• 2교시 수학 영역 •

1	②	**2**	④	**3**	⑤	**4**	①	**5**	⑤
6	④	**7**	①	**8**	③	**9**	①	**10**	②
11	②	**12**	②	**13**	③	**14**	③	**15**	④
16	5	**17**	3	**18**	8	**19**	6	**20**	30
21	22	**22**	32						

1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$\log_6 4+\dfrac{2}{\log_3 6}=\log_6 4+2\log_6 3=\log_6(4\times 9)=2$

2. [출제의도] 등비수열 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $r>0$

$\dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{3r^4}{3r^2}=r^2=4,\ r=2$

따라서 $a_4=3r^3=24$

3. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 2-}f(x)=2+3=5$

4. [출제의도] 함수의 극대와 극소 이해하기

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+4$	↘	$a-4$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $a-4$를 갖는다.

따라서 $a-4=2,\ a=6$

5. [출제의도] 평균변화율과 미분계수 이해하기

평균변화율 $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+2h+3$에서

$f'(1)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+2h+3)=3$

6. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$는

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$x=2$일 때 최댓값 3,

$x=5$일 때 최솟값 1을 갖는다.

$\log_{\frac{1}{2}}(2-a)+b=3$

$\log_{\frac{1}{2}}(5-a)+b=1$

두 식을 연립하면

$\log_{\frac{1}{2}}(2-a)-\log_{\frac{1}{2}}(5-a)=2$

$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2-a}{5-a}=2$에서 $\dfrac{2-a}{5-a}=\dfrac{1}{4}$이므로

$4(2-a)=5-a,\ a=1$이고 $b=3$

따라서 $a+b=4$

7. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의

접선의 방정식이 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$이므로

$f'(0)=3,\ f(0)=-1$

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

따라서 $g'(0)=f(0)+2f'(0)=-1+2\times 3=5$

8. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $y=a\tan b\pi x$의 그래프에서

함수 $y=a\tan b\pi x$의 주기는 $8-2=6$이므로

$\dfrac{\pi}{|b\pi|}=\dfrac{1}{b}=6,\ b=\dfrac{1}{6}$

함수 $y=a\tan\dfrac{\pi}{6}x$의 그래프는 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$a\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\times 2\right)=3$에서 $a=\sqrt{3}$

따라서 $a^2\times b=3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$

9. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\displaystyle\int(3x^2-4x+1)dx$

$\quad=x^3-2x^2+x+C$ (C는 적분상수)

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_0^x=F(x)-F(0)$에서

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(2)=8-8+2+1=3$

10. [출제의도] 지수함수를 이용하여 추론하기

곡선 $y=a^x-1$을 직선 $y=x$에 대하여

대칭이동하면 곡선 $y=\log_a(x+1)$이고

$a>1$이므로 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

점 P의 좌표를 $(k,\ k)$라 하면 점 P는

곡선 $y=\log_a(x+1)$ 위의 점이므로 $k>-1$

삼각형 OHP의 넓이가 2이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{k^2}{2}=2$

에서 $k^2=4,\ k=2$

따라서 곡선 $y=a^x-1$이 점 $\mathrm{P}(2,\ 2)$를 지나므로

$2=a^2-1,\ a^2=3$에서 $a=\sqrt{3}$

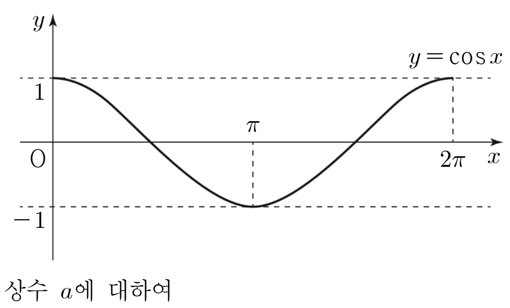
11. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

$2(1-\cos^2 x)-3\cos x=k$

$2\cos^2 x+3\cos x+k-2=0$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는

그림과 같다.



상수 a에 대하여

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=a$가

만나는 서로 다른 점의 개수는

$a=-1$일 때 1이고, $-1<a\le 1$일 때 2이므로

$0\le x\le 2\pi$일 때,

방정식 $2\cos^2 x+3\cos x+k-2=0$의

서로 다른 실근의 개수가 3이려면

$x=\pi$가 이 방정식의 실근이어야 한다.

$2\times(-1)^2+3\times(-1)+k-2=0$에서 $k=3$

$2\cos^2 x+3\cos x+1=(2\cos x+1)(\cos x+1)=0$

에서 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\pi$

따라서 $k\times\alpha=3\times\dfrac{4}{3}\pi=4\pi$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$f'(x)=3x^2-12x+8$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서의

접선의 방정식은

$y-(k^3-6k^2+8k+1)=(3k^2-12k+8)(x-k)$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나므로

$2k^3-6k^2=2k^2(k-3)=0$

에서 $k>0$이므로 $k=3$이고

직선 AB의 방정식은 $y=-x+1$

$S_1=\displaystyle\int_0^3|f(x)-(-x+1)|dx$

$\quad=\displaystyle\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx$

$S_2=\displaystyle\int_0^3|g(x)-(-x+1)|dx$

$\quad=\displaystyle\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$

$S_1=S_2$에서

$\displaystyle\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$

$\displaystyle\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3\{-f(x)-2x+2\}dx$

$\quad=\displaystyle\int_0^3(-x^3+6x^2-10x+1)dx$

$\quad=\left[-\dfrac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2+x\right]_0^3$

$\quad=-\dfrac{81}{4}+54-45+3=-\dfrac{33}{4}$

13. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=g(x)$에서

$k\sin x=\cos x$

$\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x=\dfrac{1}{k}\ \ (\cos x\ne 0)$

그러므로 점 A의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

함수 $y=\tan x$의 주기는 π이므로

점 B의 x좌표는 $\alpha+\pi$이고 두 점 A, B의 좌표는

각각 $(\alpha,\ \cos\alpha)$, $(\alpha+\pi,\ -\cos\alpha)$

선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times(\alpha+\pi)-1\times\alpha}{3-1},\ \dfrac{3\times(-\cos\alpha)-1\times\cos\alpha}{3-1}\right)$

이므로 $\mathrm{C}\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi,\ -2\cos\alpha\right)$

점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-2\cos\alpha=k\sin\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$-2\cos\alpha=k\times(-\cos\alpha)$에서 $k=2$이므로

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$이고, $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)=\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

에서 점 D의 좌표는 $\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$이고

$\overline{CD}=\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\sqrt{5}$

점 B와 직선 CD 사이의 거리는

$\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-(\alpha+\pi)=\frac{\pi}{2}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

14. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

ㄱ. $f'(x)=3x^2-3t^2=3(x+t)(x-t)$

$f'(x)=0$에서 $x=-t$ 또는 $x=t$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-t$	$\cdots$	t	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$2t^3$	↘	$-2t^3$	↗

$t=2$일 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서

두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값은 모두

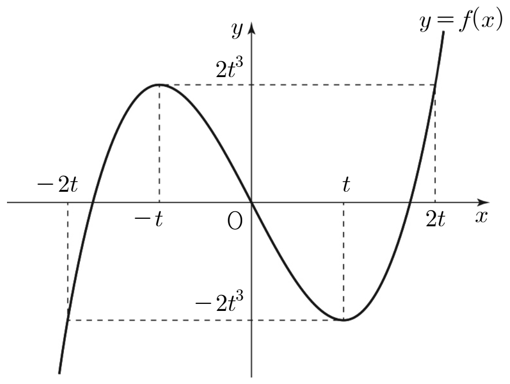
$f(-2)=16$이므로 $M_1(2)=M_2(2)=16$

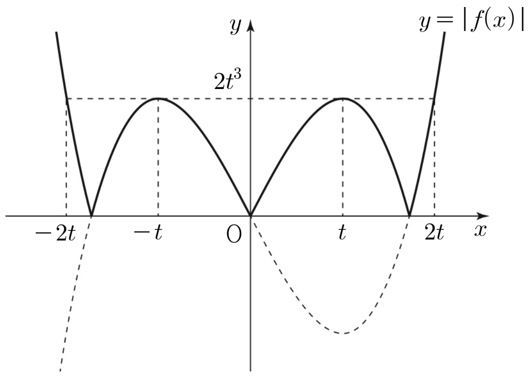
$g(2)=32$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=2t^3$에서 $(x+t)^2(x-2t)=0$,

방정식 $f(x)=-2t^3$에서 $(x-t)^2(x+2t)=0$이므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.





(i) $-t<-2$, $1<t$일 때

$t>2$이고, $M_1(t)=M_2(t)=f(-2)<f(-t)$

이므로 $g(t)=2f(-2)\neq 2f(-t)$

(ii) $-2t\leq-2\leq-t$, $1\leq t$일 때

$1\leq t\leq 2$이고, $M_1(t)=M_2(t)=f(-t)$

이므로 $g(t)=2f(-t)$

(iii) $-2<-2t$, $t<1\leq 2t$일 때

$\frac{1}{2}\leq t<1$이고,

$M_1(t)=f(-t)$, $M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$

이므로 $g(t)=f(-t)-f(-2)\neq 2f(-t)$

(iv) $-2<-2t$, $2t<1$일 때

$0<t<\frac{1}{2}$이고,

$M_1(t)=f(1)>f(-t)$,

$M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$

이므로 $g(t)=f(1)-f(-2)\neq 2f(-t)$

(i)~(iv)에 의하여 $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는

t의 최댓값과 최솟값의 합은 $2+1=3$ (참)

ㄷ. (i) $\frac{1}{2}\leq t<1$일 때

$g(t)=f(-t)-f(-2)=2t^3-6t^2+8$이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\left(2h^2-3h-\frac{9}{2}\right)=-\frac{9}{2}$$

(ii) $0<t<\frac{1}{2}$일 때

$g(t)=f(1)-f(-2)=-9t^2+9$이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}(-9h-9)=-9$$

(i), (ii)에 의하여

$$\lim_{h\to0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$=-\frac{9}{2}-(-9)=\frac{9}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 자연수 n에 대하여

$a_n<1$이면 $a_{n+1}=2^{n-2}>0$이고

$a_n\geq1$이면 $a_{n+1}=\log_2 a_n\geq0$이므로

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\geq0$이다.

조건 (가), (나)에서

a_5, a_6의 값을 구하면

(i) $0\leq a_5<1$일 때

$a_6=2^{5-2}$에서 $a_5+a_6\geq8$이므로

$a_5+a_6=1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_5\geq1$일 때

$a_6=\log_2 a_5\geq0$에서 $a_5+a_6\geq1$

$a_5+a_6=1$을 만족시키려면 $a_5=1$, $a_6=0$

그러므로 $a_5=1$, $a_6=0$

a_4의 값을 구하면

(i) $0\leq a_4<1$일 때

$a_5=2^{4-2}=4$이므로 $a_5=1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4\geq1$일 때

$a_5=\log_2 a_4=1$이므로 $a_4=2$

그러므로 $a_4=2$

a_1, a_2, a_3의 값을 구하면

(i) $0\leq a_3<1$일 때

$a_4=2^{3-2}=2$이므로 $0\leq a_3<1$

(a) $0\leq a_2<1$일 때

$a_3=2^{2-2}=1$이므로 $0\leq a_3<1$을 만족시키지 않는다.

(b) $a_2\geq1$일 때

$a_3=\log_2 a_2$에서 $1\leq a_2<2$

$a_1<1$이면 $a_2=2^{1-2}=\frac{1}{2}$이므로 $1\leq a_2<2$를 만족시키지 않는다.

$a_1\geq1$이면 $a_2=\log_2 a_1$에서 $2\leq a_1<4$

(ii) $a_3\geq1$일 때

$a_4=\log_2 a_3$에서 $a_3=2^2=4$

(a) $0\leq a_2<1$일 때

$a_3=2^{2-2}=1$이므로 $a_3=4$를 만족시키지 않는다.

(b) $a_2\geq1$일 때

$a_3=\log_2 a_2$에서 $a_2=2^4=16$

$a_1<1$이면 $a_2=2^{1-2}=\frac{1}{2}$이므로 $a_2=16$을 만족시키지 않는다.

$a_1\geq1$이면 $a_2=\log_2 a_1$에서 $a_1=2^{16}$

따라서 a_1의 값은 $2\leq a_1<4$ 또는 $a_1=2^{16}$이므로

$M=2^{16}$, $m=2$이고 $\log_2\frac{M}{m}=\log_2 2^{15}=15$

16. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+3)=5$$

17. [출제의도] 지수함수의 그래프의 평행이동 이해하기

함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,

y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

함수 $y=4^{x-1}+a$의 그래프와 일치한다.

함수 $y=4^{x-1}+a$의 그래프가

점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$를 지나므로 $5=4^{\frac{3}{2}-1}+a$

따라서 $a=3$

18. [출제의도] 함수의 극한과 연속 이해하기

$f(x)$가 다항함수이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5$이므로

$xf(x)=2x^3+5x^2+ax$ (a는 실수)

$x\neq0$일 때 $f(x)=2x^2+5x+a$이고

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=a=1$

따라서 $f(1)=2+5+1=8$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=6t^3-24t^2+30t-12=6(t-1)^2(t-2)$

$v(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$

함수 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$v(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$x(t)$		↘	$-\frac{7}{2}$	↘	-4	↗

점 P는 $0<t<2$에서 운동 방향이 음의 방향이고

$t>2$에서 운동 방향이 양의 방향이므로

점 P는 시각 $t=2$에서 운동 방향이 바뀐다.

점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=18t^2-48t+30$

따라서 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간

점 P의 가속도는

$a(2)=18\times2^2-48\times2+30=6$

20. [출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 추론하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

조건 (가)에 의하여 $a_8=S_8-S_7=0$이므로

$a_8=a_1+7d=0$에서 $a_1=-7d$

S_n의 값은 $n=8$에서 최소이므로 $S_9\geq S_8$

$a_9=a_8+d=d\geq0$

$d=0$이면 $a_1=0$에서 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $d>0$
$n\geq 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이므로
$m>8$일 때 $S_{2m}>S_m$
조건 (나)에 의하여 $-S_m=S_{2m}=162$

$$-\frac{m\{2a_1+(m-1)d\}}{2}=\frac{2m\{2a_1+(2m-1)d\}}{2}$$

$14d-(m-1)d=-28d+2(2m-1)d$
$-m+15=4m-30$에서 $m=9$

$S_9=\dfrac{9(-14d+8d)}{2}=-162$에서

$d=6$, $a_1=-42$
따라서 $a_{13}=a_1+12d=-42+12\times 6=30$

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{OP}}=k_1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=k_2$라 하자.
삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2=k_1^2+(2\sqrt{15})^2-2\times k_1\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

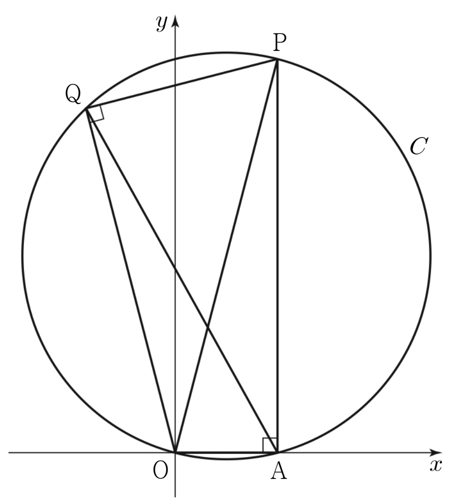
삼각형 OAQ에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2=k_2^2+(2\sqrt{15})^2-2\times k_2\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

이므로 두 실수 k_1, k_2는 이차방정식

$$2^2=x^2+(2\sqrt{15})^2-2\times x\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

의 서로 다른 두 실근이다.
$x^2-15x+56=(x-7)(x-8)=0$
에서 $k_1>k_2$이므로 $k_1=8$, $k_2=7$



$\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})$이므로
$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OQA}$
삼각형 OAP의 외접원을 C라 하면
두 점 P, Q의 y좌표가 양수이므로
점 Q도 원 C 위의 점이다.

$\sin(\angle\mathrm{OPA})=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{4}$이므로

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면
삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin(\angle\mathrm{OPA})}=8=2R$$

그러므로 선분 OP는 원 C의 지름이다.

$\angle\mathrm{PAO}=\angle\mathrm{OQP}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

직각삼각형 OPQ에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$
사각형 OAPQ의 넓이는
두 직각삼각형 OAP, OPQ의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{15}+\frac{1}{2}\times 7\times\sqrt{15}=\frac{11}{2}\sqrt{15}$$

에서 $p=2$, $q=11$
따라서 $p\times q=22$

22. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

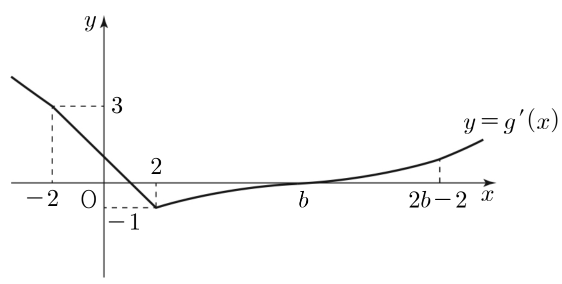
조건 (나)에서 $|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+a$이고
조건 (다)에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서
극값을 가지므로 $g'(1)=-1+a=0$, $a=1$
$|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+1$에서 함수 $g(x)$는
$x=1$에서만 극값을 가지므로 $|b|\geq 2$
함수 $g'(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서 연속이므로

$g'(-2)=\lim\limits_{x\to -2+}g'(x)=\lim\limits_{x\to -2+}(-x+1)=3$ ⋯ ㉠

$g'(2)=\lim\limits_{x\to 2-}g'(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(-x+1)=-1$ ⋯ ㉡

에서 $b\neq\pm 2$이므로 $|b|>2$ ⋯ ㉢
조건 (나)에서 $|g'(b)|=f(b)=0$이고
$|x|\geq 2$인 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $f(x)$는
$f(x)=|g'(x)|\geq 0$이므로
$f(x)=m(x-b)^2$ $(m>0)$
㉠, ㉡에 의하여
$f(-2)=|g'(-2)|=3$, $f(2)=|g'(2)|=1$ ⋯ ㉣
이고 $f(-2)>f(2)$에서
$m(-2-b)^2>m(2-b)^2$
$b^2+4b+4>b^2-4b+4$에서 $b>0$
㉢에 의하여 $b>2$이고
조건을 만족시키는 함수 $g'(x)$는

$$g'(x)=\begin{cases} m(x-b)^2 & (x\leq -2) \\ -x+1 & (-2<x<2) \\ -m(x-b)^2 & (2\leq x<b) \\ m(x-b)^2 & (x\geq b) \end{cases}$$



㉣에 의하여 $f(-2)=m(-2-b)^2=3$,
$f(2)=m(2-b)^2=1$
두 식을 연립하면
$m(-2-b)^2=3m(2-b)^2$
$b^2-8b+4=0$
에서 $b>2$이므로 $b=4+2\sqrt{3}$

조건 (나)에서 $g(0)=\displaystyle\int_0^0(-t+1)dt=0$이므로

$g(k)=\displaystyle\int_0^k g'(t)dt$에서

(i) $k<0$일 때
$x\leq 0$에서 $g'(x)>0$이므로

$$g(k)=\int_0^k g'(t)dt=-\int_k^0 g'(t)dt<0$$

그러므로 $g(k)=0$을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=0$일 때

$$g(0)=\int_0^0 g'(t)dt=0$$이므로

$g(k)=0$을 만족시킨다.

(iii) $0<k\leq 2$일 때

$$\int_0^k g'(t)dt=\int_0^k(-t+1)dt$$
$$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_0^k$$
$$=-\frac{k^2}{2}+k=0$$

에서 $k=2$일 때 $g(k)=0$을 만족시킨다.

(iv) $k>2$일 때
$2<x<b$에서 $g'(x)<0$이므로

$\displaystyle\int_0^k g'(t)dt=0$이려면 $k>b$

$$\int_0^k g'(t)dt$$
$$=\int_0^2 g'(t)dt+\int_2^b g'(t)dt+\int_b^k g'(t)dt$$
$$=0-\int_2^b m(t-b)^2dt+\int_b^k m(t-b)^2dt$$
$$=-m\int_2^b(t^2-2bt+b^2)dt+m\int_b^k(t^2-2bt+b^2)dt$$
$$=-m\left[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\right]_2^b+m\left[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\right]_b^k$$
$$=-\frac{m}{3}(b^3-6b^2+12b-8)+\frac{m}{3}(k^3-3k^2b+3kb^2-b^3)$$
$$=-\frac{m}{3}(b-2)^3+\frac{m}{3}(k-b)^3=0$$

에서 $(k-b)^3=(b-2)^3$
$k-b$, $b-2$는 모두 실수이므로 $k-b=b-2$
그러므로 $k=2b-2=6+4\sqrt{3}$일 때
$g(k)=0$을 만족시킨다.

(i)~(iv)에 의하여 $g(k)=0$을 만족시키는
모든 실수 k의 값의 합은
$0+2+(6+4\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$이므로 $p=8$, $q=4$
따라서 $p\times q=32$

[확률과 통계]

23	①	**24**	⑤	**25**	③	**26**	②	**27**	④
28	①	**29**	523	**30**	188				

23. [출제의도] 중복조합 계산하기

${}_3\Pi_2 + {}_2\mathrm{H}_3 = 3^2 + {}_4\mathrm{C}_3 = 9+4 = 13$

24. [출제의도] 중복순열 이해하기

전체집합 U의 6개의 원소 중에서 집합 $A\cup B$의 원소 5개를 정하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_5 = 6$

$A\cap B = \varnothing$에서 두 집합 A, B의 원소를 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_5 = 32$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는

$6\times 32 = 192$

25. [출제의도] 원순열 이해하기

7명의 학생 중 A, B, C를 제외한 두 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$

A, B, C를 포함한 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times 24 = 144$

26. [출제의도] 중복조합 이해하기

$3x+y+z+w = 11$에서 $y+z+w = 11-3x$

$y' = y-1$, $z' = z-1$, $w' = w-1$

(y', z', w'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(y'+1)+(z'+1)+(w'+1) = 11-3x$

$y'+z'+w' = 8-3x$

(i) $x=1$일 때

방정식 $y'+z'+w' = 5$를 만족시키는

음이 아닌 정수 y', z', w'의 모든 순서쌍

(y', z', w')의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = 21$

(ii) $x=2$일 때

방정식 $y'+z'+w' = 2$를 만족시키는

음이 아닌 정수 y', z', w'의 모든 순서쌍

(y', z', w')의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

(iii) $x\ge 3$일 때

방정식 $y'+z'+w' = 8-3x$를 만족시키는

음이 아닌 정수 y', z', w'의 순서쌍

(y', z', w')은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

구하는 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$21+6 = 27$

27. [출제의도] 이항정리 이해하기

$\left(ax-\dfrac{2}{ax}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r(ax)^r\left(-\dfrac{2}{ax}\right)^{7-r} = {}_7\mathrm{C}_r(-2)^{7-r}a^{2r-7}x^{2r-7}$

$\left(ax-\dfrac{2}{ax}\right)^7$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합 1은

$\left(ax-\dfrac{2}{ax}\right)^7$에 $x=1$을 대입한 값과 같으므로

$\left(a-\dfrac{2}{a}\right)^7 = 1$, $a-\dfrac{2}{a} = 1$

$a^2-a-2 = 0$에서 $(a+1)(a-2) = 0$

$a>0$이므로 $a=2$

$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7\mathrm{C}_r(-1)^{7-r}2^r x^{2r-7}$

$2r-7 = -1$에서 $r=3$

따라서 $\dfrac{1}{x}$의 계수는

${}_7\mathrm{C}_3\times(-1)^4\times 2^3 = 35\times 1\times 8 = 280$

28. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 추론하기

8장의 카드에서 7장의 카드를 택하는 경우는 짝수가 적혀 있는 카드가 4장 또는 3장 선택되는 경우이다.

(i) 짝수가 적혀 있는 카드가 4장 선택된 경우

짝수 2, 2, 2, 4가 적혀 있는 4장의 카드를

일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!} = 4$

짝수가 적힌 4장의 카드를 □로 나타내면

홀수가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지

않아야 하므로

그림과 같이 ∨로 표시된 다섯 곳 중 세 곳에

홀수가 적힌 3장의 카드가 나열되어야 한다.

∨□∨□∨□∨□∨

홀수가 적혀 있는 3장의 카드는

1, 3, 3이 적힌 카드이거나

1, 1, 3이 적힌 카드이므로

홀수가 적힌 3장의 카드를 일렬로 나열하는

경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3\times 2\times\dfrac{3!}{2!} = 60$

구하는 경우의 수는 $4\times 60 = 240$

(ii) 짝수가 적혀 있는 카드가 3장 선택된 경우

짝수가 적혀 있는 3장의 카드는

2, 2, 2가 적힌 카드이거나

2, 2, 4가 적힌 카드이므로

짝수가 적힌 3장의 카드를 일렬로 나열하는

경우의 수는 $1+\dfrac{3!}{2!} = 4$

이 각각에 대하여 짝수가 적힌 3장의 카드를

□로 나타내면 홀수가 적힌 카드끼리는

서로 이웃하지 않아야 하므로

그림과 같이 ∨로 표시된 네 곳에

홀수가 적힌 4장의 카드가 나열되어야 한다.

∨□∨□∨□∨

홀수 1, 1, 3, 3이 적혀 있는 4장의 카드를

일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$

구하는 경우의 수는 $4\times 6 = 24$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$240+24 = 264$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 추론하기

$f(k) = x_k\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$이라 하면

x_k는 5 이하의 자연수이다.

구하는 함수 f의 개수는 두 방정식

$x_4 = x_1+x_2+x_3$, $2x_4 = x_5+x_6+x_7+x_8$을

만족시키는 5 이하의 자연수 x_1, x_2, $\cdots$, x_8의

모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \cdots, x_8)$의 개수와 같다.

$x_1+x_2+x_3\ge 3$이므로 조건 (가)에 의하여

$3\le x_4\le 5$

(i) $x_4 = 3$인 경우

방정식 $x_1+x_2+x_3 = 3$을 만족시키는

5 이하의 자연수 x_1, x_2, x_3의 순서쌍

(x_1, x_2, x_3)은 $(1, 1, 1)$의 1가지이다.

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8 = 6$을 만족시키는

5 이하의 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍

(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는 서로 다른 4개에서

2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$

그러므로 함수 f의 개수는 $1\times 10 = 10$

(ii) $x_4 = 4$인 경우

방정식 $x_1+x_2+x_3 = 4$를 만족시키는

5 이하의 자연수 x_1, x_2, x_3의 순서쌍

(x_1, x_2, x_3)은 $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$의

3가지이다.

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8 = 8$을 만족시키는

5 이하의 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍

(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는 서로 다른 4개에서

4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = 35$

그러므로 함수 f의 개수는 $3\times 35 = 105$

(iii) $x_4 = 5$인 경우

방정식 $x_1+x_2+x_3 = 5$를 만족시키는

5 이하의 자연수 x_1, x_2, x_3의 모든 순서쌍

(x_1, x_2, x_3)의 개수는 서로 다른 3개에서

2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8 = 10$을 만족시키는

5 이하의 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍

(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8 = 10$을 만족시키는

자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍

(x_5, x_6, x_7, x_8)에서

$x_k\ge 6$인 자연수 $k\,(k=5,\ 6,\ 7,\ 8)$이

존재하는 모든 순서쌍 (x_5, x_6, x_7, x_8)을

제외한 개수와 같다.

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8 = 10$을 만족시키는

자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍

(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는 서로 다른 4개에서

6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_6 = {}_9\mathrm{C}_6 = 84$

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8 = 10$을 만족시키는

자연수 x_5, x_6, x_7, x_8 중 6 이상의 자연수가

존재하는 모든 순서쌍 (x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는

네 수 6, 2, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수와

네 수 7, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수의

합과 같으므로 $\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{4!}{3!} = 16$

그러므로 함수 f의 개수는 $6\times(84-16) = 408$

(i), (ii), (iii)에 의하여

구하는 함수 f의 개수는 $10+105+408 = 523$

30. [출제의도] 중복순열을 활용하여 문제해결하기

문자열 aaa와 이웃한 자리를 △,

문자열 aaa와 이웃하지 않는 자리를 □로 나타내면

조건 (가)를 만족시키는 문자열의 형태는

aaa△□□□, △aaa△□□, □△aaa△□,

□□△aaa△, □□□△aaa의 5가지이고

조건 (나)에 의하여 △에 나열될 수 있는 문자는

b 또는 c이다.

(i) aaa△□□□일 때

(a) △에 b가 나열된 경우

3개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는

서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_3=27$

이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은

$aaabbba$, $aaabbbb$, $aaabbbc$,

$aaabaaa$, $aaabccc$의 5가지이다.

그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는

$27-5=22$

(b) △에 c가 나열된 경우

(a)와 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 22

(a), (b)에 의하여 만들 수 있는 문자열의 개수는

$22+22=44$

(ii) △aaa△□□일 때

2개의 △에 a가 아닌 두 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=4$

2개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2=9$

이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은

$baaabbb$, $baaaccc$, $caaabbb$, $caaaccc$의 4가지이다.

그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는

$4\times9-4=32$

(iii) □△aaa△□일 때

2개의 △에 a가 아닌 두 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=4$

2개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2=9$

그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는

$4\times9=36$

(iv) □□△aaa△일 때

(ii)와 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 32

(v) □□□△aaa일 때

(i)과 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 44

(i)~(v)에 의하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는 $44+32+36+32+44=188$

[미적분]

23	②	**24**	①	**25**	④	**26**	③	**27**	③
28	④	**29**	79	**30**	107				

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

24. [출제의도] 삼각함수의 미분 이해하기

$$f'(x)=e^x(2\sin x+\cos x)+e^x(2\cos x-\sin x)$$

$$=e^x(\sin x+3\cos x)$$

따라서 $f'(0)=1\times3=3$

25. [출제의도] 급수의 성질 이해하기

$b_n=a_n-\dfrac{2^{n+1}}{2^n+1}$이라 하면

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+1}$$

$$=0+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{2^n}}$$

$$=0+\frac{2}{1+0}=2$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times2^{n+1}}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5\times2}{1+\frac{3}{2^n}}$

$$=\frac{2+10}{1+0}=12$$

26. [출제의도] 로그함수의 미분 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$에서 $\displaystyle\lim_{x\to e}(x-e)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to e}\{f(x)-g(x)\}=0$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=e$에서 연속이므로

$f(e)=g(e)$

$a^e=2\log_b e=\dfrac{2}{\ln b}$ ⋯ ㉠

$f'(x)=a^x\ln a$, $g'(x)=\dfrac{2}{x\ln b}$이므로

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\{f(x)-f(e)\}-\{g(x)-g(e)\}}{x-e}$$

$$=f'(e)-g'(e)$$

$$=a^e\ln a-\frac{2}{e\ln b}=0$$

㉠에 의하여 $a^e\ln a-\dfrac{a^e}{e}=0$에서 $\ln a=\dfrac{1}{e}$

$a=e^{\frac{1}{e}}$, $b=e^{\frac{2}{e}}$

따라서 $a\times b=e^{\frac{3}{e}}$

27. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

원 C와 y축과의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하면

$\angle\mathrm{ORP}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{POR}=\theta$

직각삼각형 OPR에서 $\overline{\mathrm{OP}}=2\sin\theta$

$\angle$ORQ, $\angle$OPQ는 호 OQ에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{ORQ}=\angle\mathrm{OPQ}=\dfrac{\theta}{3}$

직각삼각형 OQR에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=2\sin\dfrac{\theta}{3}$

$\angle$QOP, $\angle$QRP는 호 PQ에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{QOP}=\angle\mathrm{QRP}=\theta-\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{2}{3}\theta$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin(\angle\mathrm{QOP})$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\sin\frac{\theta}{3}\times\sin\frac{2}{3}\theta$$

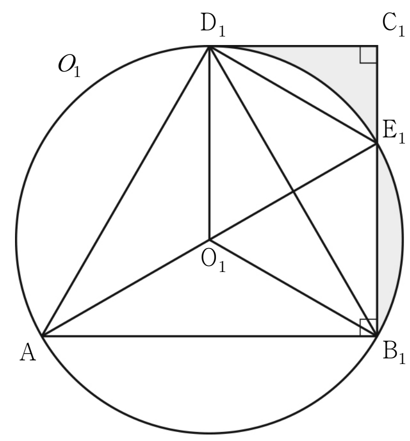
$$=2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta}{\theta^3}$$

$$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}}\times\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\frac{2}{3}\theta}\right)$$

$$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times1=\frac{4}{9}$$

28. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기



$\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}}=1$, $\angle\mathrm{D_1C_1B_1}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{B_1D_1}}=2$, $\angle\mathrm{D_1B_1A}=\dfrac{\pi}{3}$

삼각형 $\mathrm{AB_1D_1}$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

삼각형 $\mathrm{AB_1D_1}$의 외접원을 O_1이라 하면

$\angle\mathrm{E_1B_1A}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 선분 $\mathrm{AE_1}$은 원 O_1의 지름이고 원 O_1의 반지름의 길이는 $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$이다.

원 O_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$이라 하면

$\angle\mathrm{B_1AE_1}=\dfrac{\pi}{6}$에서 $\angle\mathrm{B_1O_1E_1}=\dfrac{\pi}{3}$이고

$\overline{\mathrm{O_1B_1}}=\overline{\mathrm{O_1E_1}}$이므로

삼각형 $\mathrm{O_1B_1E_1}$은 정삼각형이다.

$\overline{\mathrm{C_1E_1}}=\overline{\mathrm{B_1C_1}}-\overline{\mathrm{B_1E_1}}=\overline{\mathrm{B_1C_1}}-\overline{\mathrm{O_1B_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

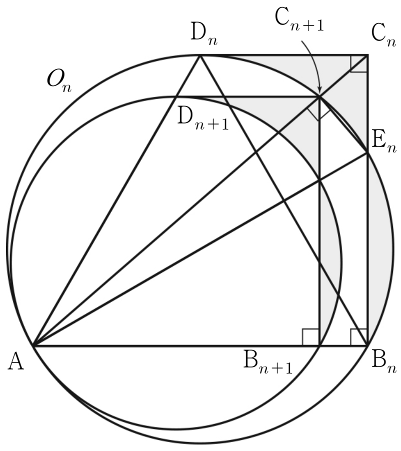
$\angle\mathrm{E_1O_1D_1}=\dfrac{\pi}{3}$이므로

두 부채꼴 $\mathrm{O_1E_1D_1}$, $\mathrm{O_1B_1E_1}$은 서로 합동이다.

S_1은 삼각형 $\mathrm{E_1C_1D_1}$의 넓이와 같으므로

$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{C_1E_1} \times \overline{C_1D_1} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



$\overline{C_nD_n} = a_n$이라 하면 $\overline{B_nC_n} = \sqrt{3}a_n$

직각삼각형 $B_nC_nD_n$에서 $\overline{B_nD_n} = 2a_n$

$\angle D_nB_nA = \frac{\pi}{3}$, $\angle B_nAD_n = \angle B_1AD_1 = \frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 AB_nD_n은 한 변의 길이가 $2a_n$인 정삼각형이다.

그러므로 $\overline{AB_n} = 2a_n$

$\overline{C_{n+1}D_{n+1}} = a_{n+1}$이라 하면

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \sqrt{3}a_{n+1}$, $\overline{AB_{n+1}} = 2a_{n+1}$

$\frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{AB_n}} = \frac{\overline{B_{n+1}C_{n+1}}}{\overline{AB_{n+1}}}$이므로

점 C_{n+1}은 직선 AC_n 위의 점이다.

그러므로 사다리꼴 $AB_nC_nD_n$과

사다리꼴 $AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 서로 닮음이다.

직각삼각형 AB_nC_n에서

$\overline{AC_n} = \sqrt{\overline{AB_n}^2 + \overline{B_nC_n}^2} = \sqrt{7}a_n$

직각삼각형 $AB_{n+1}C_{n+1}$에서 $\overline{AC_{n+1}} = \sqrt{7}a_{n+1}$이므로

$\overline{C_nC_{n+1}} = \overline{AC_n} - \overline{AC_{n+1}} = \sqrt{7}(a_n - a_{n+1})$

정삼각형 AB_nD_n의 외접원을 O_n이라 하면

$\angle E_nB_nA = \frac{\pi}{2}$이므로 선분 AE_n은 원 O_n의 지름이다.

$\overline{B_nE_n} = \overline{AB_n} \times \tan\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_n$에서

$\overline{C_nE_n} = \overline{B_nC_n} - \overline{B_nE_n} = \frac{\sqrt{3}}{3}a_n$

선분 AE_n을 지름으로 하는 반원에 대한

원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle AC_{n+1}E_n = \frac{\pi}{2}$

$\angle E_nC_{n+1}C_n = \pi - \angle AC_{n+1}E_n = \frac{\pi}{2}$

두 삼각형 C_nAB_n, $C_nE_nC_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{AC_n} : \overline{E_nC_n} = \overline{B_nC_n} : \overline{C_{n+1}C_n}$

$\sqrt{7}a_n : \frac{\sqrt{3}}{3}a_n = \sqrt{3}a_n : \sqrt{7}(a_n - a_{n+1})$

$a_n^2 = 7a_n(a_n - a_{n+1})$

$7a_{n+1} = 6a_n$

$a_{n+1} = \frac{6}{7}a_n$이므로 사다리꼴 $AB_nC_nD_n$과

사다리꼴 $AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $7:6$이고

넓이의 비는 $49:36$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{6}$이고 공비가 $\frac{36}{49}$인

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{36}{49}} = \frac{49}{78}\sqrt{3}$$

29. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기

원 C의 중심을 F라 하고 $\angle COF = \alpha$라 하자.

$\angle COF = \angle FOE$이므로

$$\begin{aligned}\cos(\angle COE) &= \cos(\alpha+\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{7}{25}\end{aligned}$$

에서 $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이므로 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

두 직선 BD, CD가 원 C와 접하는 점을

각각 G, H라 하자.

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OF} = 8 - r$, $\overline{FH} = r$이므로

직각삼각형 OHF에서 $\sin\alpha = \frac{r}{8-r} = \frac{3}{5}$, $r = 3$

$\overline{OH} = \overline{OF} \times \cos\alpha = 5 \times \frac{4}{5} = 4$

사각형 DHFG는 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로

$\overline{OD} = \overline{OH} - \overline{DH} = 4 - 3 = 1$

$\angle AOC = \beta$라 하면

$\angle OBD = \frac{\pi}{2} - \angle DOB = \angle AOC$이므로

삼각형 BOD에서 $\sin\beta = \frac{1}{8}$, $\cos\beta = \frac{3}{8}\sqrt{7}$

또한 $\sin 2\alpha = \sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$

$$\begin{aligned}\sin(\angle AOE) &= \sin(2\alpha+\beta)\\ &= \sin 2\alpha\cos\beta + \cos 2\alpha\sin\beta\\ &= \frac{24}{25} \times \frac{3}{8}\sqrt{7} + \frac{7}{25} \times \frac{1}{8}\\ &= \frac{7}{200} + \frac{9}{25}\sqrt{7}\end{aligned}$$

에서 $p = \frac{7}{200}$, $q = \frac{9}{25}$

따라서 $200 \times (p+q) = 200 \times \left(\frac{7}{200} + \frac{9}{25}\right) = 79$

30. [출제의도] 지수함수의 미분을 이용하여 추론하기

조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}f(x+2k) &= -\frac{1}{2}f(x+2(k-1))\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 f(x+2(k-2))\\ &\quad\vdots\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^k f(x)\ \ (k\text{는 자연수})\end{aligned}$$

자연수 m에 대하여

$2m-2 \le x \le 2m-1$일 때

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x-2(m-1)+2(m-1))\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times f(x-2(m-1))\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times \{2^{x-2(m-1)} - 1\}\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times \{2^{-2(m-1)} \times 2^x - 1\}\end{aligned}$$

$2m-1 < x \le 2m$일 때

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x-2(m-1)+2(m-1))\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times f(x-2(m-1))\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times \left\{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2(m-1)} - 1\right\}\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times \left\{2^{2m} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right\}\end{aligned}$$

이므로

$2m-2 < x < 2m-1$에서

$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times 2^{-2(m-1)} \times 2^x \ln 2$

$2m-1 < x < 2m$에서

$f'(x) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times 2^{2m} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2$

자연수 l에 대하여

$2l-2 < x < 2l-1$ 또는 $2l-1 < x < 2l$일 때

$$\begin{aligned}g(x) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}\\ &= 2f'(x)\end{aligned}$$

$x = 2l-1$일 때

$$\begin{aligned}g(x) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(2l-1+h)-f(2l-1-h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\left\{2^{2l} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1+h} - 1\right\}}{h} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\{2^{-2(l-1)} \times 2^{2l-1-h} - 1\}}{h}\right]\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1} \times \lim_{h\to 0+} \frac{(2^{-h+1}-1)-(2^{-h+1}-1)}{h}\\ &= 0\end{aligned}$$

$x = 2l$일 때

$$\begin{aligned}g(x) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(2l+h)-f(2l-h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}(2^{-2l} \times 2^{2l+h} - 1)}{h} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\left\{2^{2l} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2l-h} - 1\right\}}{h}\right]\\ &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{l} \times \lim_{h\to 0+} \frac{2^h - 1}{h}\\ &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{l} \ln 2\end{aligned}$$

이제 $\lim_{t\to 0+}\{g(n+t) - g(n-t)\} + 2g(n) = \frac{\ln 2}{2^{24}}$를

만족시키는 자연수 n의 값을 n이 홀수일 때와

n이 짝수일 때로 나누어 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $n = 2s-1$(s는 자연수)일 때

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0+} g(n+t)\\ &= \lim_{t\to 0+} g(2s-1+t)\\ &= \lim_{t\to 0+} 2f'(2s-1+t)\\ &= 2 \times \left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right\} \times 2^{2s} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2s-1} \ln 2\\ &= 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{s} \ln 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0+} g(n-t)\\ &= \lim_{t\to 0+} g(2s-1-t)\\ &= \lim_{t\to 0+} 2f'(2s-1-t)\\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1} \times 2^{-2(s-1)} \times 2^{2s-1} \ln 2\\ &= -8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{s} \ln 2\end{aligned}$$

그러므로

$\lim\limits_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)$

$=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2-\left\{-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2\right\}+0$

$=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2$

$16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2=\frac{\ln2}{2^{24}}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^s=\left(\frac{1}{2}\right)^{28}$

$s=28$이므로 $n=2\times28-1=55$

(ii) $n=2s$(s는 자연수)일 때

$\lim\limits_{t\to0+}g(n+t)=\lim\limits_{t\to0+}g(2s+t)$

$=\lim\limits_{t\to0+}2f'(2s+t)$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\times2^{-2s}\times2^{2s}\ln2$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2$

$\lim\limits_{t\to0+}g(n-t)=\lim\limits_{t\to0+}g(2s-t)$

$=\lim\limits_{t\to0+}2f'(2s-t)$

$=2\times\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right\}\times2^{2s}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2s}\ln2$

$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2$

그러므로

$\lim\limits_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2+6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2$

$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2$

$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln2=\frac{\ln2}{2^{24}}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^s=\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$

$s=26$이므로 $n=2\times26=52$

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n의 값의 합은

$55+52=107$

[기하]

23	③	**24**	⑤	**25**	⑤	**26**	①	**27**	④
28	④	**29**	171	**30**	24				

23. [출제의도] 벡터의 연산 계산하기

정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라 하면

$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{ME}$

따라서 $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}|=|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{ME}|=|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{2}$

24. [출제의도] 쌍곡선의 점근선 이해하기

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{a}x$이므로 $\frac{2\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$에서 $a=2$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,0)$,

$\mathrm{F}'(-c,0)\,(c>0)$이라 하면 $c=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는 $4\sqrt{3}$

25. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

점 F의 x좌표를 c라 하면

$c=\sqrt{40-15}=5$이므로 $\mathrm{F}(5,0)$

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{FQ}}$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=10$에서 $\mathrm{Q}(10,0)$

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 타원 위의

점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1}{40}x+\frac{y_1}{15}y=1$

이 직선의 x절편이 10이므로 $x_1=4$

점 $\mathrm{P}(4,y_1)$이 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$ 위의 점이므로

$\frac{4^2}{40}+\frac{{y_1}^2}{15}=1$에서 $y_1=3$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=3$

따라서 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times10\times3=15$

26. [출제의도] 쌍곡선의 정의 이해하기

점 Q가 y축 위의 점이므로

삼각형 QF′F는 이등변삼각형이다.

삼각형 PQF가 정삼각형이므로

$\angle\mathrm{F'PF}=\angle\mathrm{PFQ}=\frac{\pi}{3}$

$\angle\mathrm{FF'Q}=\angle\mathrm{QFF'}=\theta$라 하면

삼각형 PF′F의 세 내각의 합은 π이므로

$\theta+\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}=\pi$에서 $\theta=\frac{\pi}{6}$

그러므로 삼각형 PF′F는

$\angle\mathrm{FF'P}=\frac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{PFF'}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\overline{\mathrm{F'F}}=6\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=6$, $\overline{\mathrm{PF'}}=12$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=12-6=6$

27. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{QF'}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{PF}}=\frac{3}{2}k$

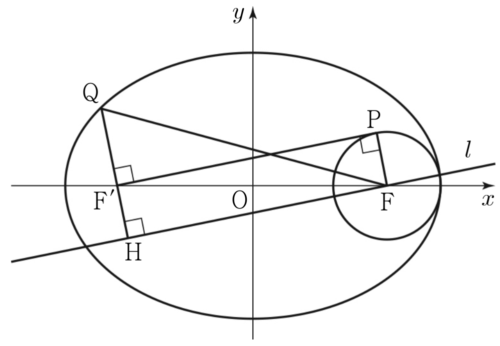
점 A의 x좌표는 $k+5$이므로

타원의 장축의 길이는 $2(k+5)$

$\overline{\mathrm{QF}}=2(k+5)-\overline{\mathrm{QF'}}=\frac{k}{2}+10$

점 F를 지나고 직선 F′P에 평행한 직선을 l,

두 직선 QF′, l의 교점을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{F'H}}=\frac{3}{2}k+k=\frac{5}{2}k$

$\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{F'P}}=\sqrt{\overline{\mathrm{F'F}}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2}=\sqrt{100-k^2}$

삼각형 QHF는 직각삼각형이므로

$\left(\frac{5}{2}k\right)^2+(100-k^2)=\left(\frac{k}{2}+10\right)^2$

$k(k-2)=0$에서 $k>0$이므로 $k=2$

따라서 타원의 장축의 길이는 $2(k+5)=2\times7=14$

28. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 추론하기

점 Q에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 R라 하고,

점 Q에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을

S라 하자.

$\overline{\mathrm{PR}}=k$라 하면

$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}}{\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\overline{\mathrm{RH}}}}=\frac{\overline{\mathrm{RH}}}{k}=3$에서 $\overline{\mathrm{RH}}=3k$

두 점 P, Q가 포물선 C 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RH}}=4k$,

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{SQ}}=\overline{\mathrm{RH}}=3k$

한편 원 O의 지름이 선분 PF이므로 삼각형 PQF는

$\angle\mathrm{FQP}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{QF}}^2}=\sqrt{16k^2-9k^2}=\sqrt{7}k$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{QH}}^2-\overline{\mathrm{RH}}^2$

$7k^2-k^2=\overline{\mathrm{QH}}^2-9k^2$에서 $\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{15}k$

따라서 $\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{\sqrt{15}k}{\sqrt{7}k}=\frac{\sqrt{105}}{7}$

29. [출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{27}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{2},k\right)$에서의

접선의 방정식은 $\frac{9}{2a^2}x-\frac{k}{27}y=1$이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{2}{9}a^2,0\right)$

두 점 R, S는 두 초점이 F, F′이고

점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{RF'}}-\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{SF'}}=\frac{4}{9}a^2$

$\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{RF}}=(\overline{\mathrm{RF'}}-\overline{\mathrm{SF'}})+\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{RF}}$

$=(\overline{\mathrm{RF'}}-\overline{\mathrm{RF}})+(\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{SF'}})$

$=\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2$

$=\frac{8}{9}a^2=8$

에서 $a^2=9$

점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{2},k\right)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ 위의 점이므로

$k^2=\dfrac{135}{4}$

따라서 $4\times(a^2+k^2)=4\times\left(9+\dfrac{135}{4}\right)=171$

30. [출제의도] 벡터의 연산을 이용하여 추론하기

점 O에서 포물선 $y^2=2x-2$에 그은 접선의 방정식을 $y=ax$라 하자.

$(ax)^2=2x-2$에서 $a^2x^2-2x+2=0$

이차방정식 $a^2x^2-2x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-2a^2=0$에서 $a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

중심이 점 O이고 반지름의 길이가 k인 원이

직선 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$와 제1사분면에서 만나는 점을 B,

직선 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$와 제4사분면에서 만나는 점을 C라 하자.

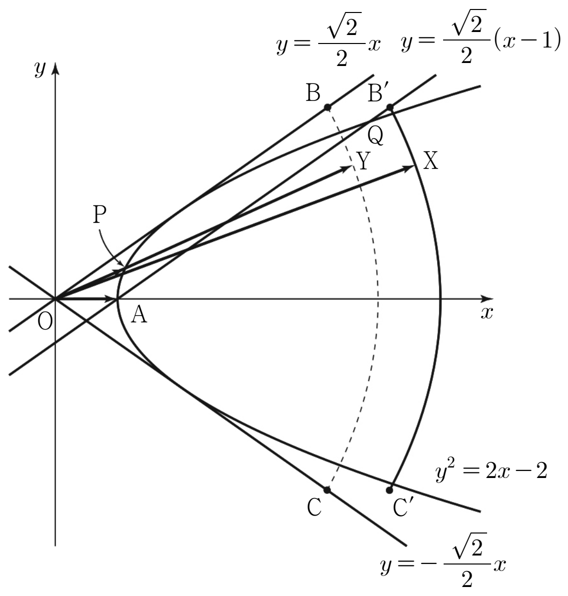
$\overrightarrow{OY}=\dfrac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$를 만족시키는 점 Y에 대하여

$|\overrightarrow{OY}|=\left|\dfrac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}\right|=\dfrac{|k|}{|\overrightarrow{OP}|}\times|\overrightarrow{OP}|=k$

이므로 점 Y가 나타내는 도형은 부채꼴 OCB의 호 CB이다.

또한 $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}$에서 점 X는 점 Y를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점이므로

두 점 B, C를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 각각 B′, C′이라 하면 도형 C는 부채꼴 AC′B′의 호 C′B′이다.



점 A$(1, 0)$을 지나고 직선 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$와 평행한 직선이 포물선 $y^2=2x-2$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 Q라 하면 도형 C가 포물선 $y^2=2x-2$와 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는

$k=\overline{AB'}\geq\overline{AQ}$를 만족시켜야 하므로

구하는 실수 k의 최솟값은 $\overline{AQ}$이다.

직선 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$와 평행하고 점 A$(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$이므로

$\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\right\}^2=2x-2$에서 $x^2-6x+5=0$,

$x=1$ 또는 $x=5$

점 Q는 점 A가 아니므로 Q$(5, 2\sqrt{2})$

$\overline{AQ}=\sqrt{(5-1)^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$

따라서 $m=2\sqrt{6}$이며 $m^2=24$