2022학년도 신입학 수시모집

논술고사 문제지 (자연계열-1교시)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험 종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지에 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 “**검정색볼펜**”으로 정확히 기재하고 진하게 마킹하기 바랍니다.

■ 답안 작성란은 “**검정색볼펜**” 또는 “**검정색 연필(샤프)**”로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

■ 현 수학 교육과정과 교과서에서 다룬 내용과 방법을 이용한 풀이를 정당한 풀이로 인정합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 그 구간에 속하는 모든 x에서

$f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

$f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

2. 타원

평면의 두 점 F와 F'로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라고 한다. 이때 두 점 F와 F'을 타원의 초점이라고 한다.

3. 치환적분법을 이용한 정적분

미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha$와 $g(b) = \beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 포함한 구간에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

[1] 다항식의 인수분해를 이용하여 자연수 $N = (11 \times 13 \times 15 \times 17 - 9) + (11^3 + 5 \times 11^2 + 3 \times 11 - 9)$를 소인수분해하시오. [7점]

[2] 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$과 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 및 포물선 $y = x^2 - 7x + 12$의 점 $\mathrm{B}(b,\ c)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $\mathrm{B}(b,\ c)$와 직선 AO 사이의 거리를 b에 관한 식으로 나타내시오. [4점]

(2) 삼각형 AOB의 넓이를 b에 관한 식으로 나타내고, 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값을 찾으시오. [4점]

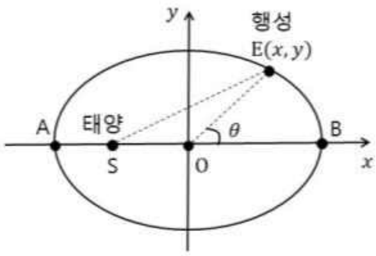
<다음 장 계속>

[3] 두 함수 $f(x)=x^2+4$와 $g(x)=kx+1$에 대하여 다음을 찾으시오.

(1) 함수 $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$가 모든 실수 x에서 정의되기 위한 상수 k의 값의 범위 [4점]

(2) 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 구간 $(0,\infty)$에서 증가하도록 하는 상수 k의 값의 범위 [6점]

[4] 태양 S를 한 초점으로 하는 타원 궤도를 따라 행성 E가 공전하고 있다고 하자. 오른쪽 그림과 같이 이 타원을 좌표평면에 나타내어 타원의 중심은 원점 O에 장축 AB는 x축에 놓인다고 하자. 태양 S는 원점 O와 꼭짓점 A 사이에 있다. 선분 AS의 길이가 2, 선분 SB의 길이가 18이라고 할 때, 다음을 찾으시오.



(1) 좌표평면에서 행성 E의 궤도를 나타내는 타원의 방정식 [5점]

(2) 선분 OE와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 매개변수 θ로 (1)의 타원의 방정식을 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ $(0\le\theta<2\pi)$로 나타낼 수 있다. 이때, 두 양수 a와 b의 값과 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$에 대응하는 점에서의 타원의 접선의 방정식 [7점]

(3) 선분 SE의 길이를 $l(\theta)$라고 할 때, $l(\theta)$의 최솟값과 그때의 θ의 값 [6점]

(4) θ가 0에서 $\dfrac{\pi}{4}$까지 증가하는 동안 선분 OE가 지나가는 영역의 넓이 [7점]

<다음 장 계속>

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 함수 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x) = L$이고 $\lim_{x \to a} g(x) = M$ (L, M은 실수)일 때, a에 가까운 x의 모든 값과 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $L = M$이면 $\lim_{x \to a} h(x) = L$이다.

2. 확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ $(\alpha \le x \le \beta)$에 대하여

① $f(x) \ge 0$

② $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x = \alpha$와 $x = \beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

③ 두 상수 a와 $b(\alpha \le a \le b \le \beta)$에 대하여 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x = a$와 $x = b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

3. 부분적분법을 이용한 정적분

미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f'(x)$와 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

[1] 삼차방정식 $x^3 - 9x^2 + cx - 12 = 0$의 세 실근은 등차수열을 이룬다. 이때 다음을 찾으시오.

(1) 등차수열을 이루는 세 실근의 등차중항 [4점]

(2) 상수 c의 값 [3점]

(3) 주어진 방정식의 세 실근 [4점]

[2] n이 자연수일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\dfrac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} = \dfrac{n+1}{(n+2)!}$임을 증명하시오. [6점]

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2022} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}$의 값을 찾으시오. [7점]

<다음 장 계속>

[3] 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=kx\ln|x|$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 실수 t에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) 구간 $0<x<1$에서 두 함수 $\ln|x|$와 $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$의 대소 관계를 판정하시오. [7점]

(2) (1)을 이용하여 두 극한값 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$와 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$를 찾으시오. [6점]

(3) 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 함수 $g(t)$가 불연속인 t의 값과 그 함숫값 $g(t)$의 순서쌍 $(t, g(t))$를 찾으시오. [7점]

(4) 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=kx\ln|x|$ $\left(-1\le x\le -\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$일 때, 양수 k의 값을 찾으시오. [6점]

<끝>

2022학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설

[자연계열-1교시-문제1]

출제 의도

[1] 다항식의 인수분해 능력을 평가하고, 복잡한 형태의 두 자연수의 곱으로 나타나는 자연수의 소인수분해를 위해 다항식의 인수분해를 활용하는 능력을 판단한다.

[2] 좌표평면에서 이차곡선의 점과 직선과의 거리를 이해하고 계산할 수 있는 능력과 이를 활용하여 삼각형의 넓이를 찾는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

[3] 이차함수에 있어서 판별식을 이해하고 활용할 수 있는 능력을 판단한다. 삼차함수의 증가, 감소와 관련한 문제에 대해 미분을 활용하여 해결해나가는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

[4] 타원의 정의와 기본 성질을 이해하는 능력을 판단한다. 이를 행성의 궤도라는 응용문제에 적용하여 해결해 나가는 과정과 설명 능력을 판단한다. 타원 안의 일부 면적을 치환적분을 활용하여 해결하고 설명하는 능력을 판단한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문2	교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선
	성취기준	[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [1]	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 3 인수분해
	성취기준	[10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 2 직선의 방정식
	성취기준	[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
문항 [2](2)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수
	성취기준	[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.

문항 [3](2)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선
	성취기준	[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
문항 [4](2)	교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선 [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법
	성취기준	[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
문항 [4](3)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표 [수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
	성취기준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문항 [4](4)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2020년	32
	수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2020년	83
	미적분	이준열 외	천재교육	2021년	93, 147
	기하	권오남 외	㈜교학사	2021년	21, 43
기타					

5. 문항 해설

[1] (1) 주어진 자연수에 대해 특정한 수를 기준으로 하여 다항식으로 표현할 수 있는지를 묻고, 그 다항식을 인수분해하여 주어진 자연수의 소인수분해를 해결할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[2] (1) 한 점과 직선 사이의 거리 공식을 활용하여 문제에서 요구하는 거리를 어떤 변수에 관한 식으로 나타낼 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) (1)에서 찾은 식을 활용하여 삼각형 넓이의 식으로 표현할 수 있는지를 묻고, 이차함수의 최대, 최소를 찾을 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3] (1) 이차함수와 판별식과의 관계를 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 삼차항의 계수가 미지수인 삼차함수의 증가에 대해 경우를 나누고 미분을 활용하여 미지수의 범위를 알아내는 문항이다.

[4] (1) 타원의 정의에 대한 이해를 묻고, 이를 바탕으로 타원의 방정식을 찾아낼 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 주어진 매개변수식과 타원과의 관계를 유추하고 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(3) 타원의 그래프에 대한 이해를 바탕으로 선분의 길이를 어떤 변수로 표현하고 최솟값을 찾을 수 있는지를 묻는 문항이다.
(4) 영역의 넓이를 정적분으로 나타낼 수 있는지를 묻고, 치환적분을 활용하여 정적분의 계산능력을 묻는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	$11\times13\times15\times17-9$로부터 $(x^2+6x-1)(x+3)^2(=186\times14^2)$을 보였으면	3
	$11^3+5\times11^2+3\times11-9$로부터 $(x-1)(x+3)^2(=10\times14^2)$을 보였으면	2
	$2^4\times7^4$을 찾았으면	2
[2](1)	점 $\mathrm{B}(b,\ c)$와 직선 $3x+y=0$ 사이의 거리 $\dfrac{\lvert 3b+c\rvert}{\sqrt{3^2+1^2}}$를 찾았으면	3
	거리 $\dfrac{b^2-4b+12}{\sqrt{10}}$를 찾았으면	1
[2](2)	$\triangle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\dfrac{(b-2)^2+8}{\sqrt{10}}$을 찾았으면	3
	삼각형 AOB의 넓이의 최솟값이 4임을 찾았으면	1
[3](1)	$x^2-kx+3=0$이면 안 된다는 것을 적시하고 $D=k^2-12<0$을 찾았으면	2
	$-2\sqrt{3}<k<2\sqrt{3}$을 찾았으면	2
[3](2)	$k=0,\ k>0,\ k<0$의 경우로 나누어 올바른 풀이를 했으면	4
	$k\geq0$를 찾았으면	2
[4](1)	장축에 대하여 $a=10$을 찾았으면	2
	단축에 대하여 $b^2=36$을 찾았으면	2
	타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$을 찾았으면	1
[4](2)	$a=10$과 $b=6$을 찾았으면	2
	접점 $(5,3\sqrt{3})$을 찾았으면	1
	기울기 $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$을 찾았으면	2
	접선의 방정식 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}x+4\sqrt{3}$을 찾았으면	2
[4](3)	$l(\theta)=8\cos\theta+10$을 찾았으면	3
	$l(\theta)$의 최솟값 2를 찾았으면	1
	$\theta=\pi$을 찾았으면	2

하위 문항	채점 기준	배점
[4](4)	넓이의 식 $\int_{5\sqrt{2}}^{10} 6\sqrt{1-\frac{x^2}{100}}\,dx + \triangle\mathrm{EOH}$을 찾았으면	3
	$x=10\cos\theta$로 치환하여 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} 6\sin\theta(-10\sin\theta)\,d\theta + \frac{5\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2}$으로 바꾸었으면	2
	넓이 $\frac{15}{2}\pi$를 찾았으면	2

예시 답안

[1]

$11=x$라고 하자. 자연수 $A=11\times13\times15\times17-9$는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$x(x+2)(x+4)(x+6)-9=(x^2+6x)(x^2+6x+8)-9$

$x^2+6x=t$라고 하면 다음을 얻는다.

$t(t+8)-9=t^2+8t-9=(t-1)(t+9)=(x^2+6x-1)(x^2+6x+9)=(x^2+6x-1)(x+3)^2(=186\times14^2)\cdots$①

자연수 $B=11^3+5\times11^2+3\times11-9$는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$x^3+5x^2+3x-9=(x-1)(x^2+6x+9)=(x-1)(x+3)^2(=10\times14^2)\cdots$②

①과 ②로부터 자연수 $N=A+B=(11\times13\times15\times17-9)+(11^3+5\times11^2+3\times11-9)$는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$(x^2+6x-1)(x+3)^2+(x-1)(x+3)^2=(x^2+7x-2)(x+3)^2(=196\times14^2)$

이제 x에 11을 대입하면 다음을 얻는다.

$(11\times13\times15\times17-9)+(11^3+5\times11^2+3\times11-9)=196\times14^2=2^2\times7^2\times2^2\times7^2=2^4\times7^4$

(자연수 A에 관한 다른 풀이)

$14=x$라고 하자. 자연수 $A=11\times13\times15\times17-9$는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)-9=(x^2-1)(x^2-9)-9=x^4-10x^2=x^2(x^2-10)(=14^2\times186)$

[2]

(1) 직선 AO의 식은 $y=-3x$, 곧 $3x+y=0$이다. $c=b^2-7b+12$이므로 점 $\mathrm{B}(b,\ c)$와 직선 $3x+y=0$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|3b+c|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|3b+b^2-7b+12|}{\sqrt{10}}=\frac{|b^2-4b+12|}{\sqrt{10}}=\frac{|(b-2)^2+8|}{\sqrt{10}}$$

그런데 $(b-2)^2+8>0$이므로, 찾는 거리는 $\frac{(b-2)^2+8}{\sqrt{10}}=\frac{b^2-4b+12}{\sqrt{10}}$이다.

(2) $\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$이므로, (1)에 의해 삼각형 AOB의 넓이는 다음과 같다.

$\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AO}}\times\{$점 $\mathrm{B}(b,\ c)$와 직선 $3x+y=0$ 사이의 거리$\}$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{(b-2)^2+8}{\sqrt{10}} = \frac{(b-2)^2+8}{2} = \frac{1}{2}(b-2)^2+4$$

따라서 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 4이다.

(최소 넓이에 관한 다른 풀이)

직선 AO를 평행이동시켜 포물선과 접하는 점을 구한다.

직선 AO의 기울기는 -3이다. 이에 따라 $y=x^2-7x+12$에서 $y'=2x-7=-3$이어야 하므로 $x=2$이고 그때 y의 값은 2이다. 그러므로 접점은 $(2,2)$이다.

점 $(2,2)$와 직선 AO, 즉 $3x+y=0$ 사이의 거리는 $\frac{3\times2+2}{\sqrt{10}}$이고 $\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$이므로 삼각형 AOB의 넓이는 다음과 같다.

$$\triangle \mathrm{AOB} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AO}} \times \{\text{점 } (2,2)\text{와 직선 } 3x+y=0 \text{ 사이의 거리}\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{8}{\sqrt{10}} = 4$$

[3]

(1) 분모 $f(x)-g(x)=x^2-kx+3$이 0이 되면 안 되므로, $D=k^2-12<0$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는 $-2\sqrt{3}<k<2\sqrt{3}$이다.

(2) $h(x)=(x^2+4)(kx+1)=kx^3+x^2+4kx+4$이므로 구간 $(0,\infty)$에서 $h'(x)=3kx^2+2x+4k>0$이어야 한다.

(i) $k=0$일 때, $h(x)=x^2+4$이므로 $h'(x)=2x$이고 구간 $(0,\infty)$에서 $h'(x)>0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $k>0$일 때, $h'(x)=3k\left(x+\frac{1}{3k}\right)^2+4k-\frac{1}{3k}$이다. 이차함수 $y=h'(x)$의 그래프의 축이 $x=-\frac{1}{3k}<0$이고 $h'(0)=4k>0$이므로 구간 $(0,\infty)$에서 $h'(x)>0$이다. 따라서 $k>0$은 조건을 만족시킨다.

(iii) $k<0$인 경우, $\lim_{x\to\infty} h'(x)<0$이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는 $k\geq 0$이다.

[4]

(1) 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 장축의 길이$(=\overline{\mathrm{AB}})$가 $2a=20$이므로 $a=10$이다.

$\overline{\mathrm{AO}}=10$이고 $\overline{\mathrm{AS}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{SO}}$의 길이는 8이다. 양수 c에 대해 두 초점을 $(c,0)$과 $(-c,0)$이라고 하면 태양이 초점 $(-c,0)$에 있으므로 $c=8$이다. 그러므로 $b^2=a^2-c^2=100-64=36$이다.

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$이다.

(2) 행성의 좌표 $(x,y)=(a\cos\theta, b\sin\theta)$를 타원의 방정식에 대입하면

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=\frac{a^2\cos^2\theta}{100}+\frac{b^2\sin^2\theta}{36}=1$이다.

$\theta=0$일 때, $a^2=100$이고 $a>0$이므로 $a=10$이다.

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$일 때, $b^2=36$이고 $b>0$이므로 $b=6$이다.

매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=-\frac{6\cos\theta}{10\sin\theta}=-\frac{3\cos\theta}{5\sin\theta}\text{이다.}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, 접점은 $(x,y)=(5,3\sqrt{3})$이고 기울기는 $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$이다.

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, 타원의 접선의 방정식은 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}(x-5)+3\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}x+4\sqrt{3}$이다.

(접선의 방정식에 대한 다른 풀이)

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, 접점은 $(x,y)=(5,3\sqrt{3})$이므로 타원에 있는 점에서의 접선의 방정식 공식을 사용하면

접선의 방정식은 $\dfrac{5x}{100}+\dfrac{3\sqrt{3}y}{36}=1$이고 이를 정리하면 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}x+4\sqrt{3}$이다.

(3) $l(\theta)$는 다음과 같다.

$$l(\theta)=\sqrt{(10\cos\theta+8)^2+(6\sin\theta)^2}=\sqrt{64\cos^2\theta+160\cos\theta+100}$$
$$=\sqrt{(8\cos\theta+10)^2}=|8\cos\theta+10|$$

$|\cos\theta|\le 1$이므로 $l(\theta)=8\cos\theta+10$이고 $\cos\theta=-1$, 즉 $\theta=\pi$일 때 $l(\theta)$는 최솟값 2를 갖는다.

(4) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$으로부터 $y=\pm 6\sqrt{1-\dfrac{x^2}{100}}$ 이다. $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$이므로 $y=6\sqrt{1-\dfrac{x^2}{100}}$ 이다.

$x=10\cos\theta,\ y=6\sin\theta$로부터 $\theta=0$일 때 $\mathrm{E}(10,0)$이고, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $\mathrm{E}(5\sqrt{2},3\sqrt{2})$이다.

$\mathrm{H}(5\sqrt{2},0)$이라 하고 찾는 넓이를 T라고 하면 $T=\displaystyle\int_{5\sqrt{2}}^{10}6\sqrt{1-\frac{x^2}{100}}\,dx+\triangle\mathrm{EOH}$ 이다.

$x=10\cos\theta$로 치환하면 $\dfrac{dx}{d\theta}=-10\sin\theta$이고 $6\sqrt{1-\dfrac{x^2}{100}}=6\sqrt{1-\cos^2\theta}=6|\sin\theta|=6\sin\theta$ $\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right)$

이므로 다음을 얻는다.

$$T=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}6\sin\theta\,(-10\sin\theta)\,d\theta+\frac{5\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2}=60\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta+15=30\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta+15$$
$$=30\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+15=15\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+15=\frac{15}{2}\pi$$

2022학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-1교시-문제2]

출제 의도

[1] 세 실근을 등차수열로 표현하고 이를 이용하여 삼차방정식을 완성할 수 있는 능력과 미정계수법을 활용하여 삼차방정식의 계수와 세 실근을 계산하고 찾는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

[2] 계승으로 주어진 식을 간단한 식으로 변환할 수 있는 능력과 부분분수를 활용하여 급수의 합을 찾는 계산 능력과 그 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

[3] 미분을 활용하여 두 함수의 대소 관계를 판정할 수 있는 능력과 그 결과를 바탕으로 원점에서 정의되지 않는 함수에 대해 극한값을 찾는 능력을 판단한다. 함수의 그래프 개형을 미분을 활용하여 해결해나가는 능력을 판단한다. 확률밀도함수에 대한 기본적인 이해를 묻고 실제 함수에 활용하는 능력을 판단한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한
	성취기준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[확률과통계] - (3) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포
	성취기준	[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
제시문3	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열
	성취기준	[12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식
	성취기준	[10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.
문항 [1](3)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{3}$ 인수분해
	성취기준	[10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{2}$ 나머지정리
	성취기준	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
문항 [2](2)	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{2}$ 수열의 합
	성취기준	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

문항 [3](1)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한
	성취기준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문항 [3](3)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
	성취기준	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
문항 [3](4)	교육과정	[확률과통계] - (3) 통계 - 1 확률분포 [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2020년	26
	수학Ⅰ	황선욱 외	미래앤	2021년	126, 149
	수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2020년	24, 32
	미적분	이준열 외	천재교육	2021년	63, 157
	확률과통계	홍성복 외	지학사	2021년	99
기타					

문항 해설

[1] (1) 세 실근을 등차수열로 표현하고 이를 바탕으로 삼차방정식을 찾아 계수비교를 통해 해결할 수 있다.
(2) 두 삼차방정식의 계수비교를 통해 해결할 수 있다.
(3) 인수정리를 이용하여 삼차방정식을 인수분해하면 해결할 수 있다.

[2] (1) 주어진 식을 간단하게 변형할 수 있는 식의 활용능력으로 해결할 수 있다.
(2) 부분분수로 활용하여 급수의 합을 찾을 수 있다.

[3] (1) 두 함수의 차를 새로운 함수로 두고 미분을 활용한 극대, 극소 판정을 적용하여 해결할 수 있다.
(2) (1)에서 찾은 대소 관계식에 함수의 극한과 대소 관계 등에 의해 극한값을 해결할 수 있다.
(3) 미분을 활용하여 극대, 극소 판정을 적용하고 이를 바탕으로 함수의 그래프의 개형을 찾는다면 해결할 수 있는 문항이다.
(4) 확률밀도함수의 정의를 이해하고 치환적분을 활용하여 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	세 실근을 $a-d$, a, $a+d$라고 하고 삼차방정식 $x^3-3ax^2+(3a^2-d^2)x-a^3+ad^2$을 찾았으면	2
	계수비교에 의해 등차중항 $a=3$을 찾았으면	2
[1](2)	$a=3$을 대입하여 $c=22$을 찾았으면	3
[1](3)	$x^3-9x^2+22x-12=(x-3)(x^2-6x+4)$을 찾았거나 $d=\pm\sqrt{5}$를 찾았으면	2
	세 실근 $3-\sqrt{5}$, 3, $3+\sqrt{5}$을 찾았으면	2
[2](1)	$\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{n+2}{n!\{1+(n+1)+(n+2)(n+1)\}}=\frac{n+2}{n!(n^2+4n+4)}$를 찾았으면	3
	$\frac{n+2}{n!(n+2)^2}=\frac{1}{n!(n+2)}=\frac{n+1}{n!(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{(n+2)!}$을 찾았으면	3
[2](2)	$\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$	4
	$\sum_{n=1}^{2022}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2024!}$을 찾았으면	3
[3](1)	$h(x)=\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{\sqrt{x}}$라고 하고, $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}$을 찾았으면	3
	$h'(x)=0$의 근이 $x=\frac{1}{4}$임을 찾고 함수 $h(x)$의 최솟값이 $h\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln4+2=\ln\frac{e^2}{4}>0$임을 찾았으면	3
	구간 $0<x<1$에서 $\ln\lvert x\rvert>-\frac{1}{\sqrt{x}}$임을 찾았으면	1
[3](2)	$-\sqrt{x}<x\ln\lvert x\rvert<0$를 찾고 $\lim_{x\to0+}\sqrt{x}=0$을 찾았으면	2
	극한 $\lim_{x\to0-}f(x)$에서 $f(-x)=-f(x)$을 밝혔으면	2
	$\lim_{x\to0+}f(x)=0$와 $\lim_{x\to0-}f(x)=0$을 찾았으면	2
[3](3)	$f'(x)=k(\ln\lvert x\rvert+1)$을 찾았으면	1
	함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면	3
	$(t,\ g(t))$의 순서쌍 $(-ke^{-1},2)$, $(0,2)$, $(ke^{-1},2)$을 찾았으면	3

하위 문항	채점 기준	배점
[3](4)	구간 $\left(-1 \le x \le -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$에서 $f(x) \ge 0$임을 언급하면	1
	부분적분법으로 $\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} kx\ln(-x)\,dx = k\left[\frac{1}{2}x^2\ln(-x)\right]_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} - k\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{1}{2}x\,dx$을 찾았으면	3
	$k = \frac{4e}{e-2}$을 찾았으면	2

예시 답안

[1]

(1) 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$라고 하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$(x-a)(x-a+d)(x-a-d)=(x-a)(x^2-2ax+a^2-d^2)=x^3-3ax^2+(3a^2-d^2)x-a^3+ad^2$$

$a-d$, a, $a+d$가 주어진 삼차방정식의 세 실근이므로 다음이 성립한다.

$$x^3-9x^2+cx-12=x^3-3ax^2+(3a^2-d^2)x-a^3+ad^2$$

그러면 계수비교에 의해 $9=3a$이므로, $a=3$이다.

(2) $a=3$이 주어진 방정식의 근이므로 다음을 얻는다.

$$3^3-9\times 3^2+3c-12=0,\quad 3c=-27+81+12=66,\quad c=22$$

(다른 풀이)

위의 (1)의 답안에서 두 삼차방정식의 일차항과 상수항의 계수비교에 의해 $a=3$이므로

$c=3a^2-d^2=27-d^2$과 $-12=-a^3+ad^2=-27+3d^2$을 얻는다.

위 두 번째 식으로부터 $d^2=5$를 얻고 위 첫 번째 식으로부터 $c=22$을 얻는다.

(3) (2)에 의해 $c=22$이므로, 주어진 방정식은 $x^3-9x^2+22x-12=0$이다.

(1)에 의해 $a=3$은 이 방정식의 근이므로, 인수정리에 의해 $x^3-9x^2+22x-12$는 $x-3$에 의해 나누어떨어진다. 실제로 나누거나 조립제법에 의해 $x^3-9x^2+22x-12=(x-3)(x^2-6x+4)$를 얻을 수 있다.

이에 따라 $(x-3)(x^2-6x+4)=0$이므로, 주어진 방정식의 세 근은 $3-\sqrt{5}$, 3, $3+\sqrt{5}$이다.

(다른 풀이)

위의 (1)에서 구한 a와 위 (2)의 다른 풀이의 방법으로 구한 $d=\pm\sqrt{5}$를 $a-d$, a, $a+d$에 대입하여 구할 수도 있다.

[2]

(1)
$$\begin{aligned}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}&=\frac{n+2}{n!\{1+(n+1)+(n+2)(n+1)\}}\\&=\frac{n+2}{n!(n^2+4n+4)}=\frac{n+2}{n!(n+2)^2}=\frac{1}{n!(n+2)}\\&=\frac{n+1}{n!(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

(2) 위의 (1)에 의해 각 자연수 n에 대해 다음이 성립한다.

$$\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2022}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}&=\sum_{n=1}^{2022}\left\{\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right\}\\&=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2023!}-\frac{1}{2024!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{2024!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2024!}\end{aligned}$$

[3]

(1) $h(x)=\ln|x|+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$라 하자. 함수 $h(x)$는 구간 $0<x<1$에서 미분가능하고 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}$이다. 주어진 구간에서 $h'(x)=0$의 근은 $x=\dfrac{1}{4}$뿐이다. 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	(1)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$-2\ln 2+2>0$	↗	

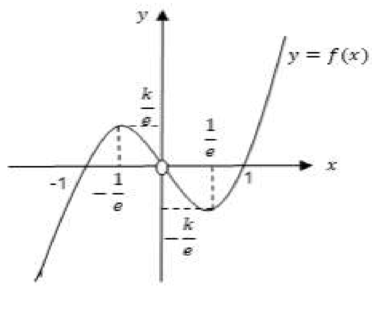
함수 $h(x)$의 최솟값은 $h\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\ln 4+2=\ln\dfrac{e^2}{4}>0$이므로, 구간 $0<x<1$에서 $\ln|x|>-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$이다.

(2) (1)의 결과로부터 구간 $(0,1)$에서 $-1<\sqrt{x}\ln|x|<0$이 성립한다.
양변에 $\sqrt{x}$를 곱하면 $-\sqrt{x}<x\ln|x|<0$이다. $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}=0$이므로, 함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$이다. …… ①
극한 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)$에서 $x=-t$로 치환하고 $f(-x)=-kx\ln|-x|=-kx\ln|x|=-f(x)$와 ①을 차례로 이용하면 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{t\to0+}f(-t)=-\lim\limits_{t\to0+}f(t)=0$이다.

(3) 함수 $f(x)$는 $x=0$을 제외한 모든 실수 x에서 미분가능하며, $f'(x)=k(\ln|x|+1)$이다.
$f'(x)=0$의 근은 $x=\pm e^{-1}$이다. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-e^{-1}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	ke^{-1}	↘	0에 수렴	↘	$-ke^{-1}$	↗

오른쪽에 있는 함수 $y=f(x)$의 그래프 개형과 직선 $y=t$와의 교점을 헤아려보면 함수 $g(t)$는 다음과 같다.



$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<-ke^{-1})\\ 2 & (t=-ke^{-1})\\ 3 & (-ke^{-1}<t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 3 & (0<t<ke^{-1})\\ 2 & (t=ke^{-1})\\ 1 & (ke^{-1}<t)\end{cases}$$

따라서 함수 $g(t)$의 불연속인 t의 값과 그 함숫값 $g(t)$의 순서쌍들은 다음과 같다.
$(-ke^{-1},2)$, $(0,2)$, $(ke^{-1},2)$

(4) 양수 k에 대하여 확률밀도함수 $f(x)=kx\ln|x|$은 위 (3)에서 살펴본 바와 같이 구간 $\left(-1\le x\le-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

에서 $f(x) \geq 0$이다. 또한 확률밀도함수 $f(x)$는 $\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} f(x)\,dx = 1$을 만족시켜야 한다. 부분적분법으로 계산하면 다음을 얻는다.

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} kx\ln(-x)\,dx = k\left[\frac{1}{2}x^2\ln(-x)\right]_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} - k\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= -\frac{k}{4e} - \frac{k}{4}\left[x^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{k}{4}\left(1 - \frac{2}{e}\right) = \frac{k(e-2)}{4e} = 1$$

따라서 찾는 값은 $k = \frac{4e}{e-2}$이다.

(다른 풀이)

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} f(x)dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} kx\ln(-x)dx = k\left[x^2\{\ln(-x)-1\}\right]_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} - \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} k\{x\ln(-x)-x\}dx$$

$\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} f(x)dx = \frac{k}{2}\left(-\frac{3}{2e} + 1 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}}\right) = \frac{k}{4}\left(1 - \frac{2}{e}\right) = \frac{k(e-2)}{4e} = 1$이다. 따라서 찾는 값은 $k = \frac{4e}{e-2}$이다.