

# 2021학년도 4월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

## • 2교시 수학 영역 •

### [확률과 통계]

23	㉔	24	㉔	25	㉔	26	㉔	27	㉔
28	㉔	29	288	30	206				

#### 23. [출제의도] 중복순열 계산하기

$${}_n\Pi_2 = n^2 = 25 \text{에서 } n = 5$$

#### 24. [출제의도] 이항정리 이해하기

다항식  $(x+2a)^5$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_r(2a)^r x^{5-r} = {}_5C_r 2^r a^r x^{5-r}$$

$x^3$ 의 계수는  $r=2$ 일 때이므로

$${}_5C_2 \times 2^2 \times a^2 = 40a^2 = 640$$

따라서  $a=4$

#### 25. [출제의도] 중복조합 이해하기

빨간색 볼펜 5자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는  $56 \times 10 = 560$

#### 26. [출제의도] 중복순열 이해하기

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 2이므로

만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 수를 정하는

경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을

허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로  ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

일의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 3 또는

5이므로 일의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는  $2 \times 125 \times 3 = 750$

#### 27. [출제의도] 이항계수의 성질을 이용하여 추론하기

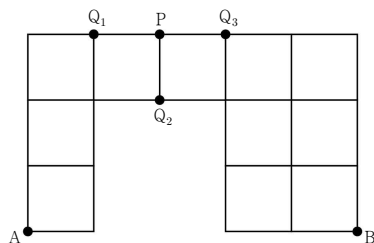
$${}_{2n+1}C_0 + {}_{2n+1}C_2 + {}_{2n+1}C_4 + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n} = 2^{2n}$$

$$\text{이므로 } f(n) = \sum_{k=1}^n {}_{2n+1}C_{2k} = 2^{2n} - 1$$

$$2^{2n} - 1 = 1023 \text{에서 } 2^{2n} = 2^{10}$$

따라서  $n=5$

#### 28. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제 해결하기



그림과 같이 세 지점  $Q_1, Q_2, Q_3$ 를 정하면

A지점에서 출발하여 P지점까지 가기 위해서는  $Q_1$ 지점 또는  $Q_2$ 지점 중 한 지점을 지나야 하고 P지점에서 출발하여 B지점까지 가기 위해서는  $Q_2$ 지점 또는  $Q_3$ 지점 중 한 지점을 지나야 한다.

그러므로 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우와 각각의 경우의 수는 다음과 같다.

(i)  $A \rightarrow Q_1 \rightarrow P \rightarrow Q_2 \rightarrow B$ 의 순서로 이동하는 경우

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 24$$

(ii)  $A \rightarrow Q_1 \rightarrow P \rightarrow Q_3 \rightarrow B$ 의 순서로 이동하는 경우

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 40$$

(iii)  $A \rightarrow Q_2 \rightarrow P \rightarrow Q_3 \rightarrow B$ 의 순서로 이동하는 경우

$$\frac{3!}{1! \times 2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 30$$

(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경우의 수는

$$24 + 40 + 30 = 94$$

#### 29. [출제의도] 원순열을 이용하여 추론하기

남학생 4명 중 A, B가 아닌 남학생 2명을 D, E라 하면

(i) C가 D, E와 모두 이웃하는 경우

A, B를 한 학생으로 생각하고,

D, C, E를 한 학생으로 생각하여

5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이 각각에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸는

경우의 수는 2!, D, E가 서로 자리를 바꾸는

경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2! \times 2! = 96$$

(ii) C가 A 또는 B 중 한 명과 이웃하는 경우

D 또는 E 중 한 명과 C, A, B의

총 4명을 한 학생으로 생각하여

5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이 각각에 대하여 D 또는 E 중 한 명을

선택하는 경우의 수는  ${}_2C_1$ , A, B가 서로

자리를 바꾸는 경우의 수는 2!, A, B를

한 학생으로 생각하여 C와 이웃한 두 학생이

서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로

구하는 경우의 수는

$$24 \times {}_2C_1 \times 2! \times 2! = 192$$

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$$96 + 192 = 288$$

#### 30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

6 이하의 음이 아닌 네 정수  $y_1, y_2, y_3, y_4$ 에 대하여

$$x_1 = 2y_1 + 1, x_2 = 2y_2 + 2,$$

$$x_3 = 2y_3 + 1, x_4 = 2y_4 + 2 \text{라 하면}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 34 \text{에서}$$

$$(2y_1 + 1) + (2y_2 + 2) + (2y_3 + 1) + (2y_4 + 2) = 34,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 14 \cdots \textcircled{1}$$

구하는 모든 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 의 개수는

방정식  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 14$ 를 만족시키는

음이 아닌 네 정수  $y_1, y_2, y_3, y_4$ 의 모든

순서쌍  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 에서

$y_k \geq 7$ 인 4 이하의 자연수  $k$ 가 존재하는

순서쌍  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 를 제외한 개수와 같다.

(i) 방정식  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 14$ 를 만족시키는

음이 아닌 네 정수  $y_1, y_2, y_3, y_4$ 의

모든 순서쌍  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 의 개수는

서로 다른 4개에서 중복을 허락하여

14개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{14} = {}_{17}C_{14} = {}_{17}C_3 = \frac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2 \times 1} = 680$$

(ii)  $y_k \geq 7$ 인  $k$ 의 값이 1개인 경우

$y_1 \geq 7$ 이라 하자.

$z_1 = y_1 - 7$ 이라 하면 방정식  $\textcircled{1}$ 은

$$z_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$$

방정식  $z_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$ 을 만족시키는

음이 아닌 네 정수  $z_1, y_2, y_3, y_4$ 의 모든

순서쌍  $(z_1, y_2, y_3, y_4)$ 의 개수는

서로 다른 4개에서 중복을 허락하여

7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_7 = {}_{10}C_3 = 120$$

이때  $y_i \geq 7$ 인 2 이상 4 이하의 자연수  $i$ 이

존재하는 순서쌍  $(z_1, y_2, y_3, y_4)$ 는

$(0, 7, 0, 0), (0, 0, 7, 0), (0, 0, 0, 7)$ 의

3가지이므로  $120 - 3 = 117$

같은 방법으로  $y_k \geq 7$ 인 2 이상 4 이하의

자연수  $k$ 가 존재하는 순서쌍  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 의

개수도 각각 117이다.

따라서  $y_k \geq 7$ 인  $k$ 의 값이 1개인

순서쌍  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 의 개수는

$$4 \times 117 = 468$$

(iii)  $y_k \geq 7$ 인  $k$ 의 값이 2개인 경우

순서쌍  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 는  $(7, 7, 0, 0),$

$(7, 0, 7, 0), (7, 0, 0, 7), (0, 7, 7, 0),$

$(0, 7, 0, 7), (0, 0, 7, 7)$ 의 6가지이다.

(i), (ii), (iii)에 의해

구하는 모든 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 의 개수는

$$680 - (468 + 6) = 206$$

### [미적분]

23	㉔	24	㉔	25	㉔	26	㉔	27	㉔
28	㉔	29	18	30	13				

#### 23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{0+3}{1+0} = 3$$

#### 24. [출제의도] 로그함수의 미분 이해하기

$$f(x) = \log_3 6x = \log_3 6 + \log_3 x$$

$$f'(x) = (\log_3 6 + \log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$$

$$\text{따라서 } f'(9) = \frac{1}{9 \ln 3}$$

#### 25. [출제의도] 급수의 성질 이해하기

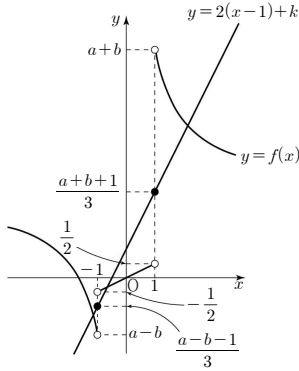
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} - 2 \right) \text{가 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3na_n}{n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3 \times \frac{a_n}{n}}{1 + \frac{4}{n^2}} = \frac{2 + 3 \times 2}{1 + 0} = 8$$

#### 26. [출제의도] 지수함수의 극한 이해하기



$f(1)=g(1)$ ,  $f(-1)=g(-1)$  이어야 하고,  
두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은  
그림과 같아야 한다.



즉, 직선  $y=2(x-1)+k$ 는  
두 점  $\left(1, \frac{a+b+1}{3}\right)$ ,  $\left(-1, \frac{a-b-1}{3}\right)$ 을 지나므로  
 $\frac{a+b+1}{3}=k$ ,  $\frac{a-b-1}{3}=k-4$ 에서  
 $b=5$

$k=\frac{a}{3}+2$ 가 자연수이므로  $a$ 는 3의 배수이다. ... ㉓

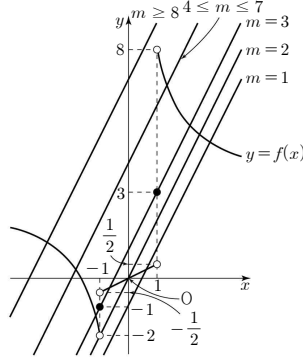
$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) < f(-1) < \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$  이어야 하므로

$a-5 < \frac{a}{3}-2 < -\frac{1}{2}$ 에서  $a < \frac{9}{2}$  ... ㉔

$a > 0$ 이므로  $\frac{1}{2} < \frac{a}{3}+2 < a+5$ 가 성립하며

$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) < f(1) < \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$ 를 만족시킨다.

㉓, ㉔에 의해  $0 < a < \frac{9}{2}$ 이므로  $a=3$ ,  $k=3$



(i)  $m=1$ 일 때  
 $g(-1)=-3$ ,  $g(1)=1$ 이므로  $y=f(x)$ 의  
그래프와  $y=g(x)$ 의 그래프는  $-1 < x < 1$ ,  
 $x > 1$ 에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.  
그러므로  $c_1=2$

(ii)  $m=2$ 일 때  
 $g(-1)=-2$ ,  $g(1)=2$ 이므로  $y=f(x)$ 의  
그래프와  $y=g(x)$ 의 그래프는  $x=0$ ,  
 $x > 1$ 에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.  
그러므로  $c_2=2$

(iii)  $m=3$ 일 때  
 $m=k=3$ 이므로  $c_3=5$

(iv)  $4 \leq m \leq 7$ 일 때  
 $g(-1) > \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -\frac{1}{2}$ ,

$g(1) < \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 8$ 이므로  
 $y=f(x)$ 의 그래프와  $y=g(x)$ 의 그래프는  
 $x < -1$ ,  $x > 1$ 에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.  
그러므로  $c_m=2$

(v)  $m \geq 8$ 일 때  
 $g(-1) > \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -\frac{1}{2}$ ,  
 $g(1) \geq \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 8$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프와  $y=g(x)$ 의 그래프는  
 $x < -1$ 에서 1개의 교점을 갖는다.  
그러므로  $c_m=1$

(i) ~ (v)에 의해

$$k + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m - 1) = 3 + 1 + 1 + 4 + 1 \times 4 = 13$$

### [기하]

23	㉑	24	㉓	25	㉒	26	㉔	27	㉕
28	㉖	29	115	30	63				

#### 23. [출제의도] 벡터의 연산 계산하기

$$(2\vec{a}-m\vec{b})-(n\vec{a}-4\vec{b})=(2-n)\vec{a}-(m-4)\vec{b}$$

에서  $m-4=1$ ,  $2-n=1$ 이므로

$$m=5, n=1$$

따라서  $m+n=6$

#### 24. [출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식 이해하기

쌍곡선  $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$  위의 점  $(4, 7)$ 에서의

접선의 방정식은  $\frac{4x}{2}-\frac{7y}{7}=1$ ,

$$2x-y=1$$

따라서 구하는 접선의  $x$ 절편은  $\frac{1}{2}$

#### 25. [출제의도] 타원의 정의 이해하기

점 Q는 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점이므로

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{QF'}=\overrightarrow{PF'}$$

$$\overrightarrow{PF'}+\overrightarrow{QF'}=\overrightarrow{PF'}+\overrightarrow{PF}=12$$

삼각형  $PF'Q$ 의 둘레의 길이가 20이므로  $\overrightarrow{PQ}=8$

따라서  $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{OP}$ 에서  $\overrightarrow{OP}=4$

#### 26. [출제의도] 포물선의 정의 이해하기

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라

하면 포물선의 정의에 의해  $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{FA}=8$

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HC}=8-p$$

$$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OF}=8-2p$$

$\overrightarrow{AB}=h$ 라 하면

사다리꼴 OFAC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{(8-p)+p\} \times h = 4h$$

직각삼각형 FBA의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (8-2p) \times h = (4-p)h$$

$$4h:(4-p)h=2:1 \text{이므로 } p=2$$

$\overrightarrow{FB}=4$ 이므로 직각삼각형 FBA에서

$$h=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ACF의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

#### 27. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 추론하기

쌍곡선  $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 주축의 길이가 4이므로

$$\overrightarrow{PF'}-\overrightarrow{PF}=4 \text{에서 } \overrightarrow{PF'}=7$$

타원  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$ 의 장축의 길이가  $2|a|$ 이므로

$$\overrightarrow{PF'}+\overrightarrow{PF}=7+3=2|a| \text{에서 } a^2=25$$

타원  $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{7}=1$ 에서  $c^2=25-7=18$

쌍곡선  $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 에서  $4+b^2=c^2=18$ ,  $b^2=14$

따라서  $a^2+b^2=25+14=39$

#### 28. [출제의도] 이차곡선을 이용하여 추론하기

점  $F\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ 이 포물선의 초점이므로

준선의 방정식은  $x=-\frac{9}{4}$

점 P의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면

$$\overrightarrow{PF}=x_1+\frac{9}{4}=\frac{25}{4} \text{에서 } x_1=4, y_1=6$$

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$6y=\frac{9}{2}(x+4) \text{이고 점 } F' \text{을 지나므로 } c=4$$

$$P(4, 6), F'(-4, 0) \text{이므로 } \overrightarrow{PF'}=10$$

타원의 장축의 길이는  $\overrightarrow{PF'}+\overrightarrow{PF}=\frac{65}{4}$  이고

$$\overrightarrow{F'F}=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4} \text{이므로}$$

타원의 단축의 길이를  $k$ 라 하면

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{65}{8}\right)^2-\left(\frac{25}{8}\right)^2=\frac{225}{4}$$

따라서 타원의 단축의 길이는 15

#### 29. [출제의도] 벡터의 연산을 활용하여 문제해결하기

(i) 두 점 A, O의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}=\vec{0} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ})$$

$$=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$$

$|\overrightarrow{MP}|=1$ 이므로 두 벡터  $\overrightarrow{MP}$ ,  $\overrightarrow{MQ}$ 의 방향이

같고  $|\overrightarrow{MQ}|$ 의 값이 최대일 때,  $|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$ 의

값은 최대이다. 그러므로 선분 MC와

반원의 호가 만나는 점을 X라 하면

점 Q가 점 C이고 점 P가 점 X일 때

$|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$ 의 값은 최대이다.

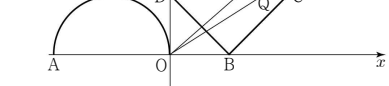
$$\overrightarrow{MC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10} \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}| \leq |\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{MC}|=\sqrt{10}+1$$

따라서  $M=\sqrt{10}+1$

$$(ii) \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})$$

$$=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}$$



삼각형 BCD 위의 임의의 점 Q에 대하여

$\overrightarrow{QY}=\overrightarrow{AP}$ 인 점을 Y라 하자.

$$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QY}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OY}| \geq |\overrightarrow{OQ}|$$

이므로 점 Y가 점 Q일 때  $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 값은  
최소이다. 점 Q가 선분 BD 위에 있고  
 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{BD}$ 일 때  $|\overrightarrow{OQ}|$ 의 값은 최소이므로

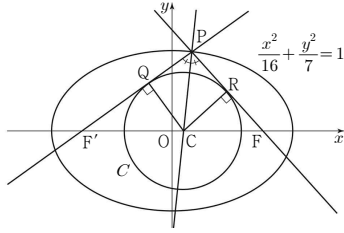
$$m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i), (ii)에 의해

$$M^2 + m^2 = (11 + 2\sqrt{10}) + \frac{1}{2} = \frac{23}{2} + 2\sqrt{10}$$

따라서  $p = \frac{23}{2}$ ,  $q = 10$ 이므로  $p \times q = 115$

### 30. [출제의도] 타원의 정의틀 활용하여 문제해결하기



$$c^2 = 16 - 7 = 9, \quad c = 3$$

$$\overline{FF'} = 2c = 6$$

직선 FP가 원 C와 접하는 점을 R라 하고

$\overline{PQ} = a$ 라 하면

$$\overline{PF} = 2\overline{PQ} = 2a \text{이므로 } \overline{RF} = \overline{PF} - \overline{PR} = \overline{PF} - \overline{PQ} = a$$

$\overline{PR} = \overline{RF}$ 이고,  $\angle PRC = 90^\circ$ 이므로

삼각형 PCR, FCR가 서로 합동이다.

$\overline{CP} = l$ 이라 하면  $\overline{CP} = \overline{FC}$ 에서  $\overline{F'C} = 6 - l$

$$\overline{PF'} = \overline{PQ} + \overline{QF'} \text{이고}$$

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 8 \text{이므로 } \overline{QF'} = 8 - 3a$$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로

$$\overline{PF'} > \overline{PF} \text{에서 } a < 2 \quad \text{㉠}$$

삼각형 FPF'에서  $\angle F'PC = \angle CPF$ 이므로

$$\overline{PF'} : \overline{PF} = \overline{F'C} : \overline{CF}$$

$$(8 - 2a) : 2a = (6 - l) : l \text{에서 } l = \frac{3}{2}a \quad \text{㉡}$$

점 Q는 점 C에서 선분 PF'에 내린 수선의

$$\text{발이므로 } \overline{F'C}^2 - \overline{F'Q}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PQ}^2$$

$$(6 - l)^2 - (8 - 3a)^2 = l^2 - a^2 \quad \text{㉢}$$

$$\text{㉠, ㉢에 의해 } 4a^2 - 15a + 14 = 0$$

$$(a - 2)(4a - 7) = 0 \text{에서 } a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{7}{4}$$

$$\text{㉠에 의해 } a = \frac{7}{4}, \quad l = \frac{21}{8}$$

$$\text{따라서 } 24 \times \overline{CP} = 63$$