< 정답 및 해설 >

<정답>

문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
정답	②	③	③	④	②	③	②	②	①	①	③	①	①
문항	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
정답	③	④	④	①	②	③	④	③	①	②	④	④	

<해설>

1. $-1 \le \cos\dfrac{1}{x} \le 1$이므로 $-(x^4+2x^2) \le (x^4+2x^2)\cos\dfrac{1}{x} \le x^4+2x^2$

$-\lim\limits_{x\to 0}(x^4+2x^2) = \lim\limits_{x\to 0}(x^4+2x^2) = 0$ 이므로 조임정리에 의해 $\lim\limits_{x\to 0}(x^4+2x^2)\cos\dfrac{1}{x} = 0$

2. $f(x) = \displaystyle\int_0^{2x}\cos^3 t\,dt$ 에서 미적분학의 기본정리에 의해

$f'(x) = \cos^3 2x\dfrac{d}{dx}(2x) = 2\cos^3 2x$ 이므로 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{4}$

3. $u = 1+x^2$ 이라 하면 $du = 2x\,dx$

$\displaystyle\int_0^a \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = 1$ 에서 $\displaystyle\int_1^{1+a^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = 1$

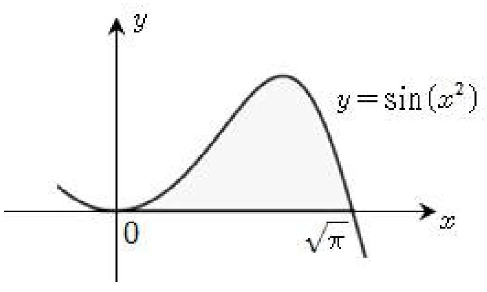
$\left[\sqrt{u}\right]_1^{1+a^2} = \sqrt{1+a^2} - 1 = 1$

$a = \pm\sqrt{3}$, a는 양수이므로 $a = \sqrt{3}$

4. 원통껍질 방법을 이용하면

$V = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2\pi x\sin(x^2)\,dx$

$= \left[-\pi\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 2\pi$



5. $2\sin\theta = 1$ 에서 $\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ 이므로 공통부분의 넓이는

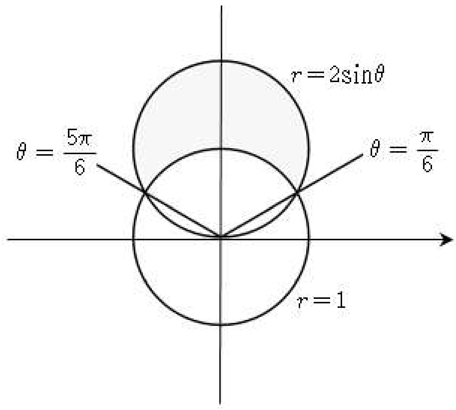
$$2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2}[(2\sin\theta)^2 - 1^2]\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2}(4\sin^2\theta - 1)d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(4\,\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 1\right)d\theta$$

$$= [\,\theta - \sin 2\theta\,]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$



6. 세 점 $\mathrm{P}(1,0,1), \mathrm{Q}(-2,1,-1), \mathrm{R}(4,-2,5)$ 에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \langle -2, 1, -1\rangle - \langle 1, 0, 1\rangle = \langle -3, 1, -2\rangle$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \langle 4, -2, 5\rangle - \langle 1, 0, 1\rangle = \langle 3, -2, 4\rangle$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \langle -3, 1, -2\rangle \times \langle 3, -2, 4\rangle = \langle 0, 6, 3\rangle$ 이므로

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ 로 만들어지는 평행사변형의 넓이는

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}| = |\langle 0, 6, 3\rangle| = 3\sqrt{5}$

7. $\mathrm{r}'(t) = \langle \tan t, -\sin t, \cos t\rangle$ 에서

$|\mathrm{r}'(t)| = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \sqrt{\sec^2 t} = |\sec t|$ 이므로

곡선의 길이는

$$\int_0^{\pi/3}|\mathrm{r}'(t)|dt = \int_0^{\pi/3}|\sec t|dt = \int_0^{\pi/3}\sec t\,dt = [\ln|\sec t + \tan t|\,]_0^{\pi/3} = \ln(2+\sqrt{3})$$

8. $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ 일 때 $y' = -x,\ y'' = -1$ 이므로

곡률은 $\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$

$\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ 에서 곡률은 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

9. $\mathrm{r}'(t)=\langle -\sin t, 1, \cos t\rangle$, $|\mathrm{r}'(t)|=\sqrt{2}$

단위접선벡터는 $\mathrm{T}(t)=\dfrac{\mathrm{r}'(t)}{|\mathrm{r}'(t)|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin t, 1, \cos t\rangle$

$\mathrm{T}'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle -\cos t, 0, -\sin t\rangle$, $|\mathrm{T}'(t)|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{N}(t)=\dfrac{\mathrm{T}'(t)}{|\mathrm{T}'(t)|}=\langle -\cos t, 0, -\sin t\rangle$

따라서 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$에서 단위법선벡터는 $\mathrm{N}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\langle 0, 0, -1\rangle$

10. $g_x(x,y)=\dfrac{2x+f_x(x,y)}{2\sqrt{x^2+2y^2+f(x,y)}}$, $g_y(x,y)=\dfrac{4y+f_y(x,y)}{2\sqrt{x^2+2y^2+f(x,y)}}$

$g_x(1,1)=\dfrac{2+f_x(1,1)}{2\sqrt{1+2+f(1,1)}}=\dfrac{8}{4}=2$, $g_y(1,1)=\dfrac{4+f_y(1,1)}{2\sqrt{1+2+f(1,1)}}=\dfrac{12}{4}=3$

따라서 $g_x(1,1)+g_y(1,1)=5$

11. $\nabla f(x,y)=\left\langle \sqrt{y}, \dfrac{x}{2\sqrt{y}}\right\rangle$, $\nabla f(-4,1)=\langle 1, -2\rangle$

v 방향의 단위벡터는 $\mathrm{u}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, -2\rangle$이므로

v 방향의 f의 방향도함수는

$D_{\mathrm{u}}f(-4,1)=\nabla f(-4,1)\cdot \mathrm{u}=<1, -2>\cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, -2\rangle=\sqrt{5}$

12. 극좌표를 이용하면

$$\iint_D \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)dA=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 \theta r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\,d\theta\int_1^2 r\,dr=\left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_1^2=\frac{\pi^2}{12}$$

13. $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$

14. $(x^2+4)dy=dx$는 $dy=\dfrac{dx}{x^2+4}$로 변수분리하여 $y=\dfrac{1}{2}tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)+C$

$y(0)=\dfrac{\pi}{8}$ 이므로 $C=\dfrac{\pi}{8}$, $y=\dfrac{1}{2}tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{\pi}{8}$

따라서 $y(2)=\dfrac{1}{2}tan^{-1}1+\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$

15. $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^3e^x$, $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=x^2e^x$

적분인자는 $e^{-\int \frac{2}{x}dx}=\dfrac{1}{x^2}$ 이므로 $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x^3}y=e^x$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2}y\right)=e^x$

$\dfrac{1}{x^2}y=e^x+C$, $y=e^xx^2+Cx^2$

$y(1)=2e-e^2$ 에서 $C=e-e^2$ 이므로

$y(x)=e^xx^2+(e-e^2)x^2$, $y(2)=4e^2+4(e-e^2)=4e$

16. $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{x^2}+2\cos 2x\right)=-\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x}-2\sin 2y\right)=-\dfrac{1}{x^2}$ 이므로

$\left(-\dfrac{y}{x^2}+2\cos 2x\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}-2\sin 2y\right)dy=0$은 완전미분방정식이다.

$u(x,y)=\displaystyle\int\left(-\dfrac{y}{x^2}+2\cos 2x\right)dx=\dfrac{y}{x}+\sin 2x+g(y)$

$\dfrac{\partial}{\partial y}u(x,y)=\dfrac{1}{x}+g'(y)=\dfrac{1}{x}-2\sin 2y$, $g'(y)=-2\sin 2y$, $g(y)=\cos 2y+k$

따라서 일반해는 $\dfrac{y}{x}+\sin 2x+\cos 2y=C$

17. $\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{y^2}$ 에서 $y^2\dfrac{dy}{dx}+y^3=1$ 이므로

$u=y^3$ 이라 놓으면 $\dfrac{du}{dx}=3y^2\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{du}{dx}+3u=3$

$e^{3x}\dfrac{du}{dx}+3e^{3x}u=3e^{3x}$, $\dfrac{d}{dx}(e^{3x}u)=3e^{3x}$, $e^{3x}u=e^{3x}+C$

$u=Ce^{-3x}+1$, $y^3=Ce^{-3x}+1$

$y(0)=2$ 에서 $C=7$, $y^3=7e^{-3x}+1$

18. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 에서 $p(x)=\dfrac{2}{x}$ 라 하면 y_1과 일차독립인 해 y_2는

$y_2=y_1\displaystyle\int\dfrac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}dx=\dfrac{\cos x}{x}\int\dfrac{x^2}{\cos^2 x}\,x^{-2}dx$

$=\dfrac{\cos x}{x}\displaystyle\int\sec^2 x\,dx=\dfrac{\cos x}{x}\tan x=\dfrac{\sin x}{x}$

또한 $W\left(\dfrac{\cos x}{x},\dfrac{\sin x}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}\neq 0$ 이므로 y_2는 y_1과 일차독립인 해이다.

19. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ 이 2계 상수계수 미분방정식 $y'' + ay' + by = 0$ 의 해이므로

$y = e^{\lambda x}$ 라 할 때, 특성방정식은 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 이고 해가 $\lambda = -1$ (중근)이므로

$a = 2,\ b = 1$. 따라서 $a + b = 3$

20. $y'' + 4y = 0$ 에서 $y = e^{\lambda x}$ 라 할 때, 특성방정식은 $\lambda^2 + 4 = 0$ 이고 $\lambda = \pm 2i$ 이므로

$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y_p = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$ 라 하면

$y_p{}' = A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x$

$y_p{}'' = -4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 4B\cos 2x - 4Bx\sin 2x$

$y_p{}'' + 4y_p = 16\cos 2x$ 에서

$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 16\cos 2x$ 이므로 $A = 0, B = 4$

따라서 특수해는 $y_p = 4x\sin 2x$

21. $y = x^m$ 이라 할 때, 특성방정식은 $m^2 - 4m + 4 = 0$, $m = 2$ (중근)이므로

일반해는 $y = x^2(a + b\ln x)$

$y(1) = 1$ 이므로 $a = 1,\ y'(1) = 1$ 이므로 $b = -1$

따라서 $a + b + m = 2$

22. $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ 라 하면 주어진 미분방정식의 라플라스변환은

$$\{s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\} - 2\{sY(s) - y(0)\} + Y(s) = \left.\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s}\right)\right|_{s \to s-1}$$

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{2}{s-1}, \quad Y(s) = \frac{2}{(s-1)^5} + \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(\frac{t^4}{12} + t^2\right)e^t$$

23. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ t - \pi, & t \ge \pi \end{cases} = (t-\pi)u(t-\pi)$ 이고

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ 라 하면 주어진 미분방정식의 라플라스변환은

$$\{s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + Y(s) = \mathcal{L}\{(t-\pi)u(t-\pi)\}$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+1)} = \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)e^{-\pi s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = [(t-\pi) - \sin(t-\pi)]u(t-\pi)$$

$y(3\pi) = 2\pi$

24. $F(s)=\ln(s^2+9)-2\ln s$ 에서 $F'(s)=\dfrac{2s}{s^2+9}-\dfrac{2}{s}$

$tf(t) = -\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -(2\cos 3t-2)$

$f(t) = \dfrac{2-2\cos 3t}{t}$ 이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{\pi}$

25. 주어진 적분방정식은 $y(t) - y(t) * \sin 2t = \sin 2t$이므로

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$라 하면

$Y(s) - Y(s)\dfrac{2}{s^2+4} = \dfrac{2}{s^2+4}$, $\dfrac{s^2+2}{s^2+4}Y(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$

$Y(s) = \dfrac{2}{s^2+2} = \sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{s^2+2}$ 에서 $y(t) = \sqrt{2}\, sin\sqrt{2}\, t$