나는 직선은 대각선 AC의 수직이등분선이다.
이때, 대각선 AC의 중점의 좌표는
$\left(\frac{3+2}{2},\ \frac{0+5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$
직선 AC의 기울기는
$\frac{5-0}{2-3}=-5$
따라서 직선 BD의 기울기는 $\frac{1}{5}$이고 점 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$를 지나므로 구하는 직선의 방정식은
$y-\frac{5}{2}=\frac{1}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{5}x+2$ 답 $y=\frac{1}{5}x+2$

745
직선 l의 방정식 $(a+1)x-(a-3)y+a-15=0$을 a에 대하여 정리하면
$(x-y+1)a+(x+3y-15)=0$
이 식이 a의 값에 관계없이 성립하려면
$x-y+1=0$, $x+3y-15=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$x=3$, $y=4$
따라서 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 A$(3,\ 4)$를 지나므로 점 A와 직선 m 사이의 거리는
$\frac{|3\cdot 3+4\cdot 4-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$ 답 ②

746
직선 $mx-y-2m+4=0$에서
$(x-2)m+(4-y)=0$ …… ㉠
이므로 이 직선은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 4)$를 지난다.
주어진 두 직선이 제1사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 두 점 $(0,\ 2)$, $(1,\ 0)$을 이은 선분 사이를 움직이면 된다.



(i) 직선 ㉠이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때
$-m+4=0$ $\quad\therefore m=4$
(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때
$-2m+2=0$ $\quad\therefore m=1$
(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는
$1<m<4$ 답 ④

747
y축 위의 점의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 점 $(0,\ b)$와 직선 $6x+8y-5=0$ 사이의 거리가 2이므로
$\frac{|6\cdot 0+8\cdot b-5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=2$, $|8b-5|=20$, $8b-5=\pm 20$
$\therefore b=\frac{25}{8}$ 또는 $b=-\frac{15}{8}$
따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 A$\left(0,\ \frac{25}{8}\right)$, B$\left(0,\ -\frac{15}{8}\right)$ 또는
A$\left(0,\ -\frac{15}{8}\right)$, B$\left(0,\ \frac{25}{8}\right)$이므로
$\overline{AB}=\left|\frac{25}{8}-\left(-\frac{15}{8}\right)\right|=\frac{40}{8}=5$ 답 ③

748
세 점 O$(0,\ 0)$, A$(8,\ 4)$, B$(7,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는
G$\left(\frac{0+8+7}{3},\ \frac{0+4+a}{3}\right)$ $\quad\therefore$ G$\left(5,\ \frac{4+a}{3}\right)$
$\therefore b=\frac{4+a}{3}$ …… ㉠
한편, 직선 OA의 기울기는
$\frac{4-0}{8-0}=\frac{1}{2}$
이고 점 O$(0,\ 0)$을 지나므로 직선 OA의 방정식은
$y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$
점 G$(5,\ b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로
$\frac{|1\cdot 5-2\cdot b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$
$|5-2b|=5$, $5-2b=\pm 5$
$\therefore b=0$ 또는 $b=5$
$a>0$이므로 ㉠에서 $b>0$이다.

따라서 $b=5$, $a=11$이므로

$a+b=11+5=16$ 답 16

749

두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{m}{3}=\frac{m-4}{1}\neq\frac{4}{8}$에서

$m=3(m-4)$, $m=3m-12$ $\quad\therefore m=6$

$m=6$을 $mx+(m-4)y=4$에 대입하면

$6x+2y=4$ $\quad\therefore 3x+y=2$ …… ㉠

따라서 두 직선 사이의 거리를 d라 하면 d는 직선 ㉠ 위의 점 $(0, 2)$와 직선 $3x+y=8$, 즉 $3x+y-8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$d=\frac{|3\cdot0+1\cdot2-8|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$ 답 ③

750

직선 $2x-y+4=0$, 즉 $y=2x+4$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

이 직선이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$ …… ㉠

가

이때, 점 H는 직선 ㉠과 직선 $2x-y+4=0$의 교점이므로 두 방정식을 연립하여 풀면

$x=-\frac{4}{5}$, $y=\frac{12}{5}$ $\quad\therefore \mathrm{H}\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$

나

따라서 $a=-\frac{4}{5}$, $b=\frac{12}{5}$이므로

$a+b=-\frac{4}{5}+\frac{12}{5}=\frac{8}{5}$

다

단계	채점 요소	비율
가	점 $(2, 1)$을 지나고 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식 구하기	40%
나	점 H의 좌표 구하기	40%
다	$a+b$의 값 구하기	20%

답 $\frac{8}{5}$

751

두 점 $\mathrm{A}(4, 0)$, $\mathrm{B}(0, -3)$에 대하여 선분 AB의 길이는

$\sqrt{(0-4)^2+(-3-0)^2}=5$

가

점 C와 직선 $3x-4y-12=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot a-4\cdot(a-2)-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-a-4|}{5}$

나

이때, 삼각형 ABC의 넓이가 3이므로

$\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{|-a-4|}{5}=3$

다

$|-a-4|=6$, $-a-4=\pm6$ $\quad\therefore a=-10$ 또는 $a=2$

이때, a는 양수이므로 $a=2$

라

단계	채점 요소	비율
가	선분 AB의 길이 구하기	20%
나	점 C와 주어진 직선 사이의 거리 구하기	30%
다	삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 조건을 만족시키는 식 세우기	30%
라	양수 a의 값 구하기	20%

답 2

12 원의 방정식

개념 콕콕

본문 p. 127~128

752

답 (1) 중심의 좌표 : $(3, 1)$, 반지름의 길이 : 4
(2) 중심의 좌표 : $(-7, 0)$, 반지름의 길이 : 11

753

답 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2=36$ (2) $(x-3)^2+y^2=9$

754

(1) 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$x^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(-3, 4)$를 지나므로
$(-3)^2+4^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=25$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=25$
(2) 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+1)^2=r^2$
이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$(-4)^2+3^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=25$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

답 (1) $x^2+y^2=25$ (2) $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

755

(1) 중심이 x축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+y^2=r^2$
이 원이 두 점 $(1, 1)$, $(3, -1)$을 지나므로
$(1-a)^2+1^2=r^2$ $\quad\therefore 2-2a+a^2=r^2$ …… ㉠
$(3-a)^2+(-1)^2=r^2$ $\quad\therefore 10-6a+a^2=r^2$ …… ㉡
㉡−㉠을 하면 $8-4a=0$ $\quad\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $2-2\cdot2+2^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=2$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=2$
(2) 중심이 y축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$x^2+(y-a)^2=r^2$
이 원이 두 점 $(3, 4)$, $(2, -1)$을 지나므로
$3^2+(4-a)^2=r^2$ $\quad\therefore a^2-8a+25=r^2$ …… ㉠
$2^2+(-1-a)^2=r^2$ $\quad\therefore a^2+2a+5=r^2$ …… ㉡
㉡−㉠을 하면 $10a-20=0$ $\quad\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $2^2-8\cdot2+25=r^2$ $\quad\therefore r^2=13$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+(y-2)^2=13$

답 (1) $(x-2)^2+y^2=2$ (2) $x^2+(y-2)^2=13$

756

(1) $x^2+y^2-12x-13=0$에서 $(x-6)^2+y^2=49$
따라서 중심의 좌표는 $(6, 0)$, 반지름의 길이는 7이다.
(2) $x^2+y^2-2x+10y+10=0$에서 $(x-1)^2+(y+5)^2=16$
따라서 중심의 좌표는 $(1, -5)$, 반지름의 길이는 4이다.

답 (1) 중심의 좌표 : $(6, 0)$, 반지름의 길이 : 7
(2) 중심의 좌표 : $(1, -5)$, 반지름의 길이 : 4

757

(1) 세 점을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고
세 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$의 좌표를 각각 대입하면
$C=0$, $A+B+C+2=0$, $2B+C+4=0$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A=0$, $B=-2$, $C=0$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-2y=0$
(2) 세 점을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고
세 점 $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$의 좌표를 각각 대입하면
$C=0$, $-2A+C+4=0$, $4B+C+16=0$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A=2$, $B=-4$, $C=0$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2+2x-4y=0$

답 (1) $x^2+y^2-2y=0$ (2) $x^2+y^2+2x-4y=0$

758

(1) 원의 중심의 좌표가 $(1, 2)$이고 x축에 접하므로 반지름의 길이는 2이다.
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$
(2) 원의 중심의 좌표가 $(-1, 2)$이고 y축에 접하므로 반지름의 길이는 1이다.
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

답 (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ (2) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

759

(1) 원의 중심의 좌표가 $(3, 3)$이고 x축과 y축에 동시에 접하므로 반지름의 길이는 3이다.
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$
(2) 원의 중심이 제2사분면 위에 있고 반지름의 길이가 4이므로 원의 중심의 좌표는 $(-4, 4)$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

답 (1) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ (2) $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

760

(1) $y=x+1$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면
$x^2+(x+1)^2=1$
$\therefore x^2+x=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\cdot1\cdot0=1>0$
따라서 교점의 개수는 2이다.
(2) $y=-x+\sqrt{2}$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면
$x^2+(-x+\sqrt{2})^2=1$
$\therefore 2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2})^2-2\cdot1=0$
따라서 교점의 개수는 1이다.

(3) $y=2x+4$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(2x+4)^2=1$

$\therefore 5x^2+16x+15=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=8^2-5\cdot15=-11<0$

따라서 교점의 개수는 0이다.

답 (1) 2 (2) 1 (3) 0

761

(1) 원의 중심 (0, 0)과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 원의 중심 (2, 0)과 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다.

(3) 원의 중심 (3, 4)와 직선 $x+y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+4+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다. (3) 만나지 않는다.

762

(1) 두 원 O, O'의 중심의 좌표가 각각 (0, 0), (0, 3)이므로 중심거리는 3이다.

또한 두 원 O, O'의 반지름의 길이는 각각 2, 5이고

$5-2=3$

이므로 두 원 O, O'은 내접한다.

(2) 두 원 O, O'의 중심의 좌표가 각각 (4, 0), (1, -3)이므로 중심거리는

$\sqrt{(1-4)^2+(-3-0)^2}=3\sqrt{2}$

또한 두 원 O, O'의 반지름의 길이는 각각 3, 4이고

$4-3<3\sqrt{2}<4+3$

이므로 두 원 O, O'은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 두 원 O, O'의 중심의 좌표가 각각 (-3, -1), (1, 2)이므로 중심거리는

$\sqrt{\{1-(-3)\}^2+\{2-(-1)\}^2}=5$

또한 두 원 O, O'의 반지름의 길이는 각각 1, 4이고

$1+4=5$

이므로 두 원 O, O'은 외접한다.

답 (1) 내접한다. (2) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(3) 외접한다.

763

(1) $x^2+y^2-6x+5=0$에서 $(x-3)^2+y^2=4$

$x^2+y^2-2x-6y-6=0$에서 $(x-1)^2+(y-3)^2=16$

두 원 O, O'의 중심의 좌표가 각각 (3, 0), (1, 3)이므로 중심거리는

$\sqrt{(1-3)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$

또한 두 원 O, O'의 반지름의 길이는 각각 2, 4이고

$4-2<\sqrt{13}<4+2$

이므로 두 원 O, O'은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $x^2+y^2-6x-8y+21=0$에서 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$

두 원 O, O'의 중심의 좌표가 각각 (0, 0), (3, 4)이므로 중심거리는

$\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$

또한 두 원 O, O'의 반지름의 길이는 각각 2, 2이고

$5>2+2$

이므로 두 원 O, O'은 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

764

(1) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$(x^2+y^2-2x)+k(x^2+y^2-4x-6y+8)=0$ $(k\neq-1)$ ...... ㉠

으로 놓으면 이 원이 점 (0, 1)을 지나므로

$1+3k=0$ $\therefore k=-\frac{1}{3}$

따라서 $k=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-x+3y-4=0$

(2) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$(x^2+y^2-6)+k(x^2+y^2+4x-6y-2)=0$ $(k\neq-1)$ ...... ㉠

으로 놓으면 이 원이 원점을 지나므로

$-6-2k=0$ $\therefore k=-3$

따라서 $k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2+6x-9y=0$

답 (1) $x^2+y^2-x+3y-4=0$ (2) $x^2+y^2+6x-9y=0$

765

(1) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2+5x+y-6)-(x^2+y^2-x-y)=0$

$6x+2y-6=0$ $\therefore 3x+y-3=0$

(2) $(x+2)^2+y^2=7$에서 $x^2+y^2+4x-3=0$

$(x-1)^2+(y+5)^2=16$에서 $x^2+y^2-2x+10y+10=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2+4x-3)-(x^2+y^2-2x+10y+10)=0$

$\therefore 6x-10y-13=0$

답 (1) $3x+y-3=0$ (2) $6x-10y-13=0$

766

(1) 원의 반지름의 길이가 2이고 접선의 기울기가 3이므로 직선의 방정식은

$y=3x\pm2\sqrt{3^2+1}$ $\therefore y=3x\pm2\sqrt{10}$

(2) 원의 반지름의 길이가 3이고 접선의 기울기가 $2\sqrt{2}$이므로 직선의 방정식은

$y=2\sqrt{2}x\pm3\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}$ $\therefore y=2\sqrt{2}x\pm9$

답 (1) $y=3x\pm2\sqrt{10}$ (2) $y=2\sqrt{2}x\pm9$

767

(1) $-2\cdot x+1\cdot y=5$이므로 $-2x+y=5$

(2) $3\cdot x+(-4)\cdot y=25$이므로 $3x-4y=25$

답 (1) $-2x+y=5$ (2) $3x-4y=25$

유형 콕콕 본문 p. 129~135

768 ①	**769** $(x-3)^2+y^2=8$		**770** ③	**771** ③	**772** ④
773 5	**774** ⑤	**775** ④	**776** ④	**777** ③	
778 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$			**779** ③	**780** ⑤	**781** ③
782 ②	**783** ①	**784** ③	**785** 8	**786** ④	**787** ③
788 ②	**789** ②	**790** ①	**791** 4	**792** ②	**793** ⑤
794 ④	**795** ③	**796** ①	**797** 29π	**798** ④	**799** ②
800 -2	**801** ⑤	**802** ③	**803** 40	**804** ⑤	**805** ④
806 ③	**807** ②	**808** $\sqrt{21}$	**809** ①		

768

점 $(-1,\ 3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-3)^2=16$
좌변을 전개하여 정리하면 $x^2+y^2+2x-6y-6=0$
따라서 $a=2,\ b=-6,\ c=-6$이므로
$a+b+c=2+(-6)+(-6)=-10$ 답 ①

769

$x^2+y^2-6x=0$에서 $(x-3)^2+y^2=9$
이므로 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.
즉, 구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-3)^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 $(1-3)^2+2^2=r^2$ $\therefore r^2=8$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+y^2=8$ 답 $(x-3)^2+y^2=8$

770

원의 중심은 선분 AB의 중점이므로
$(a,\ b)=\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{-3+1}{2}\right)=(3,\ -1)$
또한 원의 반지름의 길이는 선분 AB의 길이의 $\dfrac{1}{2}$이므로
$r=\dfrac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+\{1-(-3)\}^2}=\sqrt{5}$
따라서 $a=3,\ b=-1,\ r^2=5$이므로
$a+b+r^2=3+(-1)+5=7$ 답 ③

771

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고
세 점 $(0,\ 0)$, $(-6,\ 8)$, $(-3,\ 9)$의 좌표를 각각 대입하면
$C=0,\ -6A+8B+C+100=0,\ -3A+9B+C+90=0$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A=6,\ B=-8,\ C=0$
즉, 원의 방정식은 $x^2+y^2+6x-8y=0$
$\therefore (x+3)^2+(y-4)^2=25$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(-3,\ 4)$이므로 $a=-3,\ b=4$
$\therefore a+b=-3+4=1$ 답 ③

772

삼각형의 외접원은 삼각형의 세 꼭짓점을 지나므로 외접원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$의 좌표를 각각 대입하면
$C=0,\ 2A+C+4=0,\ 4B+C+16=0$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A=-2,\ B=-4,\ C=0$
즉, 구하는 삼각형의 외접원의 방정식은
$x^2+y^2-2x-4y=0$ $\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=5$
따라서 구하는 원의 넓이는 5π이다. 답 ④

773

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고
세 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 5)$, $(6,\ 4)$의 좌표를 각각 대입하면
$C=0,\ A+5B+C+26=0,\ 6A+4B+C+52=0$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A=-6,\ B=-4,\ C=0$
따라서 원의 방정식은 $x^2+y^2-6x-4y=0$
이때, 점 $(5,\ a)$가 이 원 위의 점이므로
$25+a^2-30-4a=0,\ a^2-4a-5=0$
$(a+1)(a-5)=0$
$\therefore a=5$ ($\because a$는 양수) 답 5

774

원 $x^2+y^2-4x+6y=0$에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=13$
따라서 중심의 좌표가 $(2,\ -3)$이므로 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|-3|=3$ 답 ⑤

775

점 $(-4,\ 0)$에서 x축에 접하므로 중심의 x좌표는 -4이다.
이때, 원의 반지름의 길이를 $|r|$로 놓으면 원의 중심의 좌표는 $(-4,\ r)$이므로 원의 방정식은 $(x+4)^2+(y-r)^2=r^2$
또한 이 원이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로
$(0+4)^2+(-2-r)^2=r^2,\ 16+r^2+4r+4=r^2$
$\therefore r=-5$
따라서 원의 반지름의 길이는 5이므로 구하는 원의 넓이는
$\pi\cdot5^2=25\pi$ 답 ④

776

y축에 접하는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$으로 놓으면 이 원이 점 $(6,\ 3)$을 지나므로
$(6-a)^2+(3-b)^2=a^2$
$\therefore b^2-12a-6b+45=0$ …… ㉠
또한 점 $(3,\ 0)$을 지나므로
$(3-a)^2+(0-b)^2=a^2$
$b^2-6a+9=0$ $\therefore a=\dfrac{1}{6}b^2+\dfrac{3}{2}$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$b^2-12\left(\dfrac{1}{6}b^2+\dfrac{3}{2}\right)-6b+45=0,\ b^2+6b-27=0$
$(b+9)(b-3)=0$ $\therefore b=-9$ 또는 $b=3$
이것을 차례대로 ㉡에 대입하면 $a=15$ 또는 $a=3$
따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은 $3+15=18$ 답 ④

777

원이 점 $(2,\ -5)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 주어진 원의 중심은 제4사분면 위에 있어야 한다.

이때, 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이므로 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(2,\ -5)$를 지나므로

$(2-r)^2+(-5+r)^2=r^2 \qquad \therefore\ r^2-14r+29=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 원의 반지름의 길이의 합은 14이다. 답 ③

778

원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이고 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

가

이때, 중심 $(r,\ r)$가 직선 $x+3y=20$ 위에 있으므로

$r+3r=20 \qquad \therefore\ r=5$

나

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

다

단계	채점 요소	비율
가	반지름의 길이를 r라 하고 구하는 원의 방정식 세우기	50%
나	r의 값 구하기	40%
다	원의 방정식 구하기	10%

답 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

779

점 $(-2,\ 1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 주어진 원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로 $k=2$

이때, 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이므로 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로

$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2,\ r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0 \qquad \therefore\ r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 넓이의 합은 $\pi\cdot1^2+\pi\cdot5^2=26\pi$

$\therefore\ a=26$

$\therefore\ a+k=26+2=28$ 답 ③

780

$y=-3x+k$를 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(-3x+k)^2=10$

$10x^2-6kx+k^2-10=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 만나므로

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-10(k^2-10)\geq0,\ -k^2+100\geq0,\ k^2\leq100$

$\therefore\ -10\leq k\leq10$

따라서 구하는 정수 k는 $-10,\ -9,\ -8,\ \cdots,\ 10$의 21개이다. 답 ⑤

781

$y=mx+3$을 $x^2+y^2=3$에 대입하면

$x^2+(mx+3)^2=3,\ (1+m^2)x^2+6mx+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(3m)^2-6(1+m^2)<0$

$3m^2-6<0,\ m^2<2$

$\therefore\ -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$ 답 ③

782

$x+y=k$, 즉 $y=-x+k$를 $x^2+y^2=k$에 대입하면

$x^2+(-x+k)^2=k,\ 2x^2-2kx+k^2-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-k)=0$

$k^2-2k=0,\ k(k-2)=0$

$\therefore\ k=2\ (\because\ k>0)$ 답 ②

783

원 $x^2+y^2=k$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|3\cdot0+4\cdot0-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

이때, 원과 직선이 접하려면 원의 중심과 직선 사이의 거리와 반지름의 길이가 같아야 하므로

$\sqrt{k}=1 \qquad \therefore\ k=1$ 답 ①

784

$x^2+y^2-6x+8y+20=0$에서 $(x-3)^2+(y+4)^2=5$

원의 중심 $(3,\ -4)$와 직선 $x-2y+a=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|1\cdot3-2\cdot(-4)+a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|11+a|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|11+a|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5},\ |a+11|<5$

$-5<a+11<5 \qquad \therefore\ -16<a<-6$

따라서 정수 a는 $-15,\ -14,\ -13,\ \cdots,\ -7$의 9개이다. 답 ③

785

원의 중심 $(4,\ -\sqrt{3})$과 직선 $x+\sqrt{3}y-k=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|1\cdot4+\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})-k|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{|1-k|}{2}$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

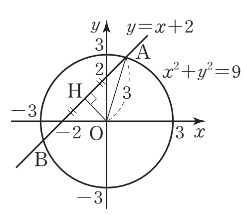
$\frac{|1-k|}{2}>3,\ |1-k|>6$

$1-k>6$ 또는 $1-k<-6 \qquad \therefore\ k<-5$ 또는 $k>7$

따라서 양의 정수 k의 최솟값은 8이다. 답 8

786

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심 O에서 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

이때, $\overline{OA}=3$이고 삼각형 OAH는 $\angle OHA=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}$

따라서 선분 AB의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{7}$ 답 ④

787

$y=0$을 주어진 원의 방정식에 대입하면

$(x-1)^2+(0-1)^2=10$

전개하여 정리하면

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 두 교점의 좌표는 각각 $(-2, 0)$, $(4, 0)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$|4-(-2)|=6$

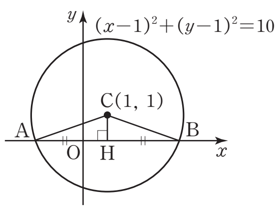
다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C(1, 1)이라 하고, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=1$이므로 직각삼각형 CAH에서

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}$

$=2\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=6$

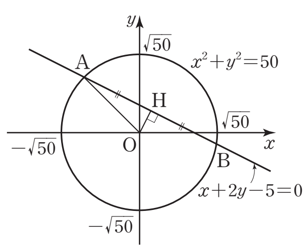


답 ③

788

주어진 원과 직선을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내고 두 교점을 각각 A, B라 하자.

이때, 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 원은 선분 AB를 지름으로 하는 원이므로 원의 중심 O에서 직선 $x+2y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{50})^2-(\sqrt{5})^2}=3\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $3\sqrt{5}$이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot(3\sqrt{5})^2=45\pi$ 답 ②

789

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0)$, $(4, 0)$이므로 중심거리는 4이고, 두 원의 반지름의 길이가 각각 2, r이므로 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$|r-2|<4<r+2$

(i) $|r-2|<4$에서 $-4<r-2<4$

$\therefore 0<r<6$ ($\because r>0$)

(ii) $4<r+2$에서 $2<r$

(i), (ii)에서 $2<r<6$

따라서 모든 정수 r의 값의 합은 $3+4+5=12$ 답 ②

790

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 3)$, $(4, 0)$이므로 중심거리는

$\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=5$

두 원의 반지름의 길이가 각각 2, r이므로 두 원이 내접하려면

$5=|r-2|$, $r-2=\pm5$

$\therefore r=7$ ($\because r>0$) 답 ①

791

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(2, 0)$, $(a, 0)$이므로 중심거리는

$|a-2|$

두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 5이므로 두 원이 외접하려면

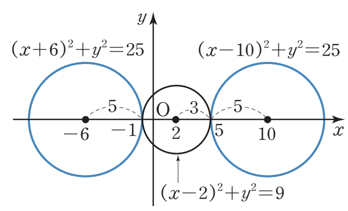
$|a-2|=3+5$, $a-2=\pm8$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=10$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $-6+10=4$

다른 풀이

원 $(x-2)^2+y^2=9$에 외접하는 원 중 중심의 좌표가 $(a, 0)$이고 반지름의 길이가 5인 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때, 중심 $(a, 0)$의 좌표는 $(-6, 0)$, $(10, 0)$이다.

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 4이다. 답 4

792

$x^2+y^2-6x-2y+6=0$에서 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심을 C(3, 1)이라 하면

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

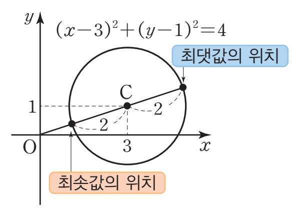
이때, 원의 반지름의 길이가 2이므로

$M=\overline{OC}+2=\sqrt{10}+2$

$m=\overline{OC}-2=\sqrt{10}-2$

$\therefore Mm=(\sqrt{10}+2)(\sqrt{10}-2)$

$=6$



답 ②

793

원의 중심 O와 점 A(8, 6) 사이의 거리 d는

$d=\sqrt{8^2+6^2}=10$

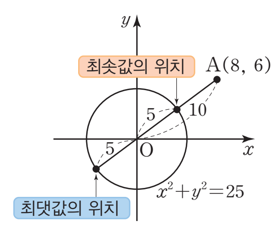
이때, 원의 반지름의 길이 r가 5이므로

$\alpha=d+r=10+5=15$

$\beta=d-r=10-5=5$

$\therefore \alpha+\beta=15+5$

$=20$



답 ⑤

794

원의 중심 $(2, -2)$와 직선 $4x-3y+6=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4\cdot2-3\cdot(-2)+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=4$

이때, 원의 반지름의 길이가 2이므로

(거리의 최댓값)$=4+2=6$, (거리의 최솟값)$=4-2=2$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $6+2=8$ 답 ④

795

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$(x^2+y^2-8x+2y-5)+k(x^2+y^2+2x-4y+2)=0\ (k\neq-1)$ …… ㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$3+2k=0 \qquad \therefore k=-\frac{3}{2}$

$k=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2+22x-16y+16=0$

$\therefore (x+11)^2+(y-8)^2=169$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-11, 8)$이다.

답 ③

796

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$(x^2+y^2-4x+y)+k(x^2+y^2+2x-3y)=0\ (k\neq-1)$ …… ㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$2-2k=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x^2+y^2-x-y=0$

따라서 $a=-1$, $b=-1$, $c=0$이므로

$a+b+c=-1+(-1)+0=-2$

답 ①

797

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$(x^2+y^2-4x-6y+12)+k(x^2+y^2-4x-2)=0\ (k\neq-1)$ …… ㉠

가

으로 놓으면 두 원의 교점과 점 $(0, 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외접원은 두 원의 교점과 점 $(0, 2)$를 지나므로

$4+2k=0 \qquad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-4x+6y-16=0$

나

$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=29$

따라서 구하는 원의 넓이는 29π이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 세우기	30%
나	가에서 점 $(0, 2)$를 지나는 원의 방정식 구하기	50%
다	원의 넓이 구하기	20%

답 29π

798

$x^2+y^2=3$에서 $x^2+y^2-3=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=4$에서 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$

즉, 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2-3)-(x^2+y^2+4x-6y+9)=0$

$-4x+6y-12=0 \qquad \therefore y=\frac{2}{3}x+2$

따라서 $m=\frac{2}{3}$, $n=2$이므로

$3m+n=3\cdot\frac{2}{3}+2=4$

답 ④

799

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2+ax+y-1)-(x^2+y^2-x+ay+1)=0$

$\therefore (a+1)x+(1-a)y-2=0$

이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$2(a+1)+3(1-a)-2=0$, $-a+3=0$

$\therefore a=3$

답 ②

800

$x^2+(y+2a)^2=4$에서 $x^2+y^2+4ay+4a^2-4=0$

$(x-2)^2+y^2=9$에서 $x^2+y^2-4x-5=0$

두 원의 교점을 지나는 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2+4ay+4a^2-4)-(x^2+y^2-4x-5)=0$

$\therefore 4x+4ay+4a^2+1=0$

이때, 이 직선이 직선 $2x+y=3$과 수직이므로

$4\cdot2+4a\cdot1=0$

$\therefore a=-2$

답 -2

801

직선 $y=-2x+3$과 평행한 직선의 기울기는 -2이고 원 $x^2+y^2=45$의 반지름의 길이는 $3\sqrt{5}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x\pm3\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-2)^2+1} \qquad \therefore y=-2x\pm15$

따라서 접선이 y축과 만나는 점의 좌표가 각각 $(0, 15)$, $(0, -15)$이므로 선분 PQ의 길이는

$|15-(-15)|=30$

답 ⑤

802

구하는 접선의 방정식을 $y=2x+k$로 놓으면 원의 중심 $(-1, 4)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|2\cdot(-1)-1\cdot4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-6+k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-6+k|}{\sqrt{5}}=5$, $|-6+k|=5\sqrt{5}$

$-6+k=\pm5\sqrt{5} \qquad \therefore k=6\pm5\sqrt{5}$

이때, k가 두 직선의 y절편이므로 y절편의 합은

$(6+5\sqrt{5})+(6-5\sqrt{5})=12$

답 ③

803

직선 $x+3y+2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$와 수직인 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1} \qquad \therefore y=3x\pm10$

가

따라서 직선 $y=3x+10$ 위의 점 $(0, 10)$과 직선 $y=3x-10$, 즉 $3x-y-10=0$ 사이의 거리 k는

$k=\frac{|3\cdot0-1\cdot10-10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

나

$\therefore k^2=(2\sqrt{10})^2=40$

다

단계	채점 요소	비율
가	원에 접하는 접선의 방정식 구하기	40%
나	두 직선 사이의 거리인 k의 값 구하기	40%
다	k^2의 값 구하기	20%

답 40

804

원 $x^2+y^2=40$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=40 \qquad \therefore\ y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{40}{b}\ (\because\ b\neq 0)$

이때, $-\dfrac{a}{b}=-3$이므로 $a=3b$

즉, 점 $(3b,\ b)$가 원 $x^2+y^2=40$ 위의 점이므로

$(3b)^2+b^2=40 \qquad \therefore\ b^2=4$

따라서 $ab=3b\cdot b=3b^2$이므로

$ab=3\cdot 4=12$

답 ⑤

805

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(2,\ a)$에서의 접선의 방정식은

$2x+ay=r^2 \qquad \therefore\ y=-\dfrac{2}{a}x+\dfrac{r^2}{a}$

이 직선이 직선 $y=2x+3$과 수직이어야 하므로

$2\cdot\left(-\dfrac{2}{a}\right)=-1 \qquad \therefore\ a=4$

답 ④

806

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$x+2y=5 \qquad \therefore\ x+2y-5=0$

또한 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=5 \qquad \therefore\ ax+by-5=0$

두 직선이 서로 평행하므로 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}\neq\dfrac{-5}{-5}$

$\therefore\ b=2a,\ a\neq 1,\ b\neq 2$

한편, 점 $(a,\ b)$, 즉 $(a,\ 2a)$는 원 $x^2+y^2=5$ 위에 있으므로

$a^2+(2a)^2=5,\ a^2=1$

$\therefore\ a=-1\ (\because\ a\neq 1)$

따라서 $a+b=a+2a=3a$이므로

$a+b=3\cdot(-1)=-3$

답 ③

807

점 $(4,\ 3)$을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y-3=m(x-4)$

$\therefore\ mx-y-4m+3=0$ ······ ㉠

직선 ㉠과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\dfrac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |-4m+3|=\sqrt{5(m^2+1)}$

위 식의 양변을 제곱하면

$16m^2-24m+9=5m^2+5,\ 11m^2-24m+4=0$

$(11m-2)(m-2)=0$

$\therefore\ m=\dfrac{2}{11}$ 또는 $m=2$ ······ ㉡

㉡을 각각 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$2x-11y+25=0$ 또는 $2x-y-5=0$

따라서 $a=-11,\ b=-5$이므로

$a+b=-11+(-5)=-16$

다른 풀이

원 $x^2+y^2=5$ 위의 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$ ······ ㉠

직선 ㉠이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로

$4x_1+3y_1=5 \qquad \therefore\ y_1=-\dfrac{4}{3}x_1+\dfrac{5}{3}$ ······ ㉡

또한 접점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=5$ ······ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

${x_1}^2+\left(-\dfrac{4}{3}x_1+\dfrac{5}{3}\right)^2=5,\ 9{x_1}^2+16{x_1}^2-40x_1+25=45$

$5{x_1}^2-8x_1-4=0,\ (5x_1+2)(x_1-2)=0$

$\therefore\ x_1=-\dfrac{2}{5}$ 또는 $x_1=2$

$x_1=-\dfrac{2}{5},\ x_1=2$를 ㉡에 차례대로 대입하면

$y_1=\dfrac{11}{5},\ y_1=-1$

즉, 접점의 좌표는 $\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$ 또는 $(2,\ -1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$2x-11y+25=0$ 또는 $2x-y-5=0$

따라서 $a=-11,\ b=-5$이므로

$a+b=-11+(-5)=-16$

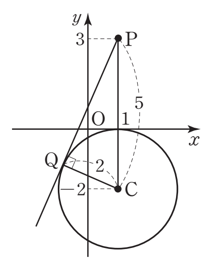
답 ②

808

$x^2+y^2-2x+4y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 중심이 C$(1,\ -2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원의 중심 C에서 접선에 내린 수선의 발을 Q라 하면 직각삼각형 PQC에서



$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PC}^2-\overline{QC}^2}$

$\quad=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

답 $\sqrt{21}$

809

점 $(6,\ 0)$을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=m(x-6) \qquad \therefore\ mx-y-6m=0$ ······ ㉠

직선 ㉠과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는 반지름의 길이 3과 같으므로

$\dfrac{|-6m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3,\ |-6m|=3\sqrt{m^2+1}$

위 식의 양변을 제곱하면

$36m^2=9m^2+9,\ m^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ······ ㉡

㉡을 각각 ㉠에 대입하여 정리하면 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ 또는 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}$

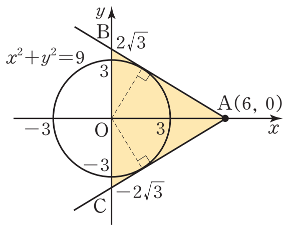
이때, 두 직선의 y절편은 각각 $2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3}$이므로 점 $(6,\ 0)$을 A, 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하면

$\overline{OA}=6$이고

$\overline{BC}=|2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})|=4\sqrt{3}$

따라서 구하는 도형의 넓이는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OA}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}\cdot6=12\sqrt{3}$



다른 풀이

원 $x^2+y^2=9$ 위의 접점의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓으면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9$

이때, 이 접선이 점 $(6, 0)$을 지나므로 $6x_1=9$

$\therefore x_1=\frac{3}{2}$

점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=9$

$x_1=\frac{3}{2}$을 대입하면 $\left(\frac{3}{2}\right)^2+y_1^2=9$

$\therefore y_1=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

즉, 접선의 방정식은 $x+\sqrt{3}y-6=0$ 또는 $x-\sqrt{3}y-6=0$이므로 두 직선의 y절편은 각각 $2\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3}$이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}\cdot6=12\sqrt{3}$ 답 ①

실력 콕콕 본문 p. 136~137

810 ④	811 ④	812 ②	813 $4<k\le9$	814 ②
815 ②	816 ①	817 ①	818 21	819 ③	820 ②
821 ⑤	822 ①	823 ④	824 7π	825 16

810

선분 AB를 지름으로 하는 원의 넓이가 5π이므로

$\pi\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2=5\pi$에서 $\overline{AB}^2=20$

이때, $\overline{AB}^2=\{3-(-1)\}^2+(k-2)^2=20$이므로

$(k-2)^2=4$, $k^2-4k=0$

$k(k-4)=0 \qquad \therefore k=4\ (\because k>0)$ 답 ④

811

$x^2+y^2+2ax-6y+6a-8=0$에서

$(x+a)^2+(y-3)^2=a^2-6a+17$ …… ㉠

이 원의 반지름의 길이를 r라 하면 r^2이 최소일 때 원의 넓이가 최소이다.

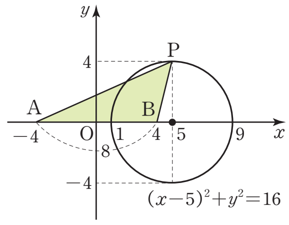
이때, ㉠에서 $r^2=a^2-6a+17=(a-3)^2+8$이므로 r^2은 $a=3$일 때 최솟값 8을 갖는다.

따라서 구하는 원의 넓이의 최솟값은 8π이다. 답 ④

812

$x^2+y^2-10x+9=0$에서 $(x-5)^2+y^2=16$

즉, 점 P는 오른쪽 그림과 같이 중심이 점 $(5, 0)$, 반지름의 길이가 4인 원 위를 움직인다.



이때, 선분 AB의 길이는 8로 항상 일정하므로 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되려면 높이가 최대이어야 한다.

따라서 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 삼각형의 넓이가 최대이므로 구하는 삼각형의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot8\cdot4=16$ 답 ②

813

$x^2+y^2-4x+6y+k=0$에 $y=0$을 대입하여 정리하면

$x^2-4x+k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 x축은 서로 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k<0 \qquad \therefore k>4$ …… ㉠

또한 $x^2+y^2-4x+6y+k=0$에 $x=0$을 대입하여 정리하면

$y^2+6y+k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D'이라 하면 원과 y축이 서로 만나므로

$\frac{D'}{4}=3^2-k\ge0 \qquad \therefore k\le9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$4<k\le9$ 답 $4<k\le9$

814

두 점 $A(-1, 3)$, $B(2, a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{a-3}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore (a-3)x-3y+a+6=0$ …… ㉠

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+(-3)^2}}=\frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}$

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$과 접하므로

$\frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}=1$, $|a+6|=\sqrt{(a-3)^2+9}$

위 식의 양변을 제곱하면

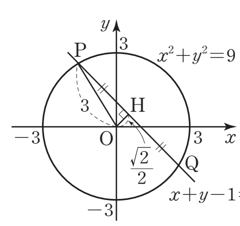
$a^2+12a+36=a^2-6a+18$, $18a=-18$

$\therefore a=-1$ 답 ②

815

원 $x^2+y^2-9+k(x+y-1)=0$은 실수 k의 값에 관계없이 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $x+y-1=0$의 교점을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 교점을 각각 P, Q라 하고 원의 중심 O에서 직선 $x+y-1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 OPH에서

$\overline{PH}=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{2}}$

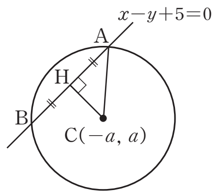
$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=2\cdot\sqrt{\frac{17}{2}}=\sqrt{34}$ 답 ②

816

원 $x^2+y^2+2ax-2ay+6a-5=0$에서

$(x+a)^2+(y-a)^2=2a^2-6a+5$

오른쪽 그림과 같이 이 원과 직선 $x-y+5=0$ 이 만나는 점을 각각 A, B라 하고 원의 중심 $C(-a,\ a)$에서 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\dfrac{|-a-a+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2a+5|}{\sqrt{2}}$ …… ㉠

이때, 선분 CA의 길이는 원의 반지름의 길이와 같고 점 H는 현 AB를 이등분하므로

$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ …… ㉡

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}^2$ …… ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 각각 대입하면

$2a^2-6a+5=\left(\dfrac{|-2a+5|}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

$2a^2-6a+5=\dfrac{4a^2-20a+25}{2}+\dfrac{5}{2},\ 4a=10$

$\therefore a=\dfrac{5}{2}$

답 ①

817

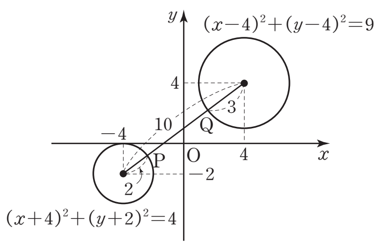
$x^2+y^2+8x+4y+16=0$에서 $(x+4)^2+(y+2)^2=4$

$x^2+y^2-8x-8y+23=0$에서 $(x-4)^2+(y-4)^2=9$

다음 그림에서 선분 PQ의 길이가 최소가 되는 것은 두 점 P, Q가 두 원의 중심을 이은 선분 위에 있는 경우이다. 즉,

(선분 PQ의 길이의 최솟값)

$=$(중심거리)$-$(두 원의 반지름의 길이의 합)



이때, 두 원의 중심 $(-4,\ -2)$, $(4,\ 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{\{4-(-4)\}^2+\{4-(-2)\}^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

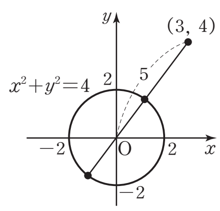
$10-(2+3)=5$

답 ①

818

$\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$은 두 점 $(a,\ b)$와 $(3,\ 4)$ 사이의 거리이다.

오른쪽 그림에서 $\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$은 원의 중심과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선과 원 $x^2+y^2=4$가 만나는 점에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 원의 중심 O와 점 $(3,\ 4)$ 사이의 거리는



$\sqrt{3^2+4^2}=5$

원의 반지름의 길이는 2이므로

$M=5+2=7$

$m=5-2=3$

$\therefore Mm=7\cdot3=21$

답 21

819

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$에서 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$

이때, 구하는 원은 원 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$의 교점을 지나는 원이므로

$(x^2+y^2-4x-4y+4)+k(x-y)=0$

$x^2+y^2+(k-4)x-(k+4)y+4=0$ …… ㉠

으로 놓으면 이 원의 중심이 y축 위에 있으므로

$k-4=0 \qquad \therefore k=4$

$k=4$를 ㉠에 대입하면 $x^2+y^2-8y+4=0$

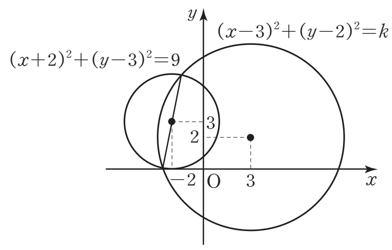
$\therefore x^2+(y-4)^2=12$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.

답 ③

820

원 $(x-3)^2+(y-2)^2=k$가 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$의 둘레의 길이를 이등분하려면 다음 그림과 같이 두 원의 공통현이 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$의 중심 $(-2,\ 3)$을 지나야 한다.



$(x-3)^2+(y-2)^2=k$에서 $x^2+y^2-6x-4y+13-k=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=9$에서 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$

이므로 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-6x-4y+13-k)-(x^2+y^2+4x-6y+4)=0$

$\therefore -10x+2y+9-k=0$

따라서 이 공통현이 점 $(-2,\ 3)$을 지나야 하므로

$20+6+9-k=0 \qquad \therefore k=35$

답 ②

821

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $P(4,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

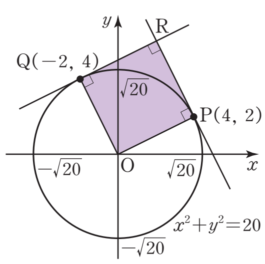
$4x+2y=20$ …… ㉠

점 $Q(-2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+4y=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4\cdot(-2)+2\cdot4=0$이므로 두 접선은 서로 수직이다.

따라서 오른쪽 그림에서 사각형 OPRQ는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{20}$을 한 변의 길이로 하는 정사각형이므로 구하는 넓이는



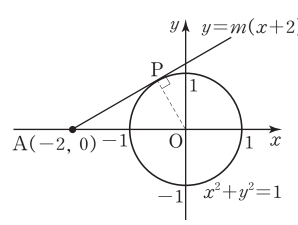
$\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}=20$

답 ⑤

822

오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원의 접선이 될 때, 직선 AP의 기울기가 최대가 된다.

따라서 점 $A(-2,\ 0)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은



$y=m(x+2)$ $\quad\therefore mx-y+2m=0$

원 $x^2+y^2=1$의 중심 O와 접선 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때, 직선과 원이 접하므로

$\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$, $|2m|=\sqrt{m^2+1}$

위 식의 양변을 제곱하면

$4m^2=m^2+1$, $m^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 직선 AP의 기울기의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다. 답 ①

823

점 $(0, 0)$을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx$ $\quad\therefore mx-y=0$

이 직선과 원의 중심 $(0, a)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$와 같으므로

$\dfrac{|-a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$, $|-a|=2\sqrt{2(m^2+1)}$

위 식의 양변을 제곱하면

$a^2=8m^2+8$ $\quad\therefore 8m^2+8-a^2=0$ ...... ㉠

이때, 두 접선이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

따라서 두 접선의 기울기는 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 두 접선의 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{8-a^2}{8}=-1$, $a^2=16$ $\quad\therefore a=4$ ($\because a>0$) 답 ④

824

두 원의 교점을 지나는 원 중에서 가장 작은 원은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원이다.

가

두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-y-7)-(x^2+y^2-4x+2y-11)=0$

$\therefore 4x-3y+4=0$

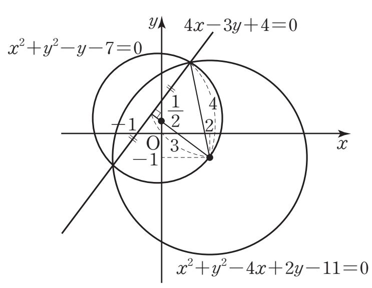
나

$x^2+y^2-4x+2y-11=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=16$ ...... ㉠

원 ㉠은 중심이 점 $(2, -1)$이고 반지름의 길이가 4인 원이다.

다



원 ㉠의 중심 $(2, -1)$과 공통현 $4x-3y+4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4\cdot2-3\cdot(-1)+4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$

라

따라서 공통현의 길이는 $2\sqrt{4^2-3^2}=2\sqrt{7}$

마

즉, 지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원이 두 원의 교점을 지나는 가장 작은 원이므로 그 넓이는 7π이다.

바

단계	채점 요소	비율
가	넓이가 최소가 되는 원은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원임을 확인하기	20%
나	두 원의 공통현의 방정식 구하기	20%
다	주어진 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이 구하기	10%
라	원의 중심과 공통현 사이의 거리 구하기	20%
마	다, 라를 이용하여 공통현의 길이 구하기	20%
바	원의 넓이 구하기	10%

답 7π

825

점 $(4, 0)$을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=m(x-4)$ $\quad\therefore mx-y-4m=0$

가

위의 직선과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$와 같으므로

$\dfrac{|-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$, $|-4m|=2\sqrt{2(m^2+1)}$

나

위 식의 양변을 제곱하면

$16m^2=8m^2+8$, $m^2=1$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=1$

즉, 접선의 방정식은

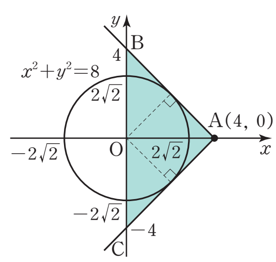
$y=-x+4$ 또는 $y=x-4$

다

이때, 두 직선의 y절편은 각각 4, -4이므로 오른쪽 그림과 같이 점 $(4, 0)$을 A, 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하면

$\overline{OA}=4$이고

$\overline{BC}=|4-(-4)|=8$



라

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OA}=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot4=16$

마

단계	채점 요소	비율
가	주어진 조건을 만족시키는 접선의 방정식 세우기	20%
나	접선의 성질을 이용하여 식 세우기	20%
다	나를 이용하여 접선의 방정식 구하기	30%
라	다의 접선의 방정식을 이용하여 삼각형의 높이와 밑변의 길이 구하기	20%
마	도형의 넓이 구하기	10%

답 16

Ⅲ. 도형의 방정식

13 도형의 이동

개념 콕콕

본문 p. 139

826

(1) $(7+3,\ -8-6)$, 즉 $(10,\ -14)$

(2) $(1+3,\ 3-6)$, 즉 $(4,\ -3)$

답 (1) $(10,\ -14)$ (2) $(4,\ -3)$

827

$f:(x,\ y) \longrightarrow (x-5,\ y+5)$는 주어진 점을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것을 의미한다.

(1) $(0-5,\ 4+5)$, 즉 $(-5,\ 9)$

(2) $(-8-5,\ -7+5)$, 즉 $(-13,\ -2)$

답 (1) $(-5,\ 9)$ (2) $(-13,\ -2)$

828

(1) $y-(-2)=-4(x-5)+7$

$\therefore y=-4x+25$

(2) $\{(x-5)-6\}^2+\{y-(-2)\}^2=3$

$\therefore (x-11)^2+(y+2)^2=3$

답 (1) $y=-4x+25$ (2) $(x-11)^2+(y+2)^2=3$

829

$f:(x,\ y) \longrightarrow (x-2,\ y+3)$은 주어진 도형을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하는 것을 의미한다.

(1) $5\{x-(-2)\}-3(y-3)+3=0$

$\therefore 5x-3y+22=0$

(2) $\{x-(-2)\}^2+(y-3)^2-2\{x-(-2)\}+6(y-3)-6=0$

$x^2+4x+4+y^2-6y+9-2x-4+6y-18-6=0$

$\therefore x^2+y^2+2x-15=0$

답 (1) $5x-3y+22=0$ (2) $x^2+y^2+2x-15=0$

830

답 (1) $(-2,\ -3)$ (2) $(2,\ 3)$ (3) $(2,\ -3)$ (4) $(3,\ -2)$

831

x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 주어진 방정식에 y 대신 $-y$를 대입하므로

(1) $-y=-5x+4$

$\therefore y=5x-4$

(2) $(x+5)^2+(-y-3)^2=16$

$\therefore (x+5)^2+(y+3)^2=16$

답 (1) $y=5x-4$ (2) $(x+5)^2+(y+3)^2=16$

832

y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 주어진 방정식에 x 대신 $-x$를 대입하므로

(1) $3(-x)+4y+41=0$

$\therefore 3x-4y-41=0$

(2) $(-x)^2+y^2-4(-x)-4y-11=0$

$\therefore x^2+y^2+4x-4y-11=0$

답 (1) $3x-4y-41=0$ (2) $x^2+y^2+4x-4y-11=0$

833

원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 주어진 방정식에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하므로

(1) $3(-x)-4(-y)-5=0$

$\therefore 3x-4y+5=0$

(2) $(-x+3)^2+(-y-2)^2=25$

$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=25$

답 (1) $3x-4y+5=0$ (2) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

834

직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 주어진 방정식에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하므로

(1) $x=-3y+5$

$\therefore x+3y-5=0$

(2) $(y-5)^2+(x+3)^2=9$

$\therefore (x+3)^2+(y-5)^2=9$

답 (1) $x+3y-5=0$ (2) $(x+3)^2+(y-5)^2=9$

835

(1) 함수 $y=|x+1|$에서

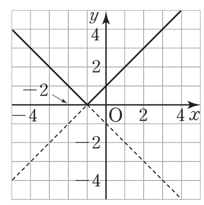
(i) $x+1\ge 0$, 즉 $x\ge -1$일 때

$y=\boxed{x+1}$

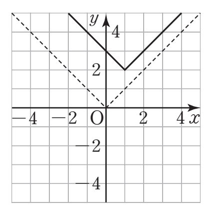
(ii) $x+1<0$, 즉 $x<-1$일 때

$y=\boxed{-x-1}$

(i), (ii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) 함수 $y=|x-1|+2$의 그래프는 함수 $y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{1}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

유형 콕콕

본문 p. 140~143

836 ③	837 ④	838 5	839 ②	840 ①	
841 $-\frac{5}{4}$	842 ④	843 ⑤	844 4	845 ③	846 ③
847 ②	848 ④	849 ⑤	850 $3x+4y+30=0$	851 ④	
852 ③	853 8	854 ①	855 ③	856 5	857 ③
858 ④	859 ④				

836

점 $(1,\ -3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $(-3,\ 2)$라 하면

$1+a=-3,\ -3+b=2$

$\therefore\ a=-4,\ b=5$

따라서 점 $(2,\ 4)$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2-4,\ 4+5)$, 즉 $(-2,\ 9)$ 답 ③

837

점 $(-3,\ 6)$이 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하여 점 $(3,\ 8)$로 옮겨지므로

$-3+m=3,\ 6+n=8$

따라서 $m=6,\ n=2$이므로

$m+n=6+2=8$ 답 ④

838

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 점 P를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점 P′의 좌표는 $\mathrm{P'}(a-4,\ b+3)$ 가

$\therefore\ \overline{\mathrm{PP'}}=\sqrt{(a-4-a)^2+(b+3-b)^2}$

$=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$ 나

단계	채점 요소	비율
가	점 P′의 좌표 구하기	60%
나	선분 PP′의 길이 구하기	40%

답 5

839

직선 $x+ay+b=0$이 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하여 직선 $x-2y+6=0$으로 옮겨지므로

$(x-1)+a(y+3)+b=0$

$\therefore\ x+ay+3a+b-1=0$

즉, 이 직선이 $x-2y+6=0$이므로

$a=-2,\ 3a+b-1=6$

따라서 $a=-2,\ b=13$이므로

$a+b=-2+13=11$ 답 ②

840

원 $(x-2)^2+(y+4)^2=3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$(x-a-2)^2+(y-b+4)^2=3$ …… ㉠

이때, $x^2+y^2+4x-2y+2=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=3$

이 원의 방정식과 ㉠이 일치하므로

$-a-2=2,\ -b+4=-1$

따라서 $a=-4,\ b=5$이므로

$ab=-4\cdot5=-20$

다른 풀이

원 $(x-2)^2+(y+4)^2=3$의 중심의 좌표가 $(2,\ -4)$이므로 이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2+a,\ -4+b)$ …… ㉠

이때, $x^2+y^2+4x-2y+2=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=3$

이 원의 중심의 좌표 $(-2,\ 1)$과 ㉠이 일치하므로

$2+a=-2,\ -4+b=1$

따라서 $a=-4,\ b=5$이므로

$ab=-4\cdot5=-20$ 답 ①

841

점 $(1,\ 0)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $(-3,\ 5)$라 하면

$1+a=-3,\ 0+b=5\quad \therefore\ a=-4,\ b=5$

따라서 직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-5=m(x+4)+n$

$\therefore\ y=mx+4m+n+5$

이 직선이 처음의 직선과 일치하므로

$4m+n+5=n\quad \therefore\ m=-\frac{5}{4}$ 답 $-\frac{5}{4}$

842

점 $\mathrm{P}(3,\ 6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(6,\ 3)$

점 $\mathrm{P}(3,\ 6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

$\mathrm{R}(3,\ -6)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+6+3}{3},\ \frac{6+3+(-6)}{3}\right)$, 즉 $(4,\ 1)$ 답 ④

843

점 $(2,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(2,\ -3)$

점 $(2,\ 3)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(-3,\ -2)$

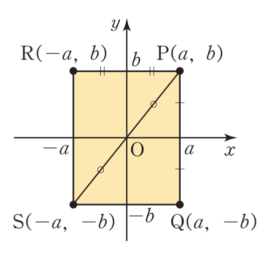
$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-3-2)^2+\{-2-(-3)\}^2}$

$=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$ 답 ⑤

844

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q, R, S의 좌표는 각각

$\mathrm{Q}(a,\ -b),\ \mathrm{R}(-a,\ b),\ \mathrm{S}(-a,\ -b)$



따라서 오른쪽 그림과 같이 네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형은 가로의 길이가 $2a$, 세로의 길이가 $2b$인 직사각형이므로 그 넓이는

$2a\cdot2b=4ab$

따라서 $4ab=16$이므로 $ab=4$ 답 4

845

직선 $ax+(b-1)y=2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$ay+(b-1)x=2$ $\quad \therefore (b-1)x+ay=2$

이 직선이 $(a-3)x-(b+1)y=2$이므로

$b-1=a-3$, $a=-(b+1)$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$ 답 ③

846

직선 $y=\frac{1}{2}x+4$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l, m, n의 방정식은 각각

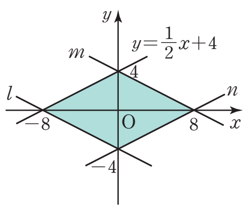
$l: -y=\frac{1}{2}x+4$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-4$

$m: y=-\frac{1}{2}x+4$

$n: -y=-\frac{1}{2}x+4$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-4$

따라서 이들 네 직선으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 길이가 각각 16, 8인 마름모이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot16\cdot8=64$



답 ③

847

주어진 대칭이동은 x좌표와 y좌표가 서로 바뀌었으므로 직선 $y=x$에 대한 대칭이동이다.

따라서 직선 $3x+2y-2=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3y+2x-2=0$ $\quad \therefore 2x+3y-2=0$ 답 ②

848

점 $(2a,\ 7)$을 점 $(2,\ 5)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(-4,\ b)$이므로 점 $(2,\ 5)$는 두 점 $(2a,\ 7)$, $(-4,\ b)$를 이은 선분의 중점이다.

즉, $\frac{2a+(-4)}{2}=2$, $\frac{7+b}{2}=5$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로

$ab=4\cdot3=12$ 답 ④

849

원 $(x+2)^2+(y-5)^2=9$의 중심 $(-2,\ 5)$를 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 $(1,\ 2)$는 두 점 $(-2,\ 5)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점이므로

$\frac{-2+a}{2}=1$, $\frac{5+b}{2}=2$

$\therefore a=4$, $b=-1$

이때, 원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 구하는 원의 중심의 좌표는 $(4,\ -1)$이고 반지름의 길이는 3이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+\{y-(-1)\}^2=9$

$\therefore (x-4)^2+(y+1)^2=9$ 답 ⑤

850

직선 $3x+4y+8=0$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $(3,\ -7)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 점 $(3,\ -7)$은 선분 PP'의 중점이므로

$\frac{x+x'}{2}=3$, $\frac{y+y'}{2}=-7$

$x+x'=6$, $y+y'=-14$

$\therefore x=6-x'$, $y=-14-y'$

이것을 $3x+4y+8=0$에 대입하면

$3(6-x')+4(-14-y')+8=0$

$18-3x'-56-4y'+8=0$

$\therefore 3x'+4y'+30=0$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$3x+4y+30=0$ 답 $3x+4y+30=0$

851

점 $(1,\ 3)$을 직선 $y=2x+1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(a,\ b)$이므로 두 점 $(1,\ 3)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)$는 직선 $y=2x+1$ 위의 점이다.

$\frac{3+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}+1$, $3+b=2+2a+2$

$\therefore 2a-b=-1$ …… ㉠

또한 두 점 $(1,\ 3)$, $(a,\ b)$를 이은 직선이 직선 $y=2x+1$과 수직이므로

$\frac{b-3}{a-1}=-\frac{1}{2}$, $2(b-3)=-(a-1)$

$\therefore a+2b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

$\therefore 3a+b=3\cdot1+3=6$ 답 ④

852

직선 $y=2x-1$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 선분 PP'의 중점은 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2}+2$, $y+y'=x+x'+4$

$\therefore x+x'-y-y'=-4$ …… ㉠

또한 직선 PP'이 직선 $y=x+2$와 수직이므로

$\frac{y'-y}{x'-x}=-1$, $y'-y=-x'+x$

$\therefore x-x'+y-y'=0$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x-2y'=-4$

$\therefore x=y'-2$ …… ㉢

㉠−㉡을 하면 $2x'-2y=-4$

$\therefore y=x'+2$ …… ㉣

이때, 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로 ㉢, ㉣을 $y=2x-1$에 대입하면

$x'+2=2(y'-2)-1$, $2y'=x'+7$

$\therefore y'=\frac{1}{2}x'+\frac{7}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

다른 풀이

직선 $y=2x-1$ 위의 두 점 $(0, -1)$, $(1, 1)$을 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 각각 (a, b), (c, d)라 하면

(i) 두 점 $(0, -1)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표 $\left(\frac{a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$\frac{-1+b}{2}=\frac{a}{2}+2$, $-1+b=a+4$

$\therefore a-b=-5$ …… ㉠

또한 두 점 $(0, -1)$, (a, b)를 이은 직선이 직선 $y=x+2$와 수직이므로

$\frac{b-(-1)}{a-0}=-1$, $b+1=-a$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

(ii) 두 점 $(1, 1)$, (c, d)를 이은 선분의 중점의 좌표 $\left(\frac{1+c}{2}, \frac{1+d}{2}\right)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$\frac{1+d}{2}=\frac{1+c}{2}+2$, $1+d=1+c+4$

$\therefore c-d=-4$ …… ㉢

또한 두 점 $(1, 1)$, (c, d)를 이은 직선이 직선 $y=x+2$와 수직이므로

$\frac{d-1}{c-1}=-1$, $d-1=-c+1$

$\therefore c+d=2$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=-1$, $d=3$

(i), (ii)에서 두 점 $(-3, 2)$, $(-1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{3-2}{-1-(-3)}\{x-(-3)\}$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

답 ③

853

(i) 점 $A(6, 2)$를 직선 $x-y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표를 $C(a, b)$라 하자.

선분 AC의 중점의 좌표 $\left(\frac{6+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$는 직선 $x-y-1=0$ 위의 점이므로

$\frac{6+a}{2}-\frac{2+b}{2}-1=0$, $6+a-2-b-2=0$

$\therefore a-b=-2$ …… ㉠

또한 직선 AC가 직선 $x-y-1=0$, 즉 $y=x-1$과 수직이므로

$\frac{b-2}{a-6}=-1$, $b-2=-(a-6)$

$\therefore a+b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=5$

$\therefore C(3, 5)$

가

(ii) 점 $B(3, 1)$을 직선 $x-y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표를 $D(c, d)$라 하자.

선분 BD의 중점의 좌표 $\left(\frac{3+c}{2}, \frac{1+d}{2}\right)$는 직선 $x-y-1=0$ 위의 점이므로

$\frac{3+c}{2}-\frac{1+d}{2}-1=0$, $3+c-1-d-2=0$

$\therefore c-d=0$ …… ㉢

또한 직선 BD가 직선 $x-y-1=0$, 즉 $y=x-1$과 수직이므로

$\frac{d-1}{c-3}=-1$, $d-1=-(c-3)$

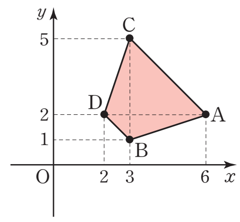
$\therefore c+d=4$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=2$, $d=2$

$\therefore D(2, 2)$

나

(i), (ii)에서 네 점 A, B, C, D를 각각 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 사각형의 넓이는



$\triangle CDA+\triangle DBA=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3+\frac{1}{2}\cdot4\cdot1$

$=8$

다

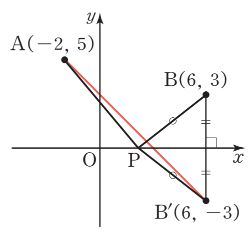
단계	채점 요소	비율
가	점 C의 좌표 구하기	40%
나	점 D의 좌표 구하기	40%
다	네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이 구하기	20%

답 8

854

점 $B(6, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 점 B'의 좌표는 $B'(6, -3)$

오른쪽 그림에서 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로



$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

그러므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 세 점 A, P, B′이 일직선 위에 있을 때, 즉 선분 AB′의 길이와 같다.

$\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB'}$

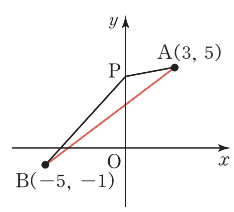
$=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+(-3-5)^2}=8\sqrt{2}$

따라서 구하는 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $8\sqrt{2}$이다.

답 ①

855

오른쪽 그림에서 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 세 점 A, P, B가 일직선 위에 있을 때, 즉 선분 AB의 길이와 같다.



$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}$

$=\sqrt{(-5-3)^2+(-1-5)^2}$

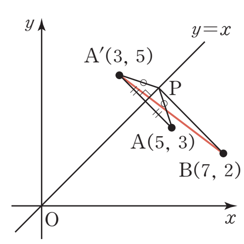
$=10$

답 ③

856

점 $A(5, 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 점 A'의 좌표는 $A'(3, 5)$

오른쪽 그림에서 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로



$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

그러므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 세 점 A′, P, B가 일직선 위에 있을 때, 즉 선분 A′B의 길이와 같다.

$\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(7-3)^2+(2-5)^2}=5$

따라서 구하는 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 5이다. 답 5

857

$y=|x-2|+|2x-5|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 $x=2$, $x=\frac{5}{2}$이므로

(ⅰ) $x<2$일 때

$y=-(x-2)-(2x-5)=-3x+7$

(ⅱ) $2\leq x<\frac{5}{2}$일 때

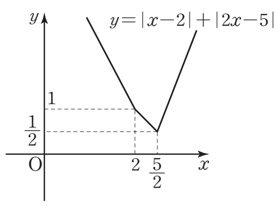
$y=x-2-(2x-5)=-x+3$

(ⅲ) $x\geq\frac{5}{2}$일 때

$y=x-2+2x-5=3x-7$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=\frac{5}{2}$일 때, 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.



답 ③

858

$y=|x|-|x-2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 $x=0$, $x=2$이므로

(ⅰ) $x<0$일 때

$y=-x-(-x+2)=-2$

(ⅱ) $0\leq x<2$일 때

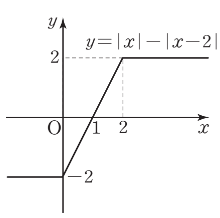
$y=x-(-x+2)=2x-2$

(ⅲ) $x\geq2$일 때

$y=x-(x-2)=2$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x\geq2$일 때, 최댓값은 2이다.



답 ④

859

$y=|x+4|+|x-1|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 $x=-4$, $x=1$이므로

(ⅰ) $x<-4$일 때

$y=-(x+4)-(x-1)=-2x-3$

(ⅱ) $-4\leq x<1$일 때

$y=x+4-(x-1)=5$

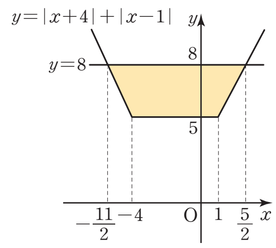
(ⅲ) $x\geq1$일 때

$y=x+4+x-1=2x+3$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 주어진 함수의 그래프와 직선 $y=8$은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수의 그래프와 직선 $y=8$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot(8+5)\cdot3=\frac{39}{2}$



답 ④

실력 콕콕 본문 p.144~145

860 80	**861** −2	**862** ③	**863** ③	**864** ①	**865** ⑤
866 ④	**867** ③	**868** ①	**869** $2\pi-4$		**870** ④
871 ③	**872** ④	**873** ③	**874** 11	**875** 17	

860

점 P$(-1, 21)$을 평행이동 $(x, y) \longrightarrow \left(x+\frac{2}{3}, y\right)$에 의하여 m번 평행이동한 점 Q의 좌표는

$Q\left(-1+\frac{2}{3}m, 21\right)$

점 Q를 평행이동 $(x, y) \longrightarrow \left(x, y-\frac{3}{4}\right)$에 의하여 n번 평행이동한 점 R의 좌표는

$R\left(-1+\frac{2}{3}m, 21-\frac{3}{4}n\right)$

이때, 점 R의 좌표가 R$(31, -3)$이므로

$-1+\frac{2}{3}m=31$, $21-\frac{3}{4}n=-3$

따라서 $m=48$, $n=32$이므로

$m+n=48+32=80$ 답 80

861

직선 l의 방정식을 $y=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면 평행이동 f_1에 의하여 직선 l이 옮겨지는 직선 l_1의 방정식은

$y-4=a(x-2)+b$

$\therefore y=ax+b-2a+4$ …… ㉠

평행이동 f_2에 의하여 직선 l_1이 옮겨지는 직선 l_2의 방정식은

$y+2=a(x-1)+b-2a+4$

$\therefore y=ax+b-3a+2$ …… ㉡

이때, ㉠, ㉡이 일치하므로

$-2a+4=-3a+2$ $\therefore a=-2$

따라서 직선 l의 기울기는 -2이다. 답 −2

862

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$y-b=(x-a)^2$ $\therefore y=(x-a)^2+b$

이 이차함수의 그래프가 두 점 $(0, 5)$, $(1, 2)$를 지나므로

$5=a^2+b$ ······ ㉠

$2=(1-a)^2+b$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

답 ③

863

직선을 평행이동하면 y절편만 변하고 기울기는 변함이 없다. 즉, 기울기가 같은 직선은 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있으나 기울기가 다른 직선은 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 없다.

직선 $2x-y-1=0$에서 $y=2x-1$이므로 주어진 직선의 기울기는 2이다. 그러므로 〈보기〉에서 기울기가 2인 직선을 찾으면 된다.

ㄱ. 직선의 기울기가 2이다.

ㄴ. 두 점 $(-1, -3)$, $(2, 6)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{6-(-3)}{2-(-1)}=3$

ㄷ. 직선 $y=2x+3$과 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 평행이동에 의하여 직선 $2x-y-1=0$과 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

864

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 방정식 $f(x+1, y-3)=0$이 나타내는 도형으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2-2x-2y+a=0$, 즉

원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2-a$가 옮겨지는 원의 방정식은

$(x+1-1)^2+(y-3-1)^2=2-a$

$\therefore x^2+(y-4)^2=2-a$

이 원의 중심의 좌표가 $(b, 4)$이고 반지름의 길이가 3이므로

$0=b$, $\sqrt{2-a}=3$ $\quad\therefore a=-7$, $b=0$

$\therefore a+b=-7+0=-7$

답 ①

865

직선 $3x+4y+5=0$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3x+4(y-k)+5=0$

$\therefore 3x+4y-4k+5=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=9$에 접하므로 원의 중심의 좌표 $(0, 0)$과 직선 $3x+4y-4k+5=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같다.

$\frac{|-4k+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$, $|-4k+5|=15$

(i) $-4k+5=15$일 때, $k=-\frac{5}{2}$

(ii) $-4k+5=-15$일 때, $k=5$

(i), (ii)에서 구하는 양수 k의 값은 5이다.

답 ⑤

866

원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=4$

이 원이 처음의 원과 외접하므로 두 원의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

즉, $\sqrt{a^2+b^2}=2+2=4$에서

$a^2+b^2=16$

답 ④

867

직선 l의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)으로 놓으면 직선 l을 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은

$-y=mx+n$

이 직선이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$-(-1)=2m+n$, $1=2m+n$ ······ ㉠

직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$-y=-mx+n$

이 직선이 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$-1=-m\cdot(-1)+n$, $-1=m+n$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=2$, $n=-3$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=2x-3$이고 점 (a, a)를 지나므로

$a=2a-3$ $\quad\therefore a=3$

답 ③

868

점 $(2, 1)$을 지나는 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x-2)+1$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x=m(y-2)+1$

이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$2=m(3-2)+1$ $\quad\therefore m=1$

따라서 구하는 직선 l의 방정식은

$y=1\cdot(x-2)+1$ $\quad\therefore x-y-1=0$

답 ①

869

원 $x^2+(y-2)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형과 원 $x^2+(y-2)^2=4$가 겹쳐지는 부분의 넓이는 원 $x^2+(y-2)^2=4$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

원 $x^2+(y-2)^2=4$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2+(x-2)^2=4$

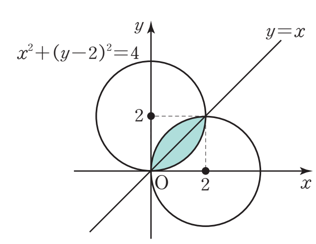
$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 교점의 좌표가 $(0, 0)$, $(2, 2)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$2\left(\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\right)$

$=2\pi-4$



답 $2\pi-4$

870

직선 $2x-y+k=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2(-x)-(-y)+k=0$ $\quad\therefore 2x-y-k=0$

직선 $2x-y-k=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2y-x-k=0$ $\quad\therefore x-2y+k=0$

이 직선이 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=5$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-2, 3)$을 지난다.

즉, $-2-2\cdot3+k=0$ $\quad\therefore k=8$

답 ④

871

직선 $l : y=\frac{1}{2}x+k$를 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은

$l_1 : -y=\frac{1}{2}x+k,\ y=-\frac{1}{2}x-k$

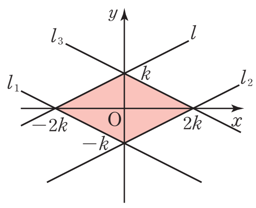
직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$l_2 : y=-\frac{1}{2}(-x)-k,\ y=\frac{1}{2}x-k$

직선 l_2를 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l_3의 방정식은

$l_3 : -y=\frac{1}{2}x-k,\ y=-\frac{1}{2}x+k$

따라서 네 직선 l, l_1, l_2, l_3으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 길이가 $4k$, $2k$인 마름모이다.



이때, 그 넓이가 32이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4k\cdot 2k=4k^2=32$

$k^2=8 \qquad \therefore k=2\sqrt{2}\ (\because k>0)$

답 ③

872

원 $x^2+2x+y^2=3$을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

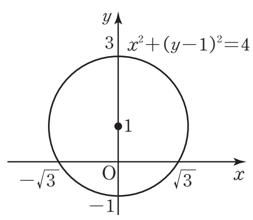
$(-x)^2+2(-x)+(-y)^2=3 \qquad \therefore x^2-2x+y^2=3$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$y^2-2y+x^2=3$

$\therefore x^2+y^2-2y=3$

이 원이 x축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로 $y=0$을 대입하면



$x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{3}$

답 ④

873

$y=|x+2|-|x-6|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 $x=-2$, $x=6$이므로

(i) $x<-2$일 때

$y=-(x+2)+(x-6)=-8$

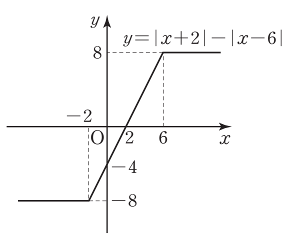
(ii) $-2\le x<6$일 때

$y=x+2+(x-6)=2x-4$

(iii) $x\ge 6$일 때

$y=x+2-(x-6)=8$

(i)~(iii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 함수의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2 이상이 되도록 하는 정수 k의 값은 -8, 8이다.



따라서 구하는 모든 정수 k의 값의 곱은 $-8\cdot 8=-64$

답 ③

874

직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2=a(x+1)+b \qquad \therefore y=ax+a+b+2$

가

이 직선이 직선 $y=3x+5$와 y축 위의 한 점에서 수직으로 만나므로

$a=-\frac{1}{3}$

나

이때, y축 위의 한 점의 좌표는 직선 $y=3x+5$와 y축의 교점의 좌표인 $(0,\ 5)$이므로

$5=a+b+2 \qquad \therefore b=\frac{10}{3}$

다

$\therefore 3(b-a)=3\cdot\left\{\frac{10}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=11$

라

단계	채점 요소	비율
가	평행이동한 직선의 방정식 구하기	30%
나	a의 값 구하기	30%
다	b의 값 구하기	30%
라	$3(b-a)$의 값 구하기	10%

답 11

875

원 $x^2+(y-1)^2=9$의 중심 $(0,\ 1)$을 직선 $y=x+4$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 두 점 $(0,\ 1)$, $(p,\ q)$를 이은 선분의 중점의 좌표 $\left(\frac{p}{2},\ \frac{1+q}{2}\right)$가 직선 $y=x+4$ 위의 점이므로

$\frac{1+q}{2}=\frac{p}{2}+4,\ 1+q=p+8$

$\therefore p-q=-7 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또한 두 점 $(0,\ 1)$, $(p,\ q)$를 이은 직선이 직선 $y=x+4$와 수직이므로

$\frac{q-1}{p}=-1,\ q-1=-p$

$\therefore p+q=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-3$, $q=4$

$\therefore (p,\ q)=(-3,\ 4) \qquad \cdots\cdots$ ㉢

가

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$에서

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c$

이 원의 중심의 좌표 $(a,\ b)$와 ㉢이 일치하므로

$a=-3,\ b=4$

나

또한 원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$a^2+b^2-c=9 \qquad \therefore c=9+16-9=16$

다

$\therefore a+b+c=-3+4+16=17$

라

단계	채점 요소	비율
가	직선 $y=x+4$에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표 구하기	40%
나	a, b의 값 각각 구하기	30%
다	c의 값 구하기	20%
라	$a+b+c$의 값 구하기	10%

답 17

MEMO

MEMO