2021학년도 11월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	②	**2**	①	**3**	③	**4**	①	**5**	⑤
6	④	**7**	①	**8**	⑤	**9**	②	**10**	③
11	④	**12**	③	**13**	①	**14**	③	**15**	④
16	③	**17**	④	**18**	⑤	**19**	⑤	**20**	②
21	⑤	**22**	5	**23**	3	**24**	7	**25**	19
26	18	**27**	4	**28**	6	**29**	164	**30**	74

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(x^2-2xy+y^2)+(3xy-y^2)=x^2+xy$

2. [출제의도] 항등식 이해하기

등식 $x^2+(a+1)x+4=x^2+3x+b$가 x에 대한 항등식이므로 양변에서 동류항의 계수를 비교하면

$a+1=3,\ 4=b$이므로 $a+b=2+4=6$

3. [출제의도] 함수 이해하기

$f(3)+f^{-1}(3)=1+7=8$

4. [출제의도] 직선의 방정식 이해하기

점 $(3,9)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2(x-3)+9=2x+3$이므로 y절편은 3

5. [출제의도] 대칭이동 이해하기

직선 $3x-2y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 $-3x+2y+a=0$이 점 $(3,2)$를 지나므로

$-9+4+a=0,\ a=5$

6. [출제의도] 복소수 계산하기

$z=2+\sqrt{2}i$에서

$z-2=\sqrt{2}i$

$(z-2)^2=(\sqrt{2}i)^2$

$z^2-4z+4=-2$

$z^2-4z=-6$

7. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$f(x)=(x-1)Q(x)+R$

나머지정리에 의하여 $4\times\{f(1)-2\}=16$이므로

$f(1)=6=R$

8. [출제의도] 원의 접선의 방정식 이해하기

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,1)$에서의 접선 $3x+y=10$이 점 $(1,a)$를 지나므로

$3+a=10,\ a=7$

9. [출제의도] 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-4$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{a^2+8}{-4}=-6$$

$a^2=16$에서 a가 양수이므로 $a=4$

10. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 이해하기

$x^2+x=mx-4$에서 $x^2+(1-m)x+4=0$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 접하려면 이차방정식 $x^2+(1-m)x+4=0$의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$D=(1-m)^2-16=(m-5)(m+3)=0$

에서 $m=5$ 또는 $m=-3$

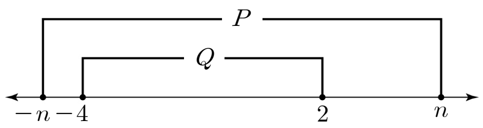
m은 양수이므로 $m=5$

11. [출제의도] 명제의 조건을 이용하여 추론하기

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x\mid -n\le x\le n\},\ Q=\{x\mid -4\le x\le 2\}$

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$



$-n\le -4,\ n\ge 2$이므로 $n\ge 4$

자연수 n의 최솟값은 4

12. [출제의도] 연립이차방정식 계산하기

$$\begin{cases}3x-2y=7 & \cdots ㉠\\ 6x^2-xy-2y^2=0 & \cdots ㉡\end{cases}$$

㉡에서 $(2x+y)(3x-2y)=0$이고 $3x-2y=7$이므로

$2x+y=0,\ y=-2x\ \cdots ㉢$

㉠, ㉢에서 $x=1,\ y=-2$

$\alpha-\beta=1-(-2)=3$

13. [출제의도] 평행이동 이해하기

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$은 중심의 좌표가 (a,b)이고 반지름의 길이가 b이므로

원 C는 중심의 좌표가 $(a+3,b-8)$이고 반지름의 길이가 b이다.

원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로

$a+3=|b-8|=b$

$b-8\ne b$이므로 $-b+8=b,\ b=4$이고

$a+3=4,\ a=1$이므로 $a+b=5$

14. [출제의도] 절대부등식 이해하기

$\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b$라 하면

직각삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이므로

$\frac{1}{2}ab=16,\ ab=32$

선분 AB가 직각삼각형 ABC의 빗변이므로

$\overline{AB}^2=a^2+b^2$

$a^2>0,\ b^2>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a^2+b^2}{2}\ge\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립)

$a^2+b^2\ge 64$이므로 $\overline{AB}^2$의 최솟값은 64

15. [출제의도] 연립부등식을 이용하여 추론하기

$$\begin{cases}x^2-2x-3\ge 0 & \cdots ㉠\\ x^2-(5+k)x+5k\le 0 & \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $(x-3)(x+1)\ge 0$

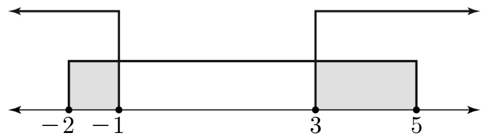
$x\le -1$ 또는 $x\ge 3$

㉡에서 $(x-5)(x-k)\le 0$

$k<5$일 때 $k\le x\le 5$,

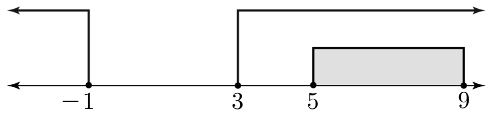
$k\ge 5$일 때 $5\le x\le k$

(i) $k<5$일 때



정수 x의 개수가 5가 되도록 하는 k의 값은 -2

(ii) $k\ge 5$일 때



정수 x의 개수가 5가 되도록 하는 k의 값은 9

(i), (ii)에 의하여 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 곱은 $(-2)\times 9=-18$

16. [출제의도] 인수분해를 활용하여 문제해결하기

$14=X$라 하면

$(14^2+2\times 14)^2-18\times(14^2+2\times 14)+45$

$=(X^2+2X)^2-18(X^2+2X)+45$

$=(X^2+2X-3)(X^2+2X-15)$

$=(X-1)(X+3)(X-3)(X+5)$

$X=14$를 대입하면

$(14-1)\times(14+3)\times(14-3)\times(14+5)$

$=13\times 17\times 11\times 19$

$a+b+c+d=60$

17. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기

두 점 $\mathrm{A}(0,\sqrt{3})$, $\mathrm{B}(1,0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{0-\sqrt{3}}{1-0}x+\sqrt{3},\ \sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$

이다. 원 C의 중심 $(1,10)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|\sqrt{3}+10-\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}=5$

이고 원 C의 반지름의 길이는 3이므로

원 C 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리를 h라 하면 $2\le h\le 8$이다.

선분 AB의 길이는 $\sqrt{1+3}=2$이고

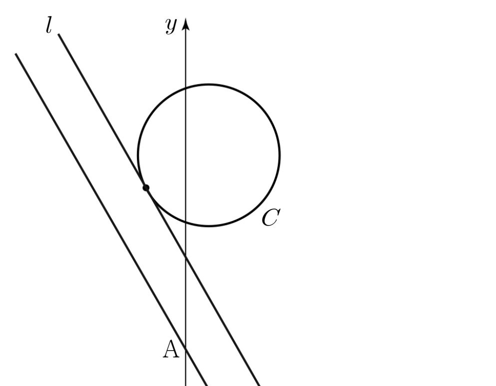
삼각형 ABP의 넓이를 S라 할 때

$S=\frac{1}{2}\times 2\times h=h$이므로

S가 자연수이려면 h가 자연수이어야 한다.

직선 AB와 평행한 직선 중에서 원 C의 중심으로부터의 거리가 $|5-h|$이고 직선 AB와의 거리가 h인 직선을 l이라 하자.

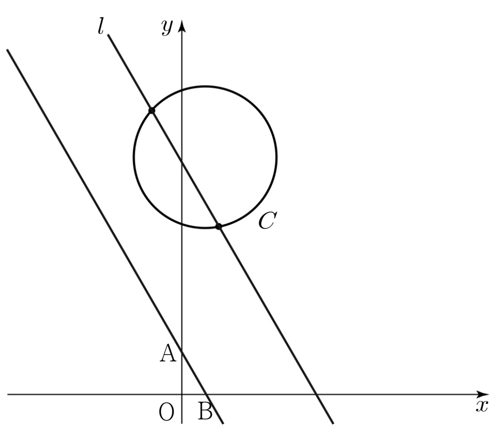
(i) $h=2$일 때



직선 l과 원 C는 한 점에서 만나므로

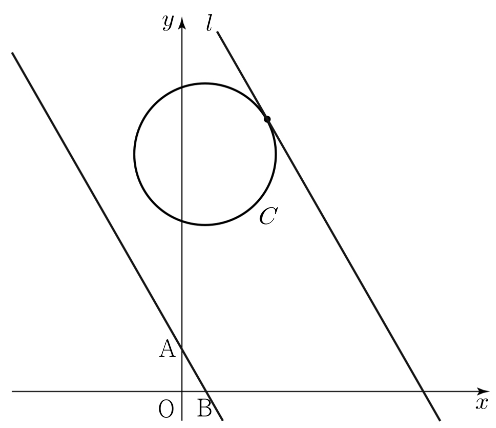
점 P의 개수는 1

(ii) $3 \le h \le 7$일 때



직선 l과 원 C는 서로 다른 두 점에서 만나므로
점 P의 개수는 $5\times2=10$

(iii) $h=8$일 때



직선 l과 원 C는 한 점에서 만나므로
점 P의 개수는 1

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 점 P의 개수는
$1+10+1=12$

18. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기

ㄱ. $z_1\overline{z_1}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=10$ (참)

ㄴ. $a^2+b^2=10$에서
$a=1$이면 $b=3$이다.
$a=2$이면 $b^2=6$인 자연수 b는 존재하지 않는다.
$a=3$이면 $b=1$이다.
$a\ge4$이면 $a^2\ge16$이므로 자연수 b는 존재하지 않는다.
$z_1+\overline{z_2}=(a+bi)+(c-di)=(a+c)+(b-d)i=3$
이므로 $a+c=3$, $b-d=0$
$a+c=3$에서 $a<3$
$a=1$, $c=2$, $b=d=3$이 되어 $c+d=5$ (참)

ㄷ. $(z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)$
$=\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}$
$=(a+c)^2+(b+d)^2=41$
$a+c=2$이면 $(b+d)^2=37$인
자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.
$a+c=3$이면 $(b+d)^2=32$인
자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.
$a+c=4$이면 $b+d=5$이다.
$a+c=5$이면 $b+d=4$이다.
$a+c=6$이면 $(b+d)^2=5$인
자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.
$a+c\ge7$이면 $(a+c)^2\ge49$이므로
자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.
(i) $a+c=4$일 때
$a=1$이면 $c=3$이고 $b=3$에서 $d=2$이다.
$a=3$이면 $c=1$이고 $b=1$에서 $d=4$이다.
(ii) $a+c=5$일 때
$a=1$이면 $c=4$이고 $b=3$에서 $d=1$이다.
$a=3$이면 $c=2$이고 $b=1$에서 $d=3$이다.
(i), (ii)에 의하여 $z_2\overline{z_2}=c^2+d^2$의 값은
13 또는 17이므로 $z_2\overline{z_2}$의 최댓값은 17 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점을 이용하여 추론하기

두 선분 AB, BC의 길이가 모두 3이므로

$\overline{AP}=\overline{BQ}=\dfrac{3(1-k)}{(1-k)+k}=\boxed{\ 3-3k\ }$

$\overline{AP'}:\overline{P'B}=\overline{AP'}:(\overline{AP'}+3)=k:(k+1)$

$\overline{AP'}=\overline{BQ'}=3k$

이다. 두 점 P, P$'$에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, H$'$이라 하면
두 삼각형 PBH와 P$'$BH$'$에서

$\overline{PH}:\overline{P'H'}=\overline{PB}:\overline{P'B}$
$=(3-\overline{AP}):(\overline{AP'}+3)$
$=\left\{3-\left(\boxed{\ 3-3k\ }\right)\right\}:\left(\boxed{\ 3k+3\ }\right)$

이므로

$S_1:S_2=\left(\dfrac12\times\overline{BQ}\times\overline{PH}\right):\left(\dfrac12\times\overline{BQ'}\times\overline{P'H'}\right)$
$=(\overline{BQ}\times\overline{PB}):(\overline{BQ'}\times\overline{P'B})$
$=(3-3k)\times3k:3k(3+3k)$
$=(1-k):(1+k)=1:4$

이다. 따라서 $k=\boxed{\dfrac35}$이다.

$f(k)=3-3k$, $g(k)=3k+3$, $p=\dfrac35$이므로

$f(p)\times g(p)=\dfrac65\times\dfrac{24}{5}=\dfrac{144}{25}$

20. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 추론하기

$A-X\subset A$, $B-X\subset B$이고
조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로
$A-X=B-X\subset A\cap B=\{3, 4, 5\}$
$A-X\subset\{3, 4, 5\}$에서 $\{1, 2\}\subset X$이고
$B-X\subset\{3, 4, 5\}$에서 $\{6, 7\}\subset X$이므로
$\{1, 2, 6, 7\}\subset X$ ⋯ ㉠
조건 (다)에서
$(X-A)\cap(X-B)$
$=(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)$
$=X\cap(A^C\cap B^C)$
$=X\cap(A\cup B)^C$
$=X\cap\{8, 9, 10\}\ne\varnothing$ ⋯ ㉡
조건 (가)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여
$n(X\cap\{3, 4, 5, 8, 9, 10\})=2$ ⋯ ㉢
㉡에 의하여 세 원소 8, 9, 10 중 적어도 하나의 원소는 집합 X에 속해야 한다.
집합 X의 모든 원소의 합이 최소이려면 $8\in X$이고
㉢에 의하여 다섯 원소 3, 4, 5, 9, 10 중 가장 작은 원소는 집합 X에 속해야 하므로 $3\in X$
따라서 $X=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$일 때 모든 원소의 합이 최소이고 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은
$1+2+3+6+7+8=27$

21. [출제의도] 원의 방정식을 활용하여 문제해결하기

세 원
$(x+2)^2+(y+1)^2=1$,
$(x-a-1)^2+(y-a)^2=a^2$,
$(x-b-1)^2+(y-b)^2=b^2$
을 차례로 O_1, O_2, O_3이라 하자.
집합 A, B, C는 좌표평면에서
직선 $y=\dfrac43x$가 세 원 O_1, O_2, O_3과 각각 만나는 점의 집합이다.

원 O_1의 중심 $(-2, -1)$과 직선 $y=\dfrac43x$ 사이의 거리가 $\dfrac{|-8+3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$이고 원 O_1의 반지름의 길이가 1이므로 원 O_1과 직선 $y=\dfrac43x$는 한 점에서 만난다.
그러므로 $n(A)=1$
세 원 O_1, O_2, O_3은 모두 x축에 접하고
원 O_1의 중심은 제3사분면, 두 원 O_2, O_3의 중심은 제1사분면 위에 있으므로 원 O_1은 두 원 O_2, O_3과 만나지 않는다.
그러므로 $A\cap(B\cup C)=\varnothing$
$n(A)=1$, $A\cap(B\cup C)=\varnothing$이므로
$n(A\cup B\cup C)=3$이려면 $n(B\cup C)=2$ ⋯ ㉠
두 원 O_2, O_3의 중심 $(a+1, a)$, $(b+1, b)$는 모두 직선 $y=x-1$ 위의 점이다.
직선 $y=x-1$ 위의 점 $(k+1, k)$ $(k\ge1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원에 대하여
원의 중심 $(k+1, k)$와 직선 $y=\dfrac43x$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4k+4-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{k+4}{5}$

이므로 점 $(k+1, k)$ $(k\ge1)$을 중심으로 하고
반지름의 길이가 k인 원과 직선 $y=\dfrac43x$는

$k=1$이면 $k=\dfrac{k+4}{5}$이므로 서로 접하고

$k>1$이면 $k>\dfrac{k+4}{5}$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

$1\le a<b$에서
$a\ge1$이므로 $n(B)\ge1$
$b>1$이므로 $n(C)=2$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $B\subset C$이고
$a\ne b$이면 $B\ne C$이므로 $n(B)<n(C)=2$
$1\le n(B)<2$에서 $n(B)=1$이므로
원 O_2와 직선 $y=\dfrac43x$는 서로 접하고 $a=1$이다.

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$에 $y=\dfrac43x$를 대입하면

$(x-2)^2+\left(\dfrac43x-1\right)^2=1$

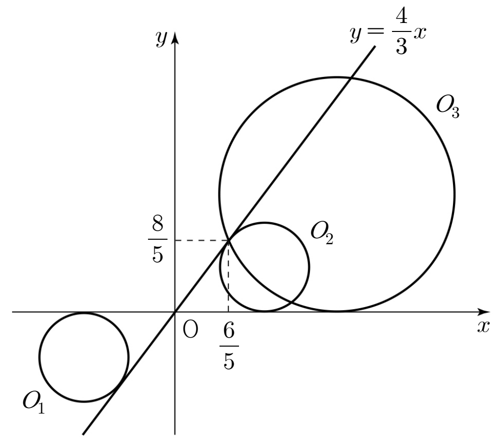
$\dfrac{25}{9}x^2-\dfrac{20}{3}x+4=\left(\dfrac53x-2\right)^2=0$

$x=\dfrac65$, $y=\dfrac85$이므로 $B=\left\{\left(\dfrac65, \dfrac85\right)\right\}$

$B\subset C$이므로 $\left(\dfrac65, \dfrac85\right)\in C$

점 $\left(\dfrac65, \dfrac85\right)$이 원 O_3 위의 점이어야 하므로

세 원 O_1, O_2, O_3과 직선 $y=\frac{4}{3}x$는 그림과 같다.



$(x-b-1)^2+(y-b)^2=b^2$에

$x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{8}{5}$을 대입하면

$\left(\frac{6}{5}-b-1\right)^2+\left(\frac{8}{5}-b\right)^2=b^2$

$b^2-\frac{18}{5}b+\frac{13}{5}=(b-1)\left(b-\frac{13}{5}\right)=0$

$b>a=1$이므로 $b=\frac{13}{5}$

$a+b=1+\frac{13}{5}=\frac{18}{5}$

22. [출제의도] 집합의 포함 관계 이해하기

$5\in A$, $A\subset B$이므로

$5\in B$, $a=5$

23. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기

$(x+a)^3+x(x-4)$

$=(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)+(x^2-4x)$

$=x^3+(3a+1)x^2+(3a^2-4)x+a^3$

에서 x^2의 계수는 $3a+1$

$3a+1=10$에서 $a=3$

24. [출제의도] 선분의 내분점 이해하기

삼각형 ABC의 무게중심 $\left(\frac{2+4+8}{3}, \frac{6+1+a}{3}\right)$가

직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\frac{14}{3}=\frac{a+7}{3}$, $a=7$

25. [출제의도] 두 점 사이의 거리를 활용하여 문제해결하기

마름모 OABC에서 $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로

$\sqrt{a^2+7^2}=\sqrt{5^2+5^2}$

$a^2=1$에서 $a=1$ $(a>0)$

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

선분 AC의 중점은 선분 OB의 중점과 같다.

$\frac{1+5}{2}=\frac{0+b}{2}$, $\frac{7+5}{2}=\frac{0+c}{2}$에서

$b=6$, $c=12$이므로 $a+b+c=1+6+12=19$

26. [출제의도] 이차함수의 최대와 최소를 활용하여 문제해결하기

이차함수 $f(x)=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$에서

(i) $0<a<2$일 때

$f(x)$의 최솟값은 $f(a)=a^2$

$0<a^2<4$이므로 $f(x)$의 최솟값이 10이 되도록 하는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a\geq 2$일 때

$f(x)$의 최솟값은 $f(2)=2a^2-4a+4$

$2a^2-4a+4=10$

$a^2-2a-3=(a-3)(a+1)=0$에서 $a=3$

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=2a^2=18$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$의 최댓값은 18

27. [출제의도] 항등함수를 활용하여 문제해결하기

함수 $g\circ f$가 항등함수이므로

$(g\circ f)(2)=2$에서

$g(f(2))=g(-a)=2$, $a^2-2a+b=2$ ⋯ ㉠

$(g\circ f)(3)=3$에서

$g(f(3))=g(0)=3$, $b=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2-2a+1=(a-1)^2=0$, $a=1$이므로

$a+b=4$

28. [출제의도] 합성함수를 활용하여 문제해결하기

$(f\circ f)(a)=f(a)$에서

$f(a)=t$로 치환하면 $f(t)=t$

$t<2$일 때 $2t+2=t$에서 $t=-2$이고,

$t\geq 2$일 때 $t^2-7t+16=t$에서 $t=4$이다.

(i) $t=-2$인 경우

$f(a)=-2$에서

$a<2$일 때

$2a+2=-2$, $a=-2$

$a\geq 2$일 때

$a^2-7a+16=-2$, $a^2-7a+18=0$

의 판별식 D가

$D=(-7)^2-4\times 1\times 18=-23<0$

이므로 $a\geq 2$일 때, $f(a)=-2$를 만족시키는 실수 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $t=4$인 경우

$f(a)=4$에서

$a<2$일 때

$2a+2=4$, $a=1$

$a\geq 2$일 때

$a^2-7a+16=4$, $a^2-7a+12=(a-3)(a-4)=0$

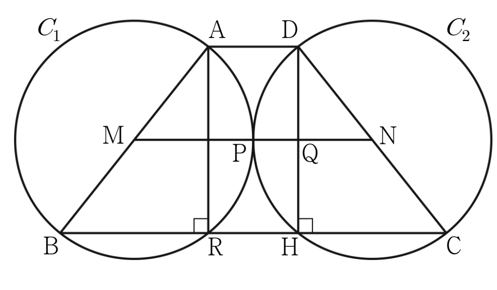
$a=3$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에 의하여 $(f\circ f)(a)=f(a)$를

만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+1+3+4=6$

29. [출제의도] 삼차방정식을 활용하여 문제해결하기



선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1이라 하고

선분 CD를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자.

두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면

두 점 M, N은 각각 두 원 C_1, C_2의 중심이다.

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 서로 같고 원 C_1과 원 C_2는 오직 한 점에서 만나므로 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점은 선분 MN의 중점이다.

선분 MN의 중점을 P, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 DH와 선분 MN이 만나는 점을 Q라 하자.

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{QN}=\overline{PN}-\overline{PQ}=r-2$에서

$\overline{HC}=2\times\overline{QN}=2r-4$이므로

$\overline{DH}^2=\overline{CD}^2-\overline{HC}^2=16r-16$ ⋯ ㉠

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{BR}=\overline{HC}=2r-4$, $\overline{RH}=4$이므로

$\overline{BC}=\overline{BR}+\overline{RH}+\overline{HC}=4r-4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$S^2=\left\{\frac{1}{2}\times(\overline{BC}+\overline{AD})\times\overline{DH}\right\}^2$

$=\frac{1}{4}\times(\overline{BC}+\overline{AD})^2\times\overline{DH}^2$

$=\frac{1}{4}\times\{(4r-4)+4\}^2\times(16r-16)$

$=64r^2(r-1)$

$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$

$=2r+(4r-4)+2r+4=8r$

$S^2+8l=6720$에서

$64r^2(r-1)+64r=6720$

$r^3-r^2+r-105=(r-5)(r^2+4r+21)=0$

$r=5$ 또는 $r^2+4r+21=0$

이차방정식 $x^2+4x+21=0$의 판별식 D가

$D=4^2-4\times 1\times 21=-68<0$이므로

$r^2+4r+21=0$을 만족시키는 실수 r의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $r=5$이고

$\overline{BD}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2=100+64=164$

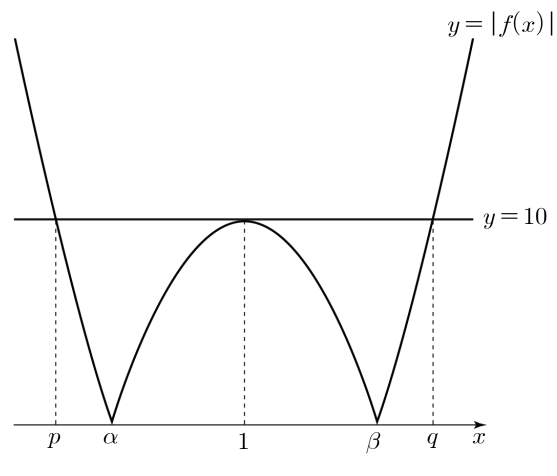
30. [출제의도] 이차함수의 최대와 최소를 이용하여 추론하기

방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (x<\alpha \text{ 또는 } x>\beta) \\ -f(x) & (\alpha\leq x\leq\beta) \end{cases}$

이고 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=10$이 만나는 서로 다른 세 점 중 x좌표가 1이 아닌 두 점의 x좌표를 각각 p, q $(p<q)$라 하면

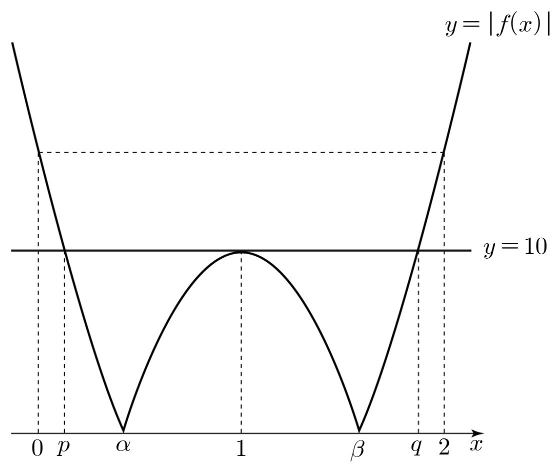
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



1은 방정식 $f(k-1)=f(k+1)$의 한 실근이고

$q-p<2$이면 $(k+1)-(k-1)>q-p$이므로

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$k<1$이면 $g(k)=f(k-1)>10$,

$k\geq 1$이면 $g(k)=f(k+1)>10$이므로

$g(k)=10$을 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

따라서 $q-p\geq 2$

$k+1=q$이면 $k-1=q-2\geq p$이고

$g(k)=|f(k+1)|=f(k+1)=f(q)=10$이다.

$k+1>q$이면 $g(k)=|f(k+1)|=f(k+1)>10$

이므로 $g(k)=10$을 만족시키는 실수 k의 최댓값은

$q-1$이다.

조건에서 $q-1=\sqrt{10}$, $q=\sqrt{10}+1$이므로

$f(q)=f(\sqrt{10}+1)=10$이고

$f(\sqrt{10}+1)=a(\sqrt{10}+1-1)^2-10=10a-10=10$

에서 $a=2$

그러므로 $f(x)=2(x-1)^2-10=2x^2-4x-8$이다.

방정식 $f(x)=0$의 실근은

$\alpha=1-\sqrt{5}$, $\beta=1+\sqrt{5}$이다.

함수 $|f(x)|$에서 두 실수 x_1, $x_2(x_1<x_2)$에 대하여

$x_1<x_2<1-\sqrt{5}$이면 $|f(x_1)|>|f(x_2)|$ $\cdots$ ㉠

$1-\sqrt{5}\leq x_1<x_2<1$이면 $|f(x_1)|<|f(x_2)|$ $\cdots$ ㉡

$1\leq x_1<x_2<1+\sqrt{5}$이면 $|f(x_1)|>|f(x_2)|$ $\cdots$ ㉢

$1+\sqrt{5}\leq x_1<x_2$이면 $|f(x_1)|<|f(x_2)|$ $\cdots$ ㉣

이다. $k-1\leq x\leq k+1$에서

함수 $|f(x)|$의 최댓값 $g(k)$는 다음과 같다.

(i) $k+1<1-\sqrt{5}$일 때

$k<-\sqrt{5}$이고 ㉠에서 $g(k)=|f(k-1)|$

(ii) $k-1<1-\sqrt{5}\leq k+1$일 때

$-\sqrt{5}\leq k<2-\sqrt{5}$이고

㉠, ㉡에서 $g(k)$의 값은

$|f(k-1)|$과 $|f(k+1)|$ 중 큰 값이다.

$|f(k-1)|=f(k-1)=2k^2-8k-2$,

$|f(k+1)|=-f(k+1)=-2k^2+10$이므로

$|f(k-1)|>|f(k+1)|$에서

$2k^2-8k-2>-2k^2+10$

$4(k-3)(k+1)>0$

$k<-1$ 또는 $k>3$

$|f(k-1)|=|f(k+1)|$에서 $k=-1$ 또는 $k=3$

$|f(k-1)|<|f(k+1)|$에서 $-1<k<3$

이다. 그러므로

$-\sqrt{5}\leq k<-1$일 때 $g(k)=|f(k-1)|$,

$-1\leq k<2-\sqrt{5}$일 때 $g(k)=|f(k+1)|$이다.

(iii) $1-\sqrt{5}\leq k-1<k+1<1$일 때

$2-\sqrt{5}\leq k<0$이고 ㉡에서 $g(k)=|f(k+1)|$

(iv) $k-1<1\leq k+1$일 때

$0\leq k<2$이고 $g(k)=10$

(v) $1\leq k-1<k+1<1+\sqrt{5}$일 때

$2\leq k<\sqrt{5}$이고 ㉢에서 $g(k)=|f(k-1)|$

(vi) $k-1<1+\sqrt{5}\leq k+1$일 때

$\sqrt{5}\leq k<2+\sqrt{5}$이고

㉢, ㉣에서 $g(k)$의 값은

$|f(k-1)|$과 $|f(k+1)|$ 중 큰 값이다.

$|f(k-1)|=-f(k-1)=-2k^2+8k+2$,

$|f(k+1)|=f(k+1)=2k^2-10$이므로

$|f(k-1)|>|f(k+1)|$에서

$-2k^2+8k+2>2k^2-10$

$4(k-3)(k+1)<0$

$-1<k<3$

$|f(k-1)|=|f(k+1)|$에서 $k=-1$ 또는 $k=3$

$|f(k-1)|<|f(k+1)|$에서 $k<-1$ 또는 $k>3$

이다. 그러므로

$\sqrt{5}\leq k<3$일 때 $g(k)=|f(k-1)|$,

$3\leq k<2+\sqrt{5}$일 때 $g(k)=|f(k+1)|$이다.

(vii) $1+\sqrt{5}\leq k-1$일 때

$2+\sqrt{5}\leq k$이고 ㉣에서 $g(k)=|f(k+1)|$

(i) ~ (vii)에서

$$g(k)=\begin{cases} |f(k-1)|=2(k-2)^2-10 & (k<-1) \\ |f(k+1)|=-2k^2+10 & (-1\leq k<0) \\ 10 & (0\leq k<2) \\ |f(k-1)|=-2(k-2)^2+10 & (2\leq k<3) \\ |f(k+1)|=2k^2-10 & (k\geq 3) \end{cases}$$

이고

함수 $g(k)$는 $k=-1$과 $k=3$에서 최솟값 8을 가지므로

$b^2+c^2+m^2=(-1)^2+3^2+8^2=74$