수능대비
새로운 교육과정

마플 내신대비 문제집

MAPL SYNERGY SERIES
YOUR MASTER PLAN
www.mapl.co.kr

Your master plan

mapl

마플시너지 정답과 해설

수학 I

SYNERGY

내신 일등급을 위한 최고의 교재

마플시너지

수학 I

마플시너지
내신문제집

MAPL SYNERGY SERIES

마플 시너지 내신문제집

MAPL SYNERGY SERIES

수학 I

1845Q

최다 빈출 문제로 이루어진 내신연계기출

+ 0685Q

도움을 주신 분들

정영필 김민석 강승혁 이승효 김성진 서혜원

내신 일등급을 위한 최고의 교재

마플시너지

수학 I

마플시너지 내신문제집 수학 I
ISBN : 978-89-94845-66-1 [53410]
발행일 : 2019년 3월 11일(1판 1쇄)
인쇄일 : 2020년 4월 27일
판/쇄 : 1판 5쇄

펴낸곳
희망에듀출판부 *(Heemang Institute, inc. Publishing dept.)*

펴낸이
임정선

주소 경기도 부천시 석천로 174 하성빌딩
[174, Seokcheon-ro, Bucheon-si, Gyeonggi-do, Republic of Korea]

교재 오류 및 문의
mapl@heemangedu.co.kr

희망에듀 홈페이지
http://www.heemangedu.co.kr

마플교재 인터넷 구입처
http://www.mapl.co.kr

교재 구입 문의
오성서적
Tel 032) 653-6653
Fax 032) 655-4761

YOUR
MASTER
PLAN

핵심단권화 수학개념서

마플교과서 시리즈

마플시너지 시리즈

MAPL THE BANK

마플총정리 시리즈

YOUR
MASTER
PLAN

핵심단권화 수학개념서

마플교과서 시리즈

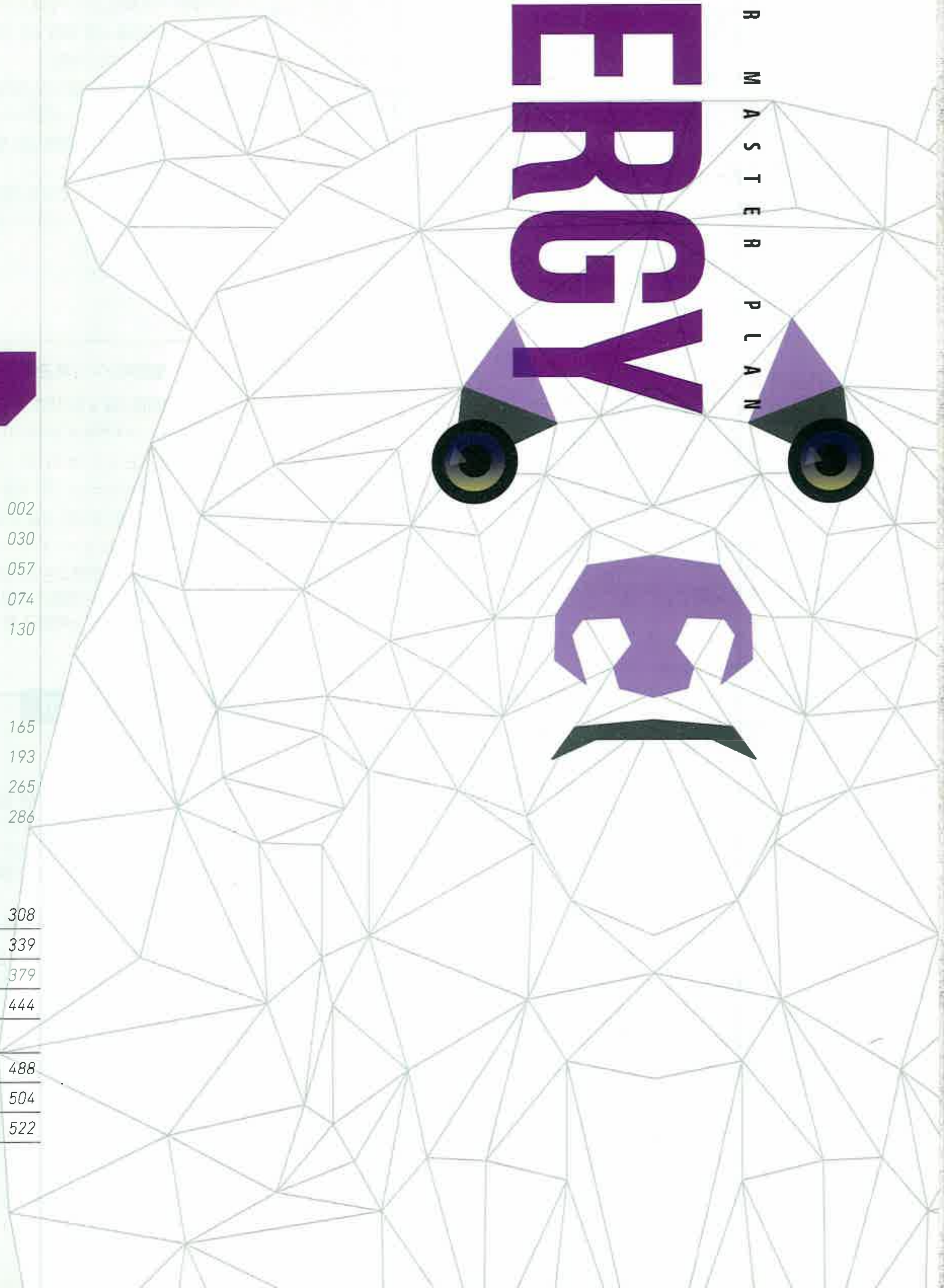
마플시너지 시리즈

MAPL
THE BANK

마플총정리 시리즈

정답과 해설

mapl
YOUR MASTER PLAN
SYNERGY



CONTENTS

1 지수함수와 로그함수

MAPL; SYNERGY

01 지수

STEP 1 내신정복기출유형

0001

정답 ④

STEP A 방정식 $x^3=8$의 근 구하기

ㄱ. 8의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=8$에서 $x^3-8=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

즉 8의 세제곱근은 2, $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$이다. [거짓]

STEP B n제곱근 a의 값이 $\sqrt[n]{a}$임을 이용하기

ㄴ. 세제곱근 8의 값은

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=(\sqrt[3]{2})^3=2$ [참]

STEP C 방정식 $x^4=-16$의 실근 구하기

ㄷ. -16의 네제곱근 중에서 실수인 것을 x라 하면

$x^4=-16$

그런데 $x^4\geq 0$이므로 방정식을 만족시키는 실근은 존재하지 않는다.

즉 -16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. [참]

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0002

정답 ③

STEP A 방정식 $x^3=-1$의 근 구하기

-1의 세제곱근을 x라 하면

방정식 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

즉 -1의 세제곱근은 -1, $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$이다. [거짓]

STEP B 방정식 $x^4=1$의 실근 구하기

1의 네제곱근을 x라 하면

방정식 $x^4=1$에서 $x^4-1=0$, $(x^2-1)(x^2+1)=0$

$x=\pm 1$ 또는 $x=\pm i$

즉 1의 네제곱근 중에서 실수인 것은 -1, 1이다. [거짓]

STEP C n제곱근 a의 값이 $\sqrt[n]{a}$임을 이용하기

세제곱근 -8의 값은 $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=(\sqrt[3]{-2})^3=-2$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

0003

정답 ②

STEP A 방정식 $x^n=a$의 근을 구하여 근의 진위판단하기

ㄱ. 0의 제곱근을 x라 하면 x는 방정식 $x^2=0$의 근이므로 0이다. [참]

ㄴ. -27의 세제곱근을 x라 하면

방정식 $x^3=-27$에서 $x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

즉 -27의 세제곱근은 -3, $\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}$이다. [거짓]

ㄷ. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 x라 하면 x는 방정식 $x^4=16$의 실근이므로

$x=\sqrt[4]{16}=2$ 또는 $x=-\sqrt[4]{16}=-2$ [참]

ㄹ. -81의 네제곱근 중 실수인 것을 x라 하면 $x^4=-81$

그런데 $x^4\geq 0$이므로 방정식을 만족시키는 실근은 존재하지 않는다. [거짓]

ㅁ. -64의 여섯 제곱근 중 실수인 것을 x라 하면 방정식 $x^6=-64$를 만족하는 실근이다.

그런데 $x^6\geq 0$이므로 방정식을 만족시키는 실근은 존재하지 않는다. [거짓]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이므로 2개이다.

0004

정답 ①

STEP A 방정식 $x^n=a$의 근을 구하여 근의 진위판단하기

① 81의 네제곱근을 x라 하면 x는 방정식 $x^4=81$의 근이므로 실수인 것은

$x=\sqrt[4]{81}=3$ 또는 $x=-\sqrt[4]{81}=-3$이다. [참]

② 27의 세제곱근을 x라 하면 x는 방정식 $x^3=27$의 근이므로 실수인 것은

$x=\sqrt[3]{27}=3$뿐이다. [거짓]

③ 25의 제곱근을 x라 하면 x는 방정식 $x^2=25$의 근이므로 실수인 것은

$x=\sqrt[2]{25}=5$ 또는 $x=-\sqrt[2]{25}=-5$이다. [거짓]

④ -8의 세제곱근을 x라 하면 x는 방정식 $x^3=-8$의 근이므로 실수인 것은

$x=-2$이다. [거짓]

⑤ 4의 네제곱근을 x라 하면 x는 방정식 $x^4=4$의 근이므로 실수인 것은

$x=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt[4]{4}=-\sqrt{2}$이다. [거짓]

따라서 옳은 것은 ①이다.

0005

정답 ④

STEP A 방정식 $x^n=a$의 근을 구하여 근의 진위판단하기

① -64의 세제곱근을 x라 하면

방정식 $x^3=-64$에서 $x^3+64=0$, $(x+4)(x^2-4x+16)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

즉 $x=-4$ 또는 $x=2+\sqrt{3}i$ 또는 $x=2-2\sqrt{3}i$이다. [거짓]

② 25의 네제곱근 중 실수인 것을 x라 하면 x는 방정식 $x^4=25$의 실근이므로

$x=\sqrt[4]{25}=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt[4]{25}=-\sqrt{5}$이다. [거짓]

③ 0의 제곱근을 x라 하면 x는 방정식 $x^2=0$의 근이므로 0이다. [거짓]

④ n이 짝수일 때, 5의 n제곱근 중에서 실수인 것은 2개이다. [참]

⑤ n이 홀수일 때, -5의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이다. [거짓]

따라서 옳은 것은 ④이다.

내/신/연/계/ 출제문항 001

다음 중에서 옳은 것은?

① 0의 제곱근은 없다.
② 27의 세제곱근 중에서 실수인 것은 2개이다.
③ -64의 네제곱근 중에서 실수인 것은 1개이다.
④ n이 3 이상인 홀수일 때, -19의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.
⑤ n이 짝수일 때, 39의 n제곱근 중에서 실수인 것은 2개이다.

STEP A 방정식 $x^n=a$를 세운 후 근의 진위판단하기

① 0의 세제곱근은 방정식 $x^3=0$의 근이므로 0이다. [거짓]

② 27의 세제곱근 중 실수인 것을 x라 하면 x는 방정식 $x^3=27$의 실근이므로

$x=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ [거짓]

③ -64의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=-64$이므로 실근은 존재하지 않는다. [거짓]

④ n이 3 이상인 홀수일 때, -19의 n제곱근 중에서 실수인 것은 1개이다. [거짓]

⑤ n이 짝수일 때, 39의 n제곱근 중에서 실수인 것은 2개이다. [참]

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

정답 ⑤

0006

정답 ③

STEP ⓐ 거듭제곱근의 정의 이해하기

① $a<0$일 때, $\sqrt[4]{a^4}=|a|=-a$이다. [참]

② 세제곱근 64의 값은 $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=(\sqrt[3]{4})^3=4$이다. [참]

③ $x^{2k}=a$인 실수 x는 $2k$가 짝수이고 $a>0$일 때 2개, $a<0$일 때 0개이다. [거짓]

④ $x^{2k+1}=a$인 실수 x는 $2k+1$이 홀수이므로 1개이다. [참]

⑤ 16의 네제곱근 중 실수인 것을 x라 하면 x는 방정식 $x^4=16$의 실근이므로 ±2이다. [참]

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

0007

정답 ⑤

STEP ⓐ 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 n이 홀수일 때는 1개이고 n이 짝수일 때는 a의 값에 따라 다름을 이용하기

-27의 세제곱근 중 실수인 것을 x라 하면

x는 방정식 $x^3=-27$의 실근이므로 $x=\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$의 1개이다.

$\therefore a=1$

16의 네제곱근 중 실수인 것을 x라 하면

x는 방정식 $x^4=16$의 실근이므로 $x=\sqrt[4]{16}=2$ 또는 $x=-\sqrt[4]{16}=-2$의 2개이다.

$\therefore b=2$

81의 여섯제곱근의 개수는 방정식 $x^6=81$의 근의 개수와 같으므로 6개이다.

$\therefore c=6$

따라서 $a+b+c=1+2+6=9$

내/신/연/계/ 출제문항 002

-4의 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 a, $\sqrt{16}$의 네제곱근의 중에서 실수인 것의 개수를 b, -8의 n제곱근의 개수를 c라 하면

$$a+b+c=8$$

이 성립할 때, n의 값은? (단, n은 자연수)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

STEP ⓐ 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수 구하기

-4의 세제곱근 중 실수인 것을 x라 하면

x는 방정식 $x^3=-4$의 실근이므로 1개이다.

$\therefore a=1$

$\sqrt{16}$의 네제곱근 중 실수인 것을 x라 하면

x는 방정식 $x^4=\sqrt{16}=4$의 실근이므로 2개이다.

$\therefore b=2$

-8의 n제곱근을 x라 하면

x는 방정식 $x^n=-8$의 근이므로 근의 개수는 n개이다.

$\therefore c=n$

따라서 $a+b+c=1+2+n=8$이므로 $n=5$

정답 ④

0008

정답 ③

STEP Ⓐ 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것 구하기

-8의 세제곱근 중에서 실수인 것을 a라 하면 a는 방정식 $a^3=-8$의 실근이므로 $a=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

$\therefore a=-2$

81의 네제곱근 중에서 실수인 것을 b라 하면 b는 방정식 $b^4=81$의 실근이므로 $b=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$ 또는 $b=-\sqrt[4]{81}=-\sqrt[4]{3^4}=-3$

이때 b는 음수이므로 $b=-3$

따라서 $ab=6$

0009

정답 ⑤

STEP Ⓐ 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것 구하기

$\sqrt{2}$의 세제곱근 중에서 실수인 것이 a이므로 $a^3=\sqrt{2}$

$\therefore a=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}$

$\sqrt[3]{4}$의 네제곱근 중에서 양수인 것이 b이므로 $b^4=\sqrt[3]{4}$

$\therefore b=\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{2}$

STEP Ⓑ $a+b=2^k$을 만족하는 상수 k의 값 구하기

따라서 $a+b=\sqrt[6]{2}+\sqrt[6]{2}=2\sqrt[6]{2}=2^{1+\frac{1}{6}}=2^{\frac{7}{6}}$이므로 $k=\frac{7}{6}$

내/신/연/계/ 출제문항 003

2의 세제곱근 중에서 실수인 것을 a, $\sqrt[3]{16}$의 네제곱근 중에서 양수인 것을 b라고 할 때, 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b인 직사각형의 둘레의 길이는 2^k이다. 이때 실수 k의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{7}{3}$
④ 3 ⑤ 4

STEP Ⓐ 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것 구하기

2의 세제곱근에서 실수인 것이 a이므로 $a^3=2$

$\therefore a=2^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{16}$의 네제곱근 중에서 양수인 것이 b이므로 $b^4=\sqrt[3]{16}$

$\therefore b=\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$

STEP Ⓑ 직사각형의 둘레의 길이를 구하여 k의 값 구하기

직사각형의 둘레의 길이는 $2(a+b)=2(2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}})=4\cdot2^{\frac{1}{3}}=2^{2+\frac{1}{3}}=2^{\frac{7}{3}}$

따라서 $k=\frac{7}{3}$

정답 ③

0010

정답 ⑤

STEP Ⓐ 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것 구하기

a는 8의 5제곱근 중 실수이므로 방정식 $a^5=8$의 실근이다.

$\therefore a=\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac{3}{5}}$

b는 4의 4제곱근 중 양수이므로 방정식 $b^4=4$의 양의 실근이다.

$\therefore b=\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}=2^{\frac{1}{2}}$

STEP Ⓑ 로그의 밑 변환 공식을 이용하여 $\log_a b$의 값 구하기

따라서 $\log_a b=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=\dfrac{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}{\log_2 2^{\frac{3}{5}}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5}{6}$

내신연계 출제문항 004

2의 세제곱근 중 실수인 것을 a, 3의 제곱근 중 양의 실수인 것을 b라 할 때, $(a^2b^2)^3 \times (a^3b^2)^2$의 값은?

① $2^3 \cdot 3^4$　② $2^4 \cdot 3^5$　③ $2^5 \cdot 3^5$
④ $2^5 \cdot 3^4$　⑤ $2^3 \cdot 3^3$

STEP A 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것 구하기

2의 세제곱근 중 실수인 것이 a이므로 $a^3=2$
3의 제곱근 중 양의 실수가 b이므로 $b^2=3$

STEP B $(a^2b^2)^3 \times (a^3b^2)^2$의 값 구하기

따라서 $(a^2b^2)^3 \times (a^3b^2)^2 = a^{12}b^{10} = (a^3)^4(b^2)^5 = 2^4 \cdot 3^5$

정답 ②

0011

정답 ④

STEP A x가 a의 n제곱근이면 $x^n=a$임을 이용하기

(ⅰ) n이 홀수일 때, $n-1$은 짝수이므로 $(-5)^{n-1}$의 n제곱근은
$\sqrt[n]{(-5)^{n-1}}$이므로 한 개 존재한다.
$\therefore a_3=a_5=a_7=\cdots=a_{99}=1$

(ⅱ) n이 짝수일 때, $n-1$은 홀수이므로 $(-5)^{n-1}$은 음수이다.
즉 음수의 짝수인 거듭제곱근 중 실수는 없다.
$\therefore a_4=a_6=a_8=\cdots=a_{100}=0$

STEP B n이 홀수일 때 실근이 한 개 존재함을 이용하여 값 구하기

(ⅰ), (ⅱ)의하여 n이 홀수일 때만 한 개씩 존재하므로
$a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{100}=49$

내신연계 출제문항 005

2 이상의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[3]{-8}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

STEP A 방정식 $x^n=-2$의 실근의 개수가 a_n임을 이해하기

$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2<0$이므로
a_n은 -2의 n제곱근 중 실수인 것의 개수이다.
즉 방정식 $x^n=-2$의 실근의 개수이다.

STEP B -2의 n제곱근 중 실근의 개수 구하기

자연수 n이 짝수일 때 $a_n=0$, 자연수 n이 홀수일 때 $a_n=1$이므로
$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{10}=0\cdot5+1\cdot4=4$ ⬅ $a_n=\begin{cases}0 & (n\text{은 짝수})\\ 1 & (n\text{은 홀수})\end{cases}$

정답 ①

0012

정답 ③

STEP A 방정식 $x^n=a$의 실근의 개수가 $f_n(a)$임을 이해하기

$f_n(a)$는 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수이므로
방정식 $x^n=a$의 실근의 개수이다.

STEP B 주어진 n, a에 대하여 $f_n(a)$의 값 구하기

-3의 거듭제곱근 중 실수는 없으므로 $f_2(-3)=0$
-2의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{-2}$로 오직 한 개이므로 $f_3(-2)=1$
5의 네제곱근 중 실수는 $\sqrt[4]{5}$, $-\sqrt[4]{5}$로 두 개이므로 $f_4(5)=2$
따라서 $f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)=3$

0013

정답 ④

STEP A 방정식 $x^2=n-4$의 실근의 개수가 $f(n)$임을 이해하기

$n-4$의 제곱근 중 실수인 것을 x라 하면
방정식 $x^2=n-4$를 만족시키는 실수 x의 개수는
$n>4$인 경우 $f(n)=2$
$n=4$인 경우 $f(n)=1$
$n<4$인 경우 $f(n)=0$

STEP B 방정식 $x^5=n-4$의 실근의 개수가 $g(n)$임을 이해하기

$n-4$의 다섯 제곱근 중 실수인 것을 y라 하면
방정식 $y^5=n-4$를 만족시키는 실수 y의 개수는 모든 자연수 n에 대하여 $g(n)=1$이다.

STEP C $f(n)+g(n)=3$을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 개수 구하기

$f(n)+g(n)=f(n)+1=3$이므로 $f(n)=2$
따라서 $f(n)+g(n)=3$을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 개수는
5, 6, 7, 8, 9, 10의 6개이다.

내신연계 출제문항 006

실수 x와 2 이상의 자연수 n에 대하여 x^2-9의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(x)$라 하고 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f_3(x)+f_4(x)+f_5(x)+f_6(x)$$

라 하자. 방정식 $g(x)=2$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

STEP A 방정식 $x^n=x^2-9$의 실근의 개수가 $f_n(x)$임을 이해하기

x^2-9의 n제곱근 중 실수인 것을 x라 하면
방정식 $x^n=x^2-9$를 만족시키는 실수 x의 개수는
(ⅰ) n이 짝수인 경우
$x^2-9>0$인 경우
즉 $x<-3$ 또는 $x>3$일 때, $f_n(x)=2$
$x^2-9=0$인 경우
즉 $x=3$ 또는 $x=-3$일 때, $f_n(x)=1$
$x^2-9<0$인 경우
즉 $-3<x<3$일 때, $f_n(x)=0$
(ⅱ) n이 3 이상의 홀수인 경우
x의 값에 관계없이 $f_n(x)=1$

STEP B 방정식 $g(x)=2$를 만족하는 관계식 구하기

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$g(x)=f_3(x)+f_4(x)+f_5(x)+f_6(x)$
$=1+f_4(x)+1+f_6(x)$
$=2+f_4(x)+f_6(x)$
즉 $f_3(x)+f_4(x)+f_5(x)+f_6(x)=2$에서 $2+f_4(x)+f_6(x)=2$
$\therefore f_4(x)+f_6(x)=0$

STEP C 방정식 $g(x)=2$를 만족시키는 정수 x의 개수 구하기

이때 $f_4(x)+f_6(x)=0$이므로 (ⅰ)에 의하여 $f_4(x)=f_6(x)=0$
따라서 $g(x)=2$를 만족시키는 실수 x의 범위는 $-3<x<3$이므로
정수 x의 개수는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

정답 ④

0014

정답 ⑤

STEP Ⓐ x의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수가 $f(n,\ x)$임을 이해하기

자연수 n에 대하여 x의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수가 $f(n,\ x)$이므로 y에 대한 방정식 $y^n=x$의 실근의 개수이다.

STEP Ⓑ $f(n,\ x)$의 값을 구하여 [보기]의 진위판단하기

ㄱ. -64의 3제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[3]{-64}=-4$이므로
$f(3,\ -64)=1$ [참]

ㄴ. 81의 4제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[4]{81}=3,\ -\sqrt[4]{81}=-3$이므로
$f(4,\ 81)=2$
-16의 4제곱근 중에서 실수인 것은 없으므로 $f(4,\ -16)=0$
32의 5제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[5]{32}=2$이므로 $f(5,\ 32)=1$
즉 $f(4,\ 81)+f(4,\ -16)+f(5,\ 32)=3$ [참]

ㄷ. $a<0,\ b<0$이고 $a<b$이면 $f(4,\ a)=0,\ f(4,\ b)=0$
$a<0,\ b>0$이고 $a<b$이면 $f(4,\ a)=0,\ f(4,\ b)=2$
$a>0,\ b>0$이고 $a<b$이면 $f(4,\ a)=2,\ f(4,\ b)=2$
$a=0,\ b>0$이고 $a<b$이면 $f(4,\ a)=1,\ f(4,\ b)=2$
$a<0,\ b=0$이고 $a<b$이면 $f(4,\ a)=0,\ f(4,\ b)=1$
즉 임의의 실수 $a,\ b$에 대하여 $a<b$이면 $f(4,\ a)\le f(4,\ b)$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0015

정답 ⑤

STEP Ⓐ 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산하기

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{27}\times\sqrt[4]{3}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}&=\sqrt[4]{27\times3}+\sqrt[5]{\frac{96}{3}}\\&=\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[5]{2^5}\\&=3+2=5\end{aligned}$$

0016

정답 ②

STEP Ⓐ 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산하기

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-125}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}&=\sqrt[3]{(-5)^3}+\sqrt[6]{2^6}\\&=-5+2=-3\end{aligned}$$

0017

정답 ③

STEP Ⓐ $\sqrt[n]{a^n}$의 성질을 이용하여 계산하기

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{25^2}+(\sqrt[3]{5})^3+\sqrt[3]{5^6}-\sqrt[4]{(-5)^4}&=\sqrt[4]{5^4}+\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{(5^2)^3}-\sqrt[4]{(-5)^4}\\&=5+5+5^2-|-5|\\&=5+25=30\end{aligned}$$

0018

정답 ③

STEP Ⓐ 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산하기

① $(\sqrt[4]{4})^2=\sqrt[4]{2^4}=2$ [참]

② $\dfrac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{20}{5}}=\sqrt[3]{4}$ [참]

③ $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2}\neq\sqrt[15]{2}$ [거짓]

④ $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[3\times2]{2}=\sqrt[6]{2}$ [참]

⑤ $\sqrt[4]{125}\times\sqrt{\sqrt{5}}=\sqrt[4]{5^3}\times\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{5^3\cdot5}=\sqrt[4]{5^4}=5$ [참]

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

내/신/연/계/ 출제문항 007

다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{\sqrt[3]{729}}=3$
② $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{81}=9$
③ $\sqrt[7]{-128}+\sqrt[3]{\sqrt{64}}=0$
④ $\sqrt[18]{8^2}\times\sqrt[6]{2}=2$
⑤ $\sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{(-4)^4}+\sqrt[5]{(-5)^5}=-2$

STEP Ⓐ $\sqrt[n]{a^n}$의 성질을 이용하여 계산하기

① $\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^6}}=\sqrt[6]{3^6}=3$ [참]

② $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{3^6}=3^2=9$ [참]

③ $\sqrt[7]{-128}+\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[7]{(-2)^7}+\sqrt[6]{2^6}=-2+2=0$ [참]

④ $\sqrt[18]{8^2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[18]{2^6}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$ [거짓]

⑤ $\sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{(-4)^4}+\sqrt[5]{(-5)^5}$
$=|-2|+(-3)+|-4|+(-5)$
$=2+(-3)+4+(-5)$
$=-1-1=-2$ [참]

정답 ④

0019

정답 ⑤

STEP Ⓐ 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산하기

ㄱ. $$\begin{aligned}\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}&=\sqrt[3]{(-2)^3}+\sqrt[3]{2\cdot4}+\sqrt[6]{2^6}\\&=-2+\sqrt[3]{2^3}+2\\&=-2+2+2=2\ [참]\end{aligned}$$

ㄴ. $$\begin{aligned}\sqrt[6]{27}\times\sqrt[12]{9}\div\sqrt[6]{81}&=\frac{\sqrt[6]{27}\cdot\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}\\&=\frac{\sqrt[6]{27}\cdot\sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{9}}=\frac{\sqrt[6]{27\cdot3}}{\sqrt[3]{9}}\\&=\frac{\sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}}=1\ [참]\end{aligned}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}\sqrt[3]{8^2}\times\sqrt{9^{-3}}\div\sqrt{\sqrt{81^{-3}}}&=\sqrt[3]{2^6}\times\sqrt{3^{-6}}\div\sqrt[4]{3^{-12}}\\&=2^2\times3^{-3}\div3^{-3}\\&=4\times\frac{1}{27}\div\frac{1}{27}\\&=4\ [참]\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

I 지수함수와 로그함수

0020

정답 ⑤

STEP A 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산하기

$\sqrt[3]{a}=4$에서 $a=2^6$이고

$\sqrt[4]{b}=27$에서 $b=3^{12}$이므로

$\sqrt[6]{a\sqrt{b}}=\sqrt[6]{a}\sqrt[12]{b}=\sqrt[6]{2^6}\sqrt[12]{3^{12}}=2\cdot3=6$

참고 $\sqrt[6]{a\sqrt{b}}=\sqrt[6]{a}\sqrt[12]{b}=\sqrt{\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}=\sqrt{4}\cdot\sqrt[3]{27}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt[3]{3^3}=2\cdot3=6$

내/신/연/계/ 출제문항 008

$\sqrt[3]{a\sqrt{a}\times\dfrac{a}{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[m]{a^n}$을 만족하는 서로소인 자연수 m, n에 대하여 mn값은? (단, $a>0$, $m\neq1$)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

STEP A 거듭제곱근 계산하기

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}\times\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^3}\times\sqrt[4]{a^3}}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[12]{a^3}$$
$$=\sqrt[12]{a^6}\times\sqrt[12]{a^3}$$
$$=\sqrt[12]{a^9}=\sqrt[4]{a^3}$$

따라서 $m=4$, $n=3$이므로 $m\cdot n=12$

정답 ⑤

0021

정답 ⑤

STEP A 거듭제곱근의 성질을 이용하여 진위 판단하기

ㄱ. $\mathrm{R}(6, 3)=\sqrt[6]{3}=\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\mathrm{R}(3, \sqrt{3})$ [참]

ㄴ. $\mathrm{R}(3, a)\mathrm{R}(3, b)=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}=\mathrm{R}(3, ab)$ [참]

ㄷ. $\mathrm{R}(a, a)=\mathrm{R}(3a, 64)$에서 $\sqrt[a]{a}=\sqrt[3a]{64}=\sqrt[a]{4}$

$\therefore a=4$ [참]

ㄹ. $\mathrm{R}(a, \mathrm{R}(a, b))=\sqrt[a]{\sqrt[a]{b}}=\sqrt[a^2]{b}=\mathrm{R}(a^2, b)$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0022

정답 ③

STEP A 지수법칙을 적용할 때, 지수의 범위에 따른 밑 조건 구하기

a^x	지수 x의 범위	자연수	정수	유리수	실수
	밑 a의 조건	실수	$a\neq0$	$a>0$	$a>0$

지수가 자연수일 때는 밑이 모든 실수에서 정의된다.
지수가 정수일 때는 밑이 $a\neq0$일 때, 정의된다.
지수가 유리수일 때는 밑이 $a>0$일 때, 정의된다.
지수가 실수일 때는 밑이 $a>0$일 때, 정의된다.
따라서 바르게 연결한 것은 ③이다.

0023

정답 ①

STEP A 밑을 2로 같게 한 후 지수법칙을 이용하여 계산하기

$8^{-\frac{3}{2}}\times4^{\frac{5}{4}}=(2^3)^{-\frac{3}{2}}\times(2^2)^{\frac{5}{4}}=2^{-\frac{9}{2}}\times2^{\frac{5}{2}}=2^{-\frac{9}{2}+\frac{5}{2}}=2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$

0024

정답 ⑤

STEP A 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 하기

① $2^0\times9^{\frac{1}{2}}=1\times(3^2)^{\frac{1}{2}}=3$ [참]

② $4^{\frac{3}{2}}\times4^{-1}=4^{\frac{3}{2}-1}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$ [참]

③ $4^{\frac{3}{2}}\times27^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=8\times3=24$ [참]

④ $\sqrt[3]{2}\times16^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{8}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{8}{3}}=2^3=8$ [참]

⑤ $\{(-5)^2\}^{\frac{1}{2}}=(|-5|^2)^{\frac{1}{2}}=5$ [거짓]

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

내/신/연/계/ 출제문항 009

다음 중 옳지 않은 것은?

① $16^{\frac{3}{4}}\times2^{-3}=1$ ② $4^{-\frac{3}{2}}\times8^{\frac{5}{3}}=4$ ③ $(4^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}}=2$
④ $8^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{2}}=5$ ⑤ $\{(-2)^4\}^{\frac{1}{2}}\times(3^{\frac{1}{3}})^6=-36$

STEP A 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 하기

① $16^{\frac{3}{4}}\times2^{-3}=(2^4)^{\frac{3}{4}}\times2^{-3}=2^3\times2^{-3}=8\times\dfrac{1}{8}=1$ [참]

② $4^{-\frac{3}{2}}\times8^{\frac{5}{3}}=(2^2)^{-\frac{3}{2}}\times(2^3)^{\frac{5}{3}}=2^{-3}\times2^5=2^2=4$ [참]

③ $(4^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$ [참]

④ $8^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}+(3^2)^{\frac{1}{2}}=2+3=5$ [참]

⑤ $\{(-2)^4\}^{\frac{1}{2}}\times(3^{\frac{1}{3}})^6=(|-2|^4)^{\frac{1}{2}}\times(3^{\frac{1}{3}})^6=2^2\times3^2=36$ [거짓]

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

정답 ⑤

0025

정답 ①

STEP A 3의 5제곱근 중 실수인 것 구하기

a는 3의 5제곱근 중 실수인 것이므로 $a^5=3$

STEP B 지수법칙을 이용하여 식을 정리하기

따라서 $\left(a^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\div a^{\frac{1}{4}}\times a^3=a^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}+3}=a^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+3}=a^{\frac{5}{2}}$

$$=(a^5)^{\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{3}$$

내/신/연/계/ 출제문항 010

$\sqrt{\sqrt[3]{64^2}}\times32^{-\frac{1}{5}}\div(8^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{4}}=2^k$을 만족시키는 실수 k의 값은?

① $\dfrac{4}{9}$ ② $\dfrac{9}{5}$ ③ $\dfrac{4}{5}$
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

STEP A 지수법칙을 이용하여 밑을 통일시키고 식을 간단히 하기

$$\sqrt{\sqrt[3]{64^2}}\times32^{-\frac{1}{5}}\div(8^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{4}}=(2^{12})^{\frac{1}{6}}\times(2^5)^{-\frac{1}{5}}\div(2^2)^{-\frac{1}{4}}$$
$$=2^2\times2^{-1}\div2^{-\frac{1}{2}}$$
$$=2^{2-1+\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$$

STEP B k의 값 구하기

따라서 $2^{\frac{3}{2}}=2^k$이므로 $k=\dfrac{3}{2}$

정답 ④

0026

정답 ④

STEP A 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 하기

$a=\sqrt[3]{32}\times\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2^5}\times\sqrt[3]{2\times3^3}=\sqrt[3]{2^6\times3^3}$
$=\sqrt[3]{2^6}\times\sqrt[3]{3^3}$
$=2^2\times3$

$b=8^{\frac{5}{3}}\times27^{-\frac{5}{3}}=(2^3)^{\frac{5}{3}}\times(3^3)^{-\frac{5}{3}}=2^5\times3^{-5}$

$c=\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=2^{-3}\times3^3$

STEP B abc의 값 구하기

따라서 $abc=(2^2\times3)\times(2^5\times3^{-5})\times(2^{-3}\times3^3)$
$=2^{2+5-3}\times3^{1-5+3}$
$=2^4\times3^{-1}=\frac{16}{3}$

내신연계 출제문항 011

다음 조건을 만족하는 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

$a=\left\{\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{9}}\right\}^{\frac{3}{2}}$
$b=\left\{\left(\frac{25}{81}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}\times\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$

① $\frac{4}{9}$　② $\frac{9}{5}$　③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}$

STEP A 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 하기

$a=\left\{\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{9}}\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{9}$

$b=\left\{\left(\frac{25}{81}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}\times\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{5}{9}\right)^{2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}}$
$=\left(\frac{5}{9}\right)^{1-2}=\left(\frac{5}{9}\right)^{-1}=\frac{9}{5}$

따라서 $ab=\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{5}=\frac{4}{5}$

정답 ③

0027

정답 ②

STEP A 지수법칙을 이용하여 지수를 통일시키고 식을 간단히 하기

$3\times2^{x+1}-5\times2^x=4$에서
$2^x(3\times2-5)=2^x=4$
즉 $4^x=16$ ······ ㉠
$4^y-2\times4^{y-1}=1$에서
$4^y\left(1-2\times\frac{1}{4}\right)=1$, $4^y\times\frac{1}{2}=1$
즉 $4^y=2$ ······ ㉡
따라서 ㉠÷㉡을 하면 $4^{x-y}=8$

0028

정답 ④

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 식의 값 구하기

이차방정식 $x^2+5x+1=0$의 두 근을 각각 α, β라 하면
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=1$

STEP B 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

따라서 $\frac{(2\cdot2^\alpha)^\beta}{2^\alpha\cdot4^\beta}=\frac{2^\beta\cdot2^{\alpha\beta}}{2^\alpha\cdot2^{2\beta}}=2^{\alpha\beta+\beta-2\beta-\alpha}$
$=2^{\alpha\beta-(\alpha+\beta)}$
$=2^{1-(-5)}$
$=2^6$
$=64$

내신연계 출제문항 012

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 실근을 α, β라고 할 때,
$\left(\frac{2^\beta}{2^\alpha}\right)^{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^\beta$의 값은? (단, $\alpha<\beta$)

① 30　② 45　③ 60
④ 74　⑤ 90

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 식의 값 구하기

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 각각 α, β라 하면
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$
$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4-4\cdot(-2)}=2\sqrt{3}$ ($\because$ $\beta>\alpha$)

STEP B 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

따라서 $\left(\frac{2^\beta}{2^\alpha}\right)^{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^\beta=(2^{\beta-\alpha})^{\sqrt{3}}-2^{-\alpha\beta}$
$=(2^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}-2^{-(-2)}$
$=2^6-2^2$
$=64-4=60$

정답 ③

0029

정답 ②

STEP A 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 하기

$(2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}$
$=2^{ab+ac}\times2^{bc+ba}\times2^{ca+cb}$
$=2^{ab+ac+bc+ba+ca+cb}$
$=2^{2(ab+bc+ca)}$ ······ ㉠

STEP B 곱셈법칙을 이용하여 식의 값 구하기

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로
$12=(\sqrt{10})^2-2(ab+bc+ca)$
$\therefore$ $2(ab+bc+ca)=10-12=-2$
따라서 ㉠에서 $(2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

내/신/연/계/ 출제문항 013

세 실수 a, b, c에 대하여

$$a^2+b^2+c^2=13,\ a+b+c=4$$

일 때, $(2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}$의 값은?

① 2　② 4　③ 8
④ 16　⑤ 32

STEP A　지수법칙을 이용하여 식을 간단히 하기

$(2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}$
$=2^{ab+ac}\times2^{bc+ba}\times2^{ca+cb}$
$=2^{ab+ac+bc+ba+ca+cb}$
$=2^{2(ab+bc+ca)}$　…… ㉠

STEP B　곱셈법칙을 이용하여 식의 값 구하기

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로
$13=4^2-2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ 2(ab+bc+ca)=16-13=3$
따라서 ㉠에서 $(2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}=2^3=8$

정답 ③

0030

정답 ③

STEP A　지수법칙을 이용하여 식을 정리하기

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{50}=2^{\frac{1}{1\cdot2}}\times2^{\frac{1}{2\cdot3}}\times2^{\frac{1}{3\cdot4}}\times\cdots\times2^{\frac{1}{50\cdot51}}$
$=2^{\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{50\cdot51}}$

STEP B　부분분수를 이용하여 식을 간단히 하기

$=2^{\left(1-\frac12\right)+\left(\frac12-\frac13\right)+\cdots+\left(\frac1{50}-\frac1{51}\right)}$
$=2^{1-\frac{1}{51}}$
$=2^{\frac{50}{51}}$

따라서 $p=50$, $q=51$이므로 $p+q=101$

내/신/연/계/ 출제문항 014

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{3}}=3^{f(m,\ n)}$을 만족하는 $f(m,\ n)$에 대하여

$$a=3^{f(1,\ 2)}\times3^{f(2,\ 3)}\times3^{f(3,\ 4)}\times\cdots\times3^{f(9,\ 10)}$$

일 때, $\sqrt[9]{a^{10}}$의 값은?

① $\sqrt[3]{3}$　② $\sqrt[3]{9}$　③ 3
④ $2\sqrt[3]{3}$　⑤ $3\sqrt[3]{3}$

STEP A　지수법칙을 이용하여 식을 정리하기

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{3}}=\sqrt[mn]{3}=3^{\frac{1}{mn}}$이므로
$f(m,\ n)=\dfrac{1}{mn}=\dfrac{1}{n-m}\left(\dfrac1m-\dfrac1n\right)$
$a=3^{f(1,\ 2)}\times3^{f(2,\ 3)}\times3^{f(3,\ 4)}\times\cdots\times3^{f(9,\ 10)}$
$=3^{\frac{1}{1\cdot2}}\times3^{\frac{1}{2\cdot3}}\times3^{\frac{1}{3\cdot4}}\times\cdots\times3^{\frac{1}{9\cdot10}}$
$=3^{\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{9\cdot10}}$
$=3^{\left(1-\frac12\right)+\left(\frac12-\frac13\right)+\left(\frac13-\frac14\right)+\cdots+\left(\frac19-\frac1{10}\right)}$
$=3^{1-\frac1{10}}=3^{\frac9{10}}$

STEP B　부분분수을 이용하여 $\sqrt[9]{a^{10}}$의 값 구하기

따라서 $\sqrt[9]{a^{10}}=a^{\frac{10}{9}}=\left(3^{\frac{9}{10}}\right)^{\frac{10}{9}}=3$

정답 ③

0031

정답 ③

STEP A　분모를 유리화하기

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$
$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

이므로 $a_n=2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

STEP B　지수법칙을 이용하여 k의 값 구하기

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{48}$
$=2^{\sqrt2-1}\times2^{\sqrt3-\sqrt2}\times2^{\sqrt4-\sqrt3}\times\cdots\times2^{\sqrt{49}-\sqrt{48}}$
$=2^{(\sqrt2-1)+(\sqrt3-\sqrt2)+(\sqrt4-\sqrt3)+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})}$
$=2^{\sqrt{49}-1}$
$=2^{7-1}$
$=2^6$
따라서 $k=6$

0032

정답 ⑤

STEP A　거듭제곱근의 꼴을 유리수인 지수의 꼴로 바꾸어 계산하기

$\sqrt{3\sqrt[4]{27}}=(3\times27^{\frac14})^{\frac12}=(3^{1+\frac34})^{\frac12}=(3^{\frac74})^{\frac12}=3^{\frac78}$
따라서 $p=8$, $q=7$이므로 $p+q=7+8=15$

0033

정답 ③

STEP A　거듭제곱근의 꼴을 유리수인 지수의 꼴로 바꾸어 계산하기

$\sqrt{a\sqrt[3]{a^4}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a^4}=a^{\frac12}\times a^{\frac46}=a^{\frac12+\frac23}=a^{\frac76}$
$\sqrt[3]{a\sqrt{a^k}}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a^k}=a^{\frac13}\times a^{\frac k6}=a^{\frac13+\frac k6}=a^{\frac{2+k}{6}}$
따라서 $\dfrac76=\dfrac{2+k}{6}$이므로 $k=5$

내/신/연/계/ 출제문항 015

$a>0$, $a\neq1$인 실수 a에 대하여 등식

$$\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^k}}$$

을 만족하는 실수 k의 값은?

① 3　② $\dfrac72$　③ 5
④ $\dfrac{11}{2}$　⑤ 6

STEP A　거듭제곱근의 꼴을 유리수인 지수의 꼴로 바꾸어 계산하기

$\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a\sqrt[4]{a}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[24]{a}$
$=a^{\frac12}\times a^{\frac16}\times a^{\frac1{24}}$
$=a^{\frac12+\frac16+\frac1{24}}$
$=a^{\frac{17}{24}}$
$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^k}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a^k}=a^{\frac14}\times a^{\frac{k}{12}}=a^{\frac{k+3}{12}}$
따라서 $\dfrac{17}{24}=\dfrac{k+3}{12}$이므로 $17=2k+6$　$\therefore\ k=\dfrac{11}{2}$

정답 ④

0034

정답 ①

STEP A 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내어 계산하기

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \times \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a} \times \sqrt[4]{a}\sqrt[12]{a}=a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{12}}$$
$$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}$$
$$=a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}$$
$$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$$

따라서 $k=\frac{5}{6}$

0035

정답 ⑤

STEP A 거듭제곱근의 꼴을 유리수인 지수의 꼴로 바꾸어 계산하기

$\sqrt[3]{a \times \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a^3}} \div \sqrt[6]{a \times \sqrt[3]{a^k}}=1$에서

$$\left(a \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(a \times a^{\frac{k}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}=1$$
$$\left(a^{1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(a^{1+\frac{k}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}=1$$

이때 $a^{\frac{3}{4}-\frac{3+k}{18}}=1$에서 $\frac{3}{4}-\frac{3+k}{18}=0$

따라서 $k=\frac{21}{2}$

내/신/연/계/ 출제문항 016

$a>0$, $a \neq 1$에 대하여

$$\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6=a^k$$

일 때, 상수 k의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

STEP A 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내어 계산하기

$$\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6=\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}} \times \sqrt{a^4}\right\}^6=\left\{\frac{\sqrt{a^3 \cdot a^4}}{\sqrt[6]{a^4}}\right\}^6$$
$$=\left\{\frac{\sqrt[6]{a^{21}}}{\sqrt[6]{a^4}}\right\}^6=\left\{\sqrt[6]{\frac{a^{21}}{a^4}}\right\}^6$$
$$=\left\{\sqrt[6]{a^{17}}\right\}^6$$
$$=a^{17}$$

따라서 $k=17$

정답 ③

참고
$$\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6=\left(a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+2}\right)^6=\left(a^{\frac{17}{6}}\right)^6=a^{17}$$

0036

정답 ①

STEP A 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내어 계산하기

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2b^4}} \div \sqrt[3]{a^2b^4} \times \sqrt[6]{a^8b^4}=\sqrt[6]{a^2}\sqrt[6]{b^4} \div \sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b^4} \times \sqrt[6]{a^8}\sqrt[6]{b^4}$$
$$=a^{\frac{2}{6}}b^{\frac{4}{6}} \div a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{8}{6}}b^{\frac{4}{6}}$$
$$=a^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}$$
$$=a^1b^0$$
$$=a$$

0037

정답 ③

STEP A 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내어 계산하기

$$6^{\frac{1}{2}} \times 12^{-\frac{1}{4}} \div \sqrt[4]{\sqrt{\frac{1}{9}}}=2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}} \times (2^2)^{-\frac{1}{4}}3^{-\frac{1}{4}} \div \sqrt[8]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}} \times (2^2)^{-\frac{1}{4}}3^{-\frac{1}{4}} \div 3^{-\frac{1}{4}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$
$$=2^0 \times 3^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{3}$$

0038

정답 ②

STEP A 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내어 계산하기

$$\sqrt{\sqrt{16^3}} \times 8^{-\frac{1}{3}} \div \left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{(2^4)^3} \times (2^3)^{-\frac{1}{3}} \div \left\{(2^6)^{\frac{2}{3}}\right\}^{-\frac{1}{4}}$$
$$=2^3 \times 2^{-1} \div 2^{-1}$$
$$=2^{3-1+1}$$
$$=2^3$$

따라서 $k=3$

0039

정답 ⑤

STEP A 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내어 계산하기

$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[6]{a}}}=\sqrt[18]{\frac{1}{a}}$에서

$\left(a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{k}-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{18}}$이므로

$a^{\frac{1}{12}-\frac{1}{9}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{12}}=a^{-\frac{1}{18}}$, $a^{\frac{1}{2k}-\frac{1}{9}}=a^{-\frac{1}{18}}$

따라서 $\frac{1}{2k}-\frac{1}{9}=-\frac{1}{18}$에서 $k=9$

0040

정답 ④

STEP A 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 작성하기

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{3}b=a$

STEP B 거듭제곱근의 성질을 이용하여 a, b의 값 구하기

$b=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

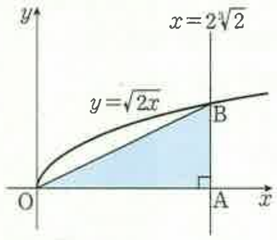
$a=\sqrt[3]{3}b=\sqrt[3]{3} \times 2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3^2}$

따라서 $ab=2\sqrt[3]{3^2} \times 2\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3^3}$ ← $\sqrt[3]{3^2 \times 3^1}$
$$=4 \times 3$$
$$=12$$

I 지수함수와 로그함수

내/신/연/계/ 출제문항 017

그림과 같이 직선 $x=2\sqrt[3]{2}$가 x축 및 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값은?
(단, O는 원점이다.)



① 4　　② $4\sqrt{2}$　　③ 8
④ $8\sqrt{2}$　　⑤ $16\sqrt{2}$

STEP A 거듭제곱근의 꼴을 유리수인 지수의 꼴로 바꾸어 계산하기

$\overline{OA}=2\sqrt[3]{2}$, $\overline{AB}=\sqrt{2\times2\sqrt[3]{2}}$이므로

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt[3]{2}\times\sqrt{2\times2\sqrt[3]{2}}$$
$$=2\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{2}$$
$$=2^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $S^2=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2=2^3=8$　　정답 ③

0041　　정답 ⑤

STEP A 유리수인 지수가 정수가 되기 위한 조건 구하기

$\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{n}}=64^{\frac{1}{n}}=(2^6)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$이고 주어진 수가 자연수가 되려면 $\frac{6}{n}$의 값이 자연수가 되어야 하므로 n은 6의 양의 약수이다.
따라서 이를 만족시키는 정수 n의 값은 1, 2, 3, 6이므로 $1+2+3+6=12$

내/신/연/계/ 출제문항 018

$\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{2}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 모든 정수 n의 합은?

① 9　　② 12　　③ 15
④ 18　　⑤ 21

STEP A 유리수인 지수가 정수가 되기 위한 조건 구하기

$\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{2}{n}}=32^{\frac{2}{n}}=(2^5)^{\frac{2}{n}}=2^{\frac{10}{n}}$이고

주어진 수가 자연수가 되려면 $\frac{10}{n}$이 자연수이어야 하므로
n은 10의 양의 약수이다.
따라서 n의 값은 1, 2, 5, 10이므로 합은 $1+2+5+10=18$　　정답 ④

0042　　정답 ②

STEP A 유리수인 지수로 나타내기

$a^3=3$, $b^4=5$, $c^6=7$에서 $a=3^{\frac{1}{3}}$, $b=5^{\frac{1}{4}}$, $c=7^{\frac{1}{6}}$이므로
$(abc)^n=\left(3^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{4}}\times7^{\frac{1}{6}}\right)^n=3^{\frac{n}{3}}\times5^{\frac{n}{4}}\times7^{\frac{n}{6}}$

STEP B $(abc)^n$가 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값 구하기

$(abc)^n$이 자연수가 되려면 자연수 n은 3, 4, 6의 공배수이어야 하므로
n의 최솟값은 12이다.

내/신/연/계/ 출제문항 019

양수 a, b, c에 대하여
$$a^2=7,\ b^5=13,\ c^6=15$$
일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 6　　② 12　　③ 18
④ 20　　⑤ 30

STEP A 유리수인 지수로 나타내기

$a^2=7$에서 $a=7^{\frac{1}{2}}$
$b^5=13$에서 $b=13^{\frac{1}{5}}$
$c^6=15$에서 $c=15^{\frac{1}{6}}$
이므로
$(abc)^n=\left(7^{\frac{1}{2}}\times13^{\frac{1}{5}}\times15^{\frac{1}{6}}\right)^n=7^{\frac{n}{2}}\times13^{\frac{n}{5}}\times15^{\frac{n}{6}}$　　…… ㉠

STEP B $(abc)^n$가 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값 구하기

n이 2, 5, 6의 공배수일 때, ㉠은 자연수가 된다.
따라서 자연수 n의 최솟값은 2, 5, 6의 최소공배수인 30　　정답 ⑤

0043　　정답 ④

STEP A 거듭제곱근의 성질을 이용하여 a, b의 값 구하기

a는 3의 실수인 5제곱근이므로 $a=\sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}$
b는 3의 양의 6제곱근이므로 $b=\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}}$

STEP B $\left(\sqrt[8]{ab^2}\right)^n$이 자연수가 되는 n의 최솟값, 최댓값 구하기

$\left(\sqrt[8]{ab^2}\right)^n=\left(3^{\frac{1}{5}}3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{n}{8}}=3^{\frac{n}{15}}$
이때 $3^{\frac{n}{15}}$의 값이 자연수가 되기 위해서는 n이 15의 배수이어야 한다.
두 자리 자연수 중 15의 배수는 15, 30, 45, 60, 75, 90
따라서 n의 최댓값은 90, 최솟값은 15이므로 합은 $90+15=105$

내/신/연/계/ 출제문항 020

두 양수 a, b가 $a^4=3$, $b^6=9$를 만족시킬 때, 100 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[10]{ab^3}\right)^n$의 값이 자연수가 되는 n의 개수는?

① 8　　② 9　　③ 10
④ 11　　⑤ 12

STEP A 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내어 식을 간단히 하기

$a^4=3$, $b^6=9$에서 $a=3^{\frac{1}{4}}$, $b=9^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$$\left(\sqrt[10]{ab^3}\right)^n=\left(a^{\frac{1}{10}}\times b^{\frac{3}{10}}\right)^n=\left\{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{10}}\times\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{10}}\right\}^n$$
$$=\left(3^{\frac{1}{40}}\times3^{\frac{1}{10}}\right)^n$$
$$=\left(3^{\frac{1}{40}+\frac{1}{10}}\right)^n$$
$$=3^{\frac{n}{8}}$$

STEP B 주어진 식에서 n의 조건 구하기

이때 $3^{\frac{n}{8}}$의 값이 자연수가 되기 위해서는 n이 8의 배수이어야 한다.
따라서 100 이하의 자연수 중 8의 배수는 8, 16, 24, 32, …, 96이므로
개수는 12이다.　　정답 ⑤

0044

정답 ③

STEP A 지수법칙을 이용하여 두 수를 간단히 정리하고 각각 자연수가 될 조건 구하기

$(\sqrt{3^n})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{n}{4}}$, $\sqrt[n]{3^{100}}=3^{\frac{100}{n}}$

$3^{\frac{n}{4}}$, $3^{\frac{100}{n}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 $n(n\geq 2)$은

4의 배수이고 100의 양의 약수이다. ← 100의 양의 약수 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

STEP B 4의 배수이고 100의 양의 약수인 자연수 n 구하기

따라서 가능한 n의 값은 4, 20, 100이므로 n의 값의 합은 $4+20+100=124$

0045

정답 ②

STEP A 어떤 자연수가 $3^{\frac{5}{6}}$의 n제곱이면 $(3^{\frac{5}{6}})^n$임을 이용하기

$(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$이므로 $3^{\frac{5}{6}}$을 어떤 자연수 N의 n제곱근이라 하면

$\mathrm{N}=(3^{\frac{5}{6}})^n=3^{\frac{5n}{6}}$

STEP B $\frac{5}{6}n$이 정수이기 위한 자연수 n의 개수 구하기

이때 N이 자연수이려면 $\frac{5}{6}n$은 0 이상의 정수이어야 한다.

즉 $2\leq n\leq 100$에서 n은 6의 배수이어야 하므로

$n=6, 12, \cdots, 96$

따라서 n의 개수는 16

참고

$\sqrt[n]{\square}=\square^{\frac{1}{n}}$ (단, □은 어떤 자연수)

$3^{\frac{5}{6}}=(3^5)^{\frac{1}{6}}=(3^{10})^{\frac{1}{12}}=(3^{15})^{\frac{1}{18}}=\cdots=(3^{80})^{\frac{1}{96}}$

이때 $3^{\frac{5}{6}}=(3^5)^{\frac{1}{6}}=(3^{10})^{\frac{1}{12}}=(3^{15})^{\frac{1}{18}}=\cdots=(3^{80})^{\frac{1}{96}}$이므로

$(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$은 3^5의 6제곱근, 3^{10}의 12제곱근, 3^{15}의 18제곱근 …,

3^{80}의 96제곱근과 같다.

따라서 구하는 n은 6, 12, 18, …, 96이므로 16

내신연계 출제문항 021

$2\leq n\leq 100$인 자연수 n에 대하여 $\sqrt[6]{3^5}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 자연수 n의 개수는?

① 14　　② 16　　③ 18
④ 20　　⑤ 22

STEP A $\sqrt[6]{3^5}$을 어떤 자연수의 n제곱근 꼴로 나타내기

$\sqrt[6]{3^5}$이 어떤 자연수 x의 n제곱근이라 하면

$\sqrt[n]{x}=\sqrt[6]{3^5}$이므로 $x^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{5}{6}}$

즉 $x=3^{\frac{5}{6}n}$

STEP B $\frac{5}{6}n$이 정수이기 위한 자연수 n의 개수 구하기

이때 $x=3^{\frac{5}{6}n}$의 값이 자연수가 되기 위해서는 n이 6의 배수이어야 한다.

따라서 $2\leq n\leq 100$ 사이의 자연수 중 6의 배수는 6, 12, 18, …, 96이므로 개수는 16개이다.

정답 ②

0046

정답 ①

STEP A $\sqrt{\frac{2^a\times 5^b}{2}}$이 자연수인 a, b의 값 구하기

(ⅰ) $\sqrt{\frac{2^a\times 5^b}{2}}=2^{\frac{a-1}{2}}\times 5^{\frac{b}{2}}$이 자연수이므로

$a-1=2m$, $a=2m+1$(m은 음이 아닌 정수)

$\therefore a=1, 3, 5, \cdots$

$b=2n$(n은 자연수)

$\therefore b=2, 4, 6, \cdots$

STEP B $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}}$이 유리수인 a, b의 값 구하기

(ⅱ) $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}}=\frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$이 유리수이므로

$a+1=3k$, $a=3k-1$(k는 자연수)

$\therefore a=2, 5, 8, \cdots$

$b=3l$(l은 자연수)

$\therefore b=3, 6, 9, \cdots$

STEP C 두 조건을 동시에 만족하는 a, b의 값 구하기

(ⅰ), (ⅱ)을 동시에 만족하는 a의 최솟값은 5, b의 최솟값은 6

따라서 $a+b$의 최솟값은 $5+6=11$

내신연계 출제문항 022

두 수 $\sqrt{\frac{2^a\cdot 5^b}{2}}$와 $\sqrt[3]{\frac{2^a\cdot 5^b}{5}}$이 모두 자연수일 때, $a+b$의 최솟값은?
(단, a, b는 자연수이다.)

① 2　　② 3　　③ 5
④ 7　　⑤ 9

STEP A 지수법칙을 이용하여 두 수를 간단히 정리하기

$\sqrt{\frac{2^a\cdot 5^b}{2}}=2^{\frac{a-1}{2}}\cdot 5^{\frac{b}{2}}$가 자연수이므로

$\frac{a-1}{2}$, $\frac{b}{2}$가 음이 아닌 정수가 되어야 한다.

즉 a는 홀수, b는 2의 배수이다.

$\sqrt[3]{\frac{2^a\cdot 5^b}{5}}=2^{\frac{a}{3}}\cdot 5^{\frac{b-1}{3}}$이 자연수이므로

$\frac{a}{3}$, $\frac{b-1}{3}$이 음이 아닌 정수가 되어야 한다.

즉 a는 3의 배수, 즉 $b-1$은 3의 배수이다.

STEP B 각각 자연수가 될 조건 구하기

(ⅰ) $\frac{a}{3}$가 음이 아닌 정수가 되려면 a는 3의 배수이고

$\frac{a-1}{2}$이 음이 아닌 정수가 되려면 a는 홀수이어야 한다.

즉 a는 3, 9, 15, 21, …이므로 가장 작은 a는 3

(ⅱ) $\frac{b}{2}$가 음이 아닌 정수가 되려면 b는 2의 배수이고

$\frac{b-1}{2}$이 음이 아닌 정수가 되려면 $b-1$은 3의 배수

즉 $b=3k+1$(k는 자연수)이어야 한다.

즉 b는 4, 10, 16, 22, …이므로 가장 작은 b는 4

따라서 $a+b$의 최솟값은 $3+4=7$

정답 ④

0047

정답 ②

STEP A 거듭제곱근을 유리수 지수로 나타낸 후 지수의 분모를 통분하여 지수를 같게 만든 다음 비교하기

$\sqrt{\sqrt[3]{10}}=\sqrt[6]{10}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\sqrt[3]{28}}=\sqrt[6]{28}$을 유리수 지수로 나타내면 6, 2, 6의 최소공배수가 6이므로 세 수의 지수를 $●^{\frac{1}{6}}$꼴로 변형한다.

$A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$

$B=\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=125^{\frac{1}{6}}$

$C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}=28^{\frac{1}{6}}$

이때 $10<28<125$이므로 $\sqrt{\sqrt[3]{10}}<\sqrt{\sqrt[3]{28}}<\sqrt{5}$

따라서 세 수 A, B, C의 대소 관계는 $A<C<B$

다른풀이 세 수 A, B, C를 $\sqrt[6]{a}$꼴로 통일하여 풀이하기

$\sqrt{\sqrt[3]{10}}=\sqrt[6]{10}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\sqrt[3]{28}}=\sqrt[6]{28}$에서 6, 2, 6의 최소공배수가 6이므로

주어진 세 수를 $\sqrt[6]{●}$꼴로 변형하면

$A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}$

$B=\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$

$C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}=\sqrt[6]{28}$

이때 $10<28<125$이므로 $\sqrt{\sqrt[3]{10}}<\sqrt{\sqrt[3]{28}}<\sqrt{5}$ $\quad\therefore A<C<B$

다른풀이 A^6, B^6, C^6꼴로 통일하여 풀이하기

$A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$, $B=\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}=\sqrt[6]{28}=28^{\frac{1}{6}}$

이 세 수를 각각 6제곱하면

$A^6=10$, $B^6=5^3=125$, $C^6=28$이므로 $A^6<C^6<B^6$

따라서 세 수 A, B, C의 대소 관계는 $A<C<B$

0048

정답 ④

STEP A 세 수를 모두 $\sqrt[12]{a}$꼴로 변형하여 비교하기

세 수 A, B, C를 각각 $\sqrt[12]{a}$꼴로 변형한다. ←3, 6, 4의 최소공배수가 12이다.

$A=\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$

$B=\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}=\sqrt[12]{5^2}=\sqrt[12]{25}$

$C=\sqrt{\sqrt{6}}=\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{6^3}=\sqrt[12]{216}$

이때 $25<81<216$이므로 $\sqrt[12]{25}<\sqrt[12]{81}<\sqrt[12]{216}$

따라서 $B<A<C$

다른풀이 A^{12}, B^{12}, C^{12} 구하기

$A^{12}=(\sqrt[3]{3})^{12}=3^4=81$

$B^{12}=(\sqrt{\sqrt[3]{5}})^{12}=(\sqrt[6]{5})^{12}=5^2=25$

$C^{12}=(\sqrt{\sqrt{6}})^{12}=(\sqrt[4]{6})^{12}=6^3=216$이므로 $B<A<C$

내/신/연/계/ 출제문항 023

$A=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$, $B=\sqrt{\sqrt[3]{9}}$, $C=\sqrt[4]{5}$ 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

STEP A 세 수를 모두 $\sqrt[12]{a}$꼴로 변형하여 비교하기

$A=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{12}}=\sqrt[6]{12}=\sqrt[12]{12^2}=\sqrt[12]{144}$

$B=\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[6]{9}=\sqrt[12]{9^2}=\sqrt[12]{81}$

$C=\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$

이때 $81<125<144$이므로 $\sqrt[12]{81}<\sqrt[12]{125}<\sqrt[12]{144}$

따라서 $B<C<A$

다른풀이 A^6, B^6, C^6 구하기

$A=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$, $B=\sqrt{\sqrt[3]{9}}$, $C=\sqrt[4]{5}$의 각각을 6제곱하면

$A^6=(\sqrt[3]{2\sqrt{3}})^6=\{(\sqrt[3]{2\sqrt{3}})^3\}^2=(2\sqrt{3})^2=12$

$B^6=(\sqrt{\sqrt[3]{9}})^6=\{(\sqrt{\sqrt[3]{9}})^2\}^3=(\sqrt[3]{9})^3=9$

$C^6=(\sqrt[4]{5})^6=(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$

따라서 $B^6<C^6<A^6$에서 $B<C<A$

정답 ④

0049

정답 ①

STEP A 주어진 조건을 만족하는 a, b, c의 값 구하기

5의 네제곱근 중 양의 실수인 것은 $\sqrt[4]{5}$이므로 $a=\sqrt[4]{5}$

k의 여섯제곱근 중 양의 실수인 것은 $\sqrt[6]{k}$이므로 $b=\sqrt[6]{k}$

9의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{9}$이므로 $c=\sqrt[3]{9}$

STEP B 세 수를 모두 $\sqrt[12]{a}$꼴로 변형하여 비교하기

세 수를 각각 $\sqrt[12]{a}$꼴로 변형한다. ←3, 4, 6의 최소공배수가 12이다.

$a=\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$

$b=\sqrt[6]{k}=\sqrt[12]{k^2}$

$c=\sqrt[3]{9}=\sqrt[12]{9^4}$

이때 $a<b<c$이므로 $5^3<k^2<9^4$

즉 $125<k^2<(9^2)^2$

따라서 $11^2=121<125<144=12^2$이고 $k^2<81^2$이므로

조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는 12, 13, …, 80의 69개이다.

내/신/연/계/ 출제문항 024

세 실수 A, B, C가 다음 조건을 만족한다.

> $A=(3^{\frac{2}{3}}$의 양의 제곱근$)$
> $B=(2^{\frac{3}{2}}$의 세제곱근$)$
> $C=(16$의 양의 네제곱근$)$

이때 세 실수 A, B, C의 대소 관계는?

① $A<B<C$ ② $B<A<C$ ③ $C<B<A$
④ $C<A<B$ ⑤ $A<C<B$

STEP A 거듭제곱근을 유리수 지수로 나타낸 후 지수의 분모를 통분하여 지수를 같게 만든 다음 비교하기

$A=\sqrt{3^{\frac{2}{3}}}$, $B=\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}$, $C=\sqrt[4]{16}$을 유리수 지수로 나타낸 후

3, 2의 최소공배수가 6이므로 세 수의 지수를 $●^{\frac{1}{6}}$꼴로 변형한다.

$A=\sqrt{3^{\frac{2}{3}}}=(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=(3^2)^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$

$B=\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$

$C=\sqrt[4]{16}=16^{\frac{1}{4}}=2=2^{\frac{6}{6}}=(2^6)^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}$

이때 $8<9<64$, $\frac{1}{6}>0$이므로 $B<A<C$

다른풀이 A, B, C를 모두 6제곱하여 풀이하기

$A^6=(3^{\frac{1}{3}})^6=3^2=9$

$B^6=(2^{\frac{1}{2}})^6=2^3=8$

$C^6=2^6=64$

따라서 $B^6<A^6<C^6$이므로 $B<A<C$

정답 ②

0050

정답 ③

STEP A 곱셈공식을 이용하여 주어진 식 계산하기

$$\begin{aligned}(10^{\frac{1}{8}}-1)(10^{\frac{1}{8}}+1)(10^{\frac{1}{4}}+1)(10^{\frac{1}{2}}+1)&=\{(10^{\frac{1}{8}})^2-1\}(10^{\frac{1}{4}}+1)(10^{\frac{1}{2}}+1)\\&=(10^{\frac{1}{4}}-1)(10^{\frac{1}{4}}+1)(10^{\frac{1}{2}}+1)\\&=\{(10^{\frac{1}{4}})^2-1\}(10^{\frac{1}{2}}+1)\\&=(10^{\frac{1}{2}}-1)(10^{\frac{1}{2}}+1)\\&=(10^{\frac{1}{2}})^2-1\\&=10-1=9\end{aligned}$$

내/신/연/계/ 출제문항 025

$(3^{\frac{1}{2}}+1)(3^{\frac{1}{4}}+1)(81^{\frac{1}{32}}+1)(81^{\frac{1}{32}}-1)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 8

STEP A 곱셈공식을 이용하여 주어진 식 계산하기

$$\begin{aligned}&(3^{\frac{1}{2}}+1)(3^{\frac{1}{4}}+1)(81^{\frac{1}{32}}+1)(81^{\frac{1}{32}}-1)\\&=(3^{\frac{1}{2}}+1)(3^{\frac{1}{4}}+1)\{(3^4)^{\frac{1}{32}}+1\}\{(3^4)^{\frac{1}{32}}-1\}\\&=(3^{\frac{1}{2}}+1)(3^{\frac{1}{4}}+1)(3^{\frac{1}{8}}+1)(3^{\frac{1}{8}}-1)=(3^{\frac{1}{2}}+1)(3^{\frac{1}{4}}+1)\{(3^{\frac{1}{8}})^2-1\}\\&=(3^{\frac{1}{2}}+1)(3^{\frac{1}{4}}+1)(3^{\frac{1}{4}}-1)=(3^{\frac{1}{2}}+1)\{(3^{\frac{1}{4}})^2-1\}\\&=(3^{\frac{1}{2}}+1)(3^{\frac{1}{2}}-1)\\&=3-1=2\end{aligned}$$

정답 ①

0051

정답 ②

STEP A 곱셈공식을 이용하여 주어진 식 계산하기

$$\frac{(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt[4]{3}-1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{5-2}{3-1}=\frac{3}{2}$$

0052

정답 ③

STEP A 곱셈공식 $(1-a^n)(1+a^n)=1-a^{2n}$을 이용하여 주어진 식 계산하기

$$\frac{2}{1-a^{\frac{1}{8}}}+\frac{2}{1+a^{\frac{1}{8}}}=\frac{2(1+a^{\frac{1}{8}}+1-a^{\frac{1}{8}})}{(1-a^{\frac{1}{8}})(1+a^{\frac{1}{8}})}=\frac{4}{1-a^{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{4}{1-a^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}}=\frac{4(1+a^{\frac{1}{4}}+1-a^{\frac{1}{4}})}{(1-a^{\frac{1}{4}})(1+a^{\frac{1}{4}})}=\frac{8}{1-a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{8}{1-a^{\frac{1}{2}}}+\frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}}=\frac{8(1+a^{\frac{1}{2}}+1-a^{\frac{1}{2}})}{(1-a^{\frac{1}{2}})(1+a^{\frac{1}{2}})}=\frac{16}{1-a}$$

따라서 주어진 식은 $\dfrac{16}{1-a}+\dfrac{16}{1+a}=\dfrac{32}{1-a^2}=\dfrac{32}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=64$

내/신/연/계/ 출제문항 026

$a=\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{1}{1-a^{\frac{1}{8}}}+\dfrac{1}{1+a^{\frac{1}{8}}}+\dfrac{2}{1+a^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{4}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{8}{1+a}$의 값은?

① -8 ② -4 ③ -2
④ 2 ⑤ 4

STEP A 곱셈공식 $(1-a^n)(1+a^n)=1-a^{2n}$을 이용하여 주어진 식 계산하기

$$\frac{1}{1-a^{\frac{1}{8}}}+\frac{1}{1+a^{\frac{1}{8}}}=\frac{1+a^{\frac{1}{8}}+1-a^{\frac{1}{8}}}{(1-a^{\frac{1}{8}})(1+a^{\frac{1}{8}})}=\frac{2}{1-a^{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{2}{1-a^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+a^{\frac{1}{4}}}=\frac{2(1+a^{\frac{1}{4}}+1-a^{\frac{1}{4}})}{(1-a^{\frac{1}{4}})(1+a^{\frac{1}{4}})}=\frac{4}{1-a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{4}{1-a^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+a^{\frac{1}{2}}}=\frac{4(1+a^{\frac{1}{2}}+1-a^{\frac{1}{2}})}{(1-a^{\frac{1}{2}})(1+a^{\frac{1}{2}})}=\frac{8}{1-a}$$

따라서 주어진 식은

$$\frac{8}{1-a}+\frac{8}{1+a}=\frac{8(1+a+1-a)}{(1-a)(1+a)}=\frac{16}{1-a^2}=\frac{16}{1-3}=-8$$

정답 ①

0053

정답 ④

STEP A 곱셈공식을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$x=a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, $y=b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$에서

$$\begin{aligned}x+y&=(a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})+(b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})\\&=(a^{\frac{1}{3}})^3+3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2+(b^{\frac{1}{3}})^3\\&=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x-y&=(a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})-(b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})\\&=(a^{\frac{1}{3}})^3-3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2-(b^{\frac{1}{3}})^3\\&=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^3\end{aligned}$$

STEP B $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=5$을 이용하여 주어진 값 구하기

$$\begin{aligned}(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}&=\{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3\}^{\frac{2}{3}}+\{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^3\}^{\frac{2}{3}}\\&=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^2\\&=2(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})\\&=2\cdot5=10\end{aligned}$$

내/신/연/계/ 출제문항 027

$(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{2}{3}})^3+(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{2}{3}})^3$을 간단히 하면 ?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

STEP A 곱셈공식을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$2^{\frac{1}{3}}=a$, $2^{-\frac{2}{3}}=b$로 놓으면

$$\begin{aligned}&(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{2}{3}})^3+(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{2}{3}})^3\\&=(a+b)^3+(a-b)^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\&=2(a^3+3ab^2)\\&=2\{(2^{\frac{1}{3}})^3+3\cdot2^{\frac{1}{3}}\cdot(2^{-\frac{2}{3}})^2\}\\&=2(2+3\cdot2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{4}{3}})\\&=2(2+3\cdot2^{-1})\\&=2\left(2+\frac{3}{2}\right)\\&=7\end{aligned}$$

정답 ③

0054

정답 ④

STEP A $\frac{2}{2^{-n}+1}+\frac{2}{2^{n}+1}$의 값 구하기

$\frac{2}{2^{-n}+1}=\frac{2\cdot 2^n}{(2^{-n}+1)2^n}=\frac{2^{n+1}}{1+2^n}$이므로

$\frac{2}{2^{-n}+1}+\frac{2}{2^{n}+1}=\frac{2^{n+1}}{1+2^n}+\frac{2}{2^n+1}=\frac{2(2^n+1)}{2^n+1}=2$

STEP B $\frac{2}{2^{-n}+1}+\frac{2}{2^{n}+1}=2$임을 이용하여 주어진 식 계산하기

즉 $\frac{2}{2^{-10}+1}+\frac{2}{2^{10}+1}=\frac{2^{11}}{1+2^{10}}+\frac{2}{2^{10}+1}=\frac{2(1+2^{10})}{1+2^{10}}=2$

마찬가지로

$\frac{2}{2^{-9}+1}+\frac{2}{2^{9}+1}=\frac{2^{10}}{1+2^{9}}+\frac{2}{2^{9}+1}=2$

$\vdots$

$\frac{2}{2^{-1}+1}+\frac{2}{2^{1}+1}=\frac{2^{2}}{1+2^{1}}+\frac{2}{2^{1}+1}=2$

한편 $\frac{2}{2^0+1}=\frac{2}{1+1}=1$

따라서 구하는 식은 $2+2+\cdots+2+1=2\times 10+1=21$

내/신/연/계/ 출제문항 028

다음 식의 값은?

$$\frac{1}{2^{-5}+1}+\frac{1}{2^{-4}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{0}+1}+\frac{1}{2^{1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{5}+1}$$

① 4　② $\frac{9}{4}$　③ 5

④ $\frac{11}{2}$　⑤ 3

STEP A 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{2^{-n}+1}+\frac{1}{2^{n}+1}$의 값 구하기

자연수 n에 대하여

$\frac{1}{2^{-n}+1}=\frac{1}{\frac{1}{2^n}+1}=\frac{2^n}{2^n+1}$이므로

$\frac{1}{2^{-n}+1}+\frac{1}{2^{n}+1}=\frac{2^n}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+1}=1$

STEP B $\frac{1}{2^{-n}+1}+\frac{1}{2^{n}+1}=1$임을 이용하여 주어진 식 계산하기

따라서 구하는 값은

$\frac{1}{2^{-5}+1}+\frac{1}{2^{5}+1}+\frac{1}{2^{-4}+1}+\frac{1}{2^{4}+1}\cdots+\frac{1}{2^{0}+1}$

$=1+1+1+1+1+\frac{1}{2^0+1}$

$=5+\frac{1}{2}$

$=\frac{11}{2}$

정답 ④

0055

정답 ④

STEP A 분모, 분자에 2^6을 곱하여 간단히 하기

분모, 분자에 2^6을 곱하면

$\frac{2^6(2+2^2+2^3+2^4+2^5)}{2^6(2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-5})}$

$=\frac{2^6(2+2^2+2^3+2^4+2^5)}{2^5+2^4+2^3+2^2+2}$

$=2^6$

따라서 $n=6$

내/신/연/계/ 출제문항 029

$a>0$, $a\neq 1$일 때,

$$\frac{a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}}{a^{-1}+a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}+a^{-9}}=a^n$$

을 만족하는 자연수 n의 값은?

① 7　② 9　③ 11

④ 13　⑤ 15

STEP A 분모, 분자에 a^{11}을 곱하여 간단히 하기

분모, 분자에 각각 a^{11}을 곱하면

$\frac{a^{11}(a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10})}{a^{11}(a^{-1}+a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}+a^{-9})}$

$=\frac{a^{11}(a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10})}{a^{10}+a^8+a^6+a^4+a^2}$

$=a^{11}$

따라서 $n=11$

정답 ③

0056

정답 ②

STEP A 분모를 a^{-15}, 분자를 a^5으로 묶어 주어진 식 간단히 하기

$\sqrt{\frac{a^5+a^7+a^9+a^{11}}{a^{-9}+a^{-11}+a^{-13}+a^{-15}}}=\sqrt{\frac{a^5(1+a^2+a^4+a^6)}{a^{-15}(a^6+a^4+a^2+1)}}$

$=\sqrt{a^{20}}=a^{10}$

0057

정답 ⑤

STEP A 주어진 식의 분모, 분자에 a^5을 곱하여 a^6의 값 구하기

$\frac{a+a^5}{a^{-1}+a^{-5}}=3$의 좌변의 분모, 분자에 a^5을 곱하면

$\frac{a^6+a^{10}}{a^4+1}=\frac{a^6(1+a^4)}{a^4+1}=a^6=3$

STEP B 주어진 식의 분모, 분자에 a^6을 곱하여 계산하기

$\frac{a^2+a^4+a^6}{a^{-2}+a^{-4}+a^{-6}}$의 분모, 분자에 a^6을 곱하면

$\frac{(a^2+a^4+a^6)a^6}{(a^{-2}+a^{-4}+a^{-6})a^6}=\frac{a^8+a^{10}+a^{12}}{a^4+a^2+1}=\frac{a^8(1+a^2+a^4)}{a^4+a^2+1}$

$=a^8$

$=(a^6)^{\frac{4}{3}}$

$=\sqrt[3]{3^4}$

0058

정답 ⑤

STEP A 곱셈공식 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용하여 $a+a^{-1}$의 값 구하기

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$a-2+a^{-1}=9$

$\therefore a+a^{-1}=11$

STEP B 곱셈공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 이용하여 a^2+a^{-2}의 값 구하기

따라서 $(a+a^{-1})^2=a^2+2+a^{-2}=121$이므로 $a^2+a^{-2}=119$

내신연계 출제문항 030

양수 x에 대하여 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, $x+x^{-1}+x^2+x^{-2}$의 값은?

① 32 ② 37 ③ 42
④ 47 ⑤ 54

STEP A 곱셈공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 이용하여 $x+x^{-1}$의 값 구하기

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}$이므로 $3^2=x+2+x^{-1}$

$\therefore\ x+x^{-1}=7$

STEP B 곱셈공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 이용하여 x^2+x^{-2}의 값 구하기

$(x+x^{-1})^2=x^2+2\cdot x\cdot x^{-1}+x^{-2}$이므로 $7^2=x^2+2+x^{-2}$

$\therefore\ x^2+x^{-2}=47$

따라서 $x+x^{-1}+x^2+x^{-2}=7+47=54$ 정답 ⑤

0059

정답 ②

STEP A 점 $(p,\ q)$를 곡선에 대입하여 pq의 값 구하기

점 $(p,\ q)$가 곡선 $y=\frac{9}{x}(x>0)$ 위의 점이므로

$q=\frac{9}{p}$, 즉 $pq=9$ …… ㉠

STEP B $p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$의 양변을 제곱하여 $p+q$의 값 구하기

$p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$의 양변을 제곱하여

$\left(p^{\frac{1}{2}}\right)^2+2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}+\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^2=12$

$p+2(pq)^{\frac{1}{2}}+q=12$

$p+2(9)^{\frac{1}{2}}+q=12$

$p+6+q=12$

$\therefore\ p+q=6$ …… ㉡

STEP C 곱셈공식의 변형을 이용하여 구하기

따라서 ㉠, ㉡에서 $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=6^2-2\cdot 9=18$

내신연계 출제문항 031

좌표평면에서 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 직선 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 등식 $4^a-2^b=6$을 만족할 때, 4^a+2^b의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

STEP A 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 직선 구하기

두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

$\therefore\ y=-2x+4$

이때 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=-2x+4$ 위의 점이므로 $b=-2a+4$

$\therefore\ 2a+b=4$

STEP B 곱셈정리를 이용하여 값 구하기

$$\begin{aligned}(4^a+2^b)^2&=(4^a-2^b)^2+4\cdot 4^a 2^b\\&=6^2+4\cdot 2^{2a+b}\\&=6^2+4\cdot 2^4\\&=36+64\\&=100\end{aligned}$$

따라서 $4^a+2^b>0$이므로 $4^a+2^b=\sqrt{100}=10$ 정답 ③

0060

정답 ③

STEP A 곱셈공식 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$를 이용하여 식의 값 구하기

$(3^x+3^{-x})^2=3^{2x}+2+3^{-2x}=9^x+9^{-x}+2=49$

$\therefore\ 3^x+3^{-x}=7$

$\left(3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}}\right)^2=3^x+2+3^{-x}=7+2=9$

$\therefore\ 3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}}=3$

$\left(3^{\frac{x}{4}}+3^{-\frac{x}{4}}\right)^2=3^{\frac{x}{2}}+2+3^{-\frac{x}{2}}=3+2=5$

$\therefore\ 3^{\frac{x}{4}}+3^{-\frac{x}{4}}=\sqrt{5}$

0061

정답 ①

STEP A 곱셈공식 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$을 이용하여 식의 값 구하기

$x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$$\begin{aligned}x^3&=\left(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}\right)^3=2+2^{-1}+3\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}\right)\\&=3x+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

즉 $x^3=\frac{5}{2}+3x$에서 $x^3-3x=\frac{5}{2}$

따라서 $2x^3-6x-4=2(x^3-3x)-4=2\cdot\frac{5}{2}-4=1$

내신연계 출제문항 032

$x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$일 때, $2x^3+6x+1$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

STEP A 곱셈공식 $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$을 이용하여 $x+x^{-1}$의 값 구하기

$x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$$\begin{aligned}x^3&=\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)^3=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)\\&=2-2^{-1}-3x=\frac{3}{2}-3x\end{aligned}$$

이므로 $x^3+3x=\frac{3}{2}$

따라서 $2x^3+6x+1=2(x^3+3x)+1=2\times\frac{3}{2}+1=4$ 정답 ③

0062

정답 ②

STEP A 곱셈공식 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$을 이용하여 식의 값 구하기

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면 $x+2+x^{-1}=9$

$\therefore\ x+x^{-1}=7$

참고 $x+x^{-1}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2=9-2=7$

STEP B 곱셈공식 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$을 이용하여 식의 값 구하기

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^3=x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)+x^{-\frac{3}{2}}=3^3$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=3^3-3\cdot 3=27-9=18$

참고 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^3-3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)=3^3-3\cdot 3=18$

따라서 $\frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+10}{x+x^{-1}}=\frac{18+10}{7}=4$

내/신/연/계/ 출제문항 033

$3^a+3^{-a}=4$일 때, $\dfrac{27^a+27^{-a}}{9^a+9^{-a}}$의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{25}{7}$ ② $\frac{26}{7}$ ③ $\frac{31}{7}$
④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{31}{7}$

STEP A 곱셈공식을 이용하여 주어진 식 변형하기

$$\frac{27^a+27^{-a}}{9^a+9^{-a}}=\frac{3^{3a}+3^{-3a}}{3^{2a}+3^{-2a}}$$
$$=\frac{(3^a+3^{-a})^3-3\cdot3^a\cdot3^{-a}(3^a+3^{-a})}{(3^a+3^{-a})^2-2\cdot3^a\cdot3^{-a}}$$
$$=\frac{4^3-3\cdot4}{4^2-2}$$
$$=\frac{52}{14}=\frac{26}{7}$$

정답 ②

0063

정답 ④

STEP A 곱셈공식 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용하여 식의 값 구하기

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 제곱하면

$a-2+a^{-1}=4$

$\therefore a+a^{-1}=6$

STEP B 곱셈공식 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$을 이용하여 식의 값 구하기

$a+a^{-1}=6$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=36$

$\therefore a^2+a^{-2}=34$

따라서 $\dfrac{a^2+a^{-2}-7}{a+a^{-1}-3}=\dfrac{34-7}{6-3}=\dfrac{27}{3}=9$

내/신/연/계/ 출제문항 034

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}-1}{a+a^{-1}+1}$의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{33}{10}$ ② $\frac{35}{12}$ ③ $\frac{34}{11}$
④ $\frac{36}{11}$ ⑤ $\frac{38}{13}$

STEP A 곱셈공식 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$을 이용하여 식의 값 구하기

$a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+2$

$=9+2=11$

STEP B 곱셈공식 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하여 식의 값 구하기

$a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a+1+a^{-1})$

$=3(11+1)=36$

따라서 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}-1}{a+a^{-1}+1}=\dfrac{36-1}{11+1}=\dfrac{35}{12}$

정답 ②

0064

정답 ⑤

STEP A 주어진 식의 양변을 5^x로 나누어 5^x+5^{-x}의 값 구하기

$5^{2x}-5^{x+1}=-1$의 양변을 5^x으로 나누면

$5^x-5=-5^{-x}$

$\therefore 5^x+5^{-x}=5$

STEP B 곱셈공식을 이용하여 $5^{3x}+5^{-3x}$, $5^{2x}+5^{-2x}$의 값 구하기

$5^{3x}+5^{-3x}=(5^x+5^{-x})^3-3\cdot5^x\cdot5^{-x}(5^x+5^{-x})$

$=5^3-3\cdot5=110$

$5^{2x}+5^{-2x}=(5^x+5^{-x})^2-2\cdot5^x\cdot5^{-x}$

$=5^2-2=23$

STEP C 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\dfrac{5^{3x}+5^{-3x}-5}{5^{2x}+5^{-2x}-2}=\dfrac{110-5}{23-2}=\dfrac{105}{21}=5$

내/신/연/계/ 출제문항 035

$9^x-3^{x+1}=-1$일 때, $\dfrac{27^x+27^{-x}+2}{9^x+9^{-x}+3}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

STEP A 주어진 식의 양변을 3^x로 나누어 3^x+3^{-x}의 값 구하기

$9^x-3^{x+1}+1=0$에서 $3^{2x}-3\cdot3^x+1=0$

양변을 3^x으로 나누면

$3^x-3+\dfrac{1}{3^x}=0$이므로 $3^x+3^{-x}=3$

STEP B 곱셈공식을 이용하여 $3^{3x}+3^{-3x}$, $3^{2x}+3^{-2x}$의 값 구하기

$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2\cdot3^x\cdot3^{-x}$

$=3^2-2=7$

$27^x+27^{-x}=3^{3x}+3^{-3x}$

$=(3^x+3^{-x})^3-3\cdot3^x\cdot3^{-x}(3^x+3^{-x})$

$=3^3-3\cdot3=18$

따라서 $\dfrac{27^x+27^{-x}+2}{9^x+9^{-x}+3}=\dfrac{18+2}{7+3}=\dfrac{20}{10}=2$

정답 ①

0065

정답 ⑤

STEP A 주어진 식의 양변을 제곱하여 x^2의 값 구하기

$x=3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}$의 양변을 제곱하면

$x^2=(3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}})^2=3+3^{-1}-2$

STEP B x^2의 값을 주어진 식에 대입하여 식 간단히 하기

$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{3+3^{-1}+2}$

$=\sqrt{(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})^2}$

$=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}$

따라서 $\sqrt{x^2+4}+x=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}=2\cdot3^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$

0066

정답 ③

STEP A 주어진 식의 양변을 제곱하여 x^2-4의 값 구하기

$x=2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}$의 양변을 제곱하면

$x^2=\left(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}\right)^2=2^{\frac{1}{2}}+2+2^{-\frac{1}{2}}$이므로

$x^2-4=2^{\frac{1}{2}}-2+2^{-\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\right)^2$

STEP B x^2-4의 값을 주어진 식에 대입하여 간단히 하기

그러므로 $\sqrt{x^2-4}=\left|2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\right|=2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}$

따라서 $\sqrt{x^2-4}+x=2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}=2\cdot 2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$이므로 $k=\frac{5}{4}$

0067

정답 ②

STEP A x^2-1의 값을 정리하기

$x=\frac{3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}}}{2}$이므로

$$x^2-1=\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}}}{2}\right)^2-1=\frac{3^{\frac{1}{2}}+2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{2}}}{4}-1$$
$$=\frac{3^{\frac{1}{2}}+2+3^{-\frac{1}{2}}-4}{4}$$
$$=\frac{3^{\frac{1}{2}}-2+3^{-\frac{1}{2}}}{4}$$
$$=\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}}{2}\right)^2$$

STEP B x^2-1의 값을 주어진 식에 대입하여 간단히 하기

$$x+\sqrt{x^2-1}=\frac{3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}}}{2}+\sqrt{\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}}}{2}+\frac{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}}{2}$$
$$=3^{\frac{1}{4}}$$

따라서 $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4=\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^4=3$

내/신/연/계/ 출제문항 036

$a>0$, $a\neq 1$이고 $x=\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}}{2}$일 때, $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$의 값은?

① a ② $a-\frac{1}{a}$ ③ $a+\frac{1}{a}$
④ a^n ⑤ $\frac{1}{a^n}$

STEP A $1+x^2$의 값을 정리하기

$$1+x^2=1+\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2=1+\frac{a^{\frac{2}{n}}-2+a^{-\frac{2}{n}}}{4}$$
$$=\frac{a^{\frac{2}{n}}+2+a^{-\frac{2}{n}}}{4}$$
$$=\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2$$

STEP B $1+x^2$의 값을 주어진 식에 대입하여 간단히 하기

$$x+\sqrt{1+x^2}=\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}}{2}+\sqrt{\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}}{2}+\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}}{2}$$
$$=a^{\frac{1}{n}}$$

따라서 $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$

정답 ①

0068

정답 ③

STEP A 주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하여 정리하기

$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$$\frac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\frac{(a^{2x})^2-\frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}+1}=\frac{3^2-\frac{1}{3}}{3+1}=\frac{\frac{26}{3}}{4}=\frac{13}{6}$$

0069

정답 ⑤

STEP A 주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하여 정리하기

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}=\frac{(a^{2x})^2+\frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}-1}$$
$$=\frac{3^2+\frac{1}{3}}{3-1}$$
$$=\frac{\frac{28}{3}}{2}=\frac{14}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=14$이므로 $p+q=17$

내/신/연/계/ 출제문항 037

실수 x에 대하여 $3^{2x}=4$일 때, $\frac{3^{3x}+3^{-3x}}{3^x+3^{-x}}$의 값은?

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{27}{4}$

STEP A 곱셈공식 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$을 이용하여 식의 값 구하기

$$\frac{3^{3x}+3^{-3x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{(3^x+3^{-x})(3^{2x}-1+3^{-2x})}{3^x+3^{-x}}$$
$$=3^{2x}+\frac{1}{3^{2x}}-1$$
$$=4+\frac{1}{4}-1=\frac{13}{4}$$

다른풀이 주어진 식의 분모, 분자에 3^x을 곱하여 풀이하기

$$\frac{3^{3x}+3^{-3x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^{4x}+3^{-2x}}{3^{2x}+1}=\frac{4^2+\frac{1}{4}}{4+1}=\frac{65}{20}=\frac{13}{4}$$

정답 ③

0070

정답 ③

STEP A a^{4x}, a^{-2x}의 값 구하기

$a^{2x}=3+2\sqrt{2}$에서 $a^{4x}=(3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$

$a^{-2x}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$

STEP B 주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하여 정리하기

주어진 식에서 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-x}}{a^x+a^{-3x}}=\frac{a^x(a^{3x}+a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-3x})}=\frac{a^{4x}+1}{a^{2x}+a^{-2x}}$$

따라서 $\frac{a^{4x}+1}{a^{2x}+a^{-2x}}=\frac{18+12\sqrt{2}}{6}=3+2\sqrt{2}$

0071

정답 ⑤

STEP A 주어진 식을 정리하여 a^{2x}의 값 구하기

$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{4}{3}$에서 $\dfrac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=\dfrac{4}{3}$

$3a^{2x}+3=4a^{2x}-4$

따라서 $a^{2x}=7$이므로 $a^{4x}=7^2=49$

0072

정답 ④

STEP A 주어진 식을 정리하여 a^{2x}의 값 구하기

$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=3$에서 $3(a^x-a^{-x})=a^x+a^{-x}$

$2a^x=4a^{-x}$, $a^x=2a^{-x}$

양변에 a^x을 곱하면 $a^{2x}=2$

따라서 $a^{2x}+a^{-2x}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

0073

정답 ②

STEP A 주어진 식을 정리하여 a^{2x}의 값 구하기

$\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{1}{2}$에서 $2(a^x-a^{-x})=a^x+a^{-x}$

$a^x=3a^{-x}$

$\therefore\ a^{2x}=3$

STEP B 주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하여 정리하기

따라서 $\dfrac{a^{3x}-a^{-x}}{a^{3x}+a^{-x}}=\dfrac{a^{4x}-1}{a^{4x}+1}=\dfrac{3^2-1}{3^2+1}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

내신연계 출제문항 038

$\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{2}{3}$일 때, $\dfrac{a^{4x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 값은? (단, $a>0$, $a\neq1$)

① $\dfrac{62}{15}$ ② $\dfrac{21}{5}$ ③ $\dfrac{31}{5}$
④ $\dfrac{41}{5}$ ⑤ $\dfrac{51}{15}$

STEP A 주어진 식을 정리하여 a^{2x}의 값 구하기

$\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{2}{3}$에서 $3(a^x-a^{-x})=2(a^x+a^{-x})$

$\therefore\ a^x=5a^{-x}$

양변에 a^x을 곱하면 $a^{2x}=5$

STEP B 주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하여 정리하기

따라서 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\dfrac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\dfrac{5^2-\frac{1}{5}}{5+1}=\dfrac{62}{15}$

정답 ①

0074

정답 ②

STEP A 주어진 식을 정리하여 a^{2x}의 값 구하기

$\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{1}{3}$에서 $\dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\dfrac{1}{3}$

$3a^{2x}-3=a^{2x}+1$, $2a^{2x}=4$

$a^{2x}=2$

$\therefore\ a^x=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

STEP B 주어진 식의 분모, 분자에 $a^{\frac{1}{2}x}$을 곱하여 정리하기

따라서 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{1}{2}x}}{a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}}$의 분모, 분자에 $a^{\frac{1}{2}x}$을 곱하면

$\dfrac{a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{1}{2}x}}{a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}x}\left(a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{1}{2}x}\right)}{a^{\frac{1}{2}x}\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}\right)}=\dfrac{a^{2x}-1}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(\sqrt{2})^2-1}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

0075

정답 ②

STEP A 지수법칙을 이용하여 ab를 x, y로 표현하기

$a=16^{\frac{1}{x}}$, $b=16^{\frac{1}{y}}$에서 $ab=16^{\frac{1}{x}}\cdot16^{\frac{1}{y}}=16^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=2^{4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2^3$

따라서 $4\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=3$이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}$

내신연계 출제문항 039

두 양수 a, b에 대하여 $ab=5$, $a=25^{\frac{1}{x}}$, $b=5^{\frac{2}{y}}$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 값은?

(단, $xy\neq0$)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

STEP A 지수법칙을 이용하여 ab를 x, y로 표현하기

$a=25^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{2}{x}}$, $b=5^{\frac{2}{y}}$에서 $ab=5^{\frac{2}{x}}\cdot5^{\frac{2}{y}}=5^{\frac{2}{x}+\frac{2}{y}}=5$

따라서 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}=1$이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$

정답 ③

0076

정답 ②

STEP A 지수법칙을 이용하여 18^{10}을 a, b로 표현하기

$18^{10}=(2\times3^2)^{10}=2^{10}\times3^{20}=(2^5)^2\times(3^4)^5=a^2b^5$

따라서 $p=2$, $q=5$이므로 $p+q=2+5=7$

0077

정답 ④

STEP A 지수법칙을 이용하여 3^x, 2^x 구하기

$3^{x+1}-3^x=3\cdot3^x-3^x=2\cdot3^x=a$

$\therefore\ 3^x=\dfrac{a}{2}$

$2^{x+1}+2^x=2\cdot2^x+2^x=3\cdot2^x=b$

$\therefore\ 2^x=\dfrac{b}{3}$

STEP B 12^x을 a, b를 이용하여 나타내기

따라서 $12^x=(2^2\cdot3)^x=2^{2x}\cdot3^x=\left(\dfrac{b}{3}\right)^2\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{ab^2}{18}$

0078

정답 ②

STEP A 지수법칙을 이용하여 18^a 구하기

$3^{-2a}\times\sqrt{7}=2^{a-\frac{1}{2}}$에서 $\dfrac{\sqrt{7}}{9^a}=\dfrac{2^a}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ 18^a=\sqrt{14}$

STEP B 324^a의 값 구하기

따라서 $324=18^2$이므로 $324^a=(18^2)^a=(18^a)^2=(\sqrt{14})^2=14$

다른풀이 양변을 제곱하여 지수법칙을 이용하여 풀이하기

$3^{-2a}\times\sqrt{7}=2^{a-\frac{1}{2}}$의 양변을 제곱하면

$(3^{-2a}\times\sqrt{7})^2=(2^{a-\frac{1}{2}})^2$

$3^{-4a}\times7=2^{2a-1},\ 3^{-4a}\times7=4^a\times\dfrac{1}{2}$

양변에 2×3^{4a}을 곱하면

$14=4^a\times3^{4a}=(4\times81)^a=324^a$

따라서 $324^a=14$

0079

정답 ⑤

STEP A 지수법칙을 이용하여 $4^{\frac{1}{a}},\ 2^{\frac{1}{b}}$의 값 구하기

$5^{2a+b}\times5^{a-b}=32\times2$

$5^{(2a+b)+(a-b)}=64$

$5^{3a}=4^3\quad\therefore\ 5^a=4$ …… ㉠

$5^{a-b}=2$에서 $5^b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4^{\frac{1}{a}}=5,\ 2^{\frac{1}{b}}=5$

STEP B $4^{\frac{a+b}{ab}}$의 값 구하기

따라서 $4^{\frac{a+b}{ab}}=4^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=4^{\frac{1}{a}}\times4^{\frac{1}{b}}=5\times(2^{\frac{1}{b}})^2=5\times5^2=125$

다른풀이 로그를 이용하여 풀이하기

$5^{2a+b}=32$에서 $2a+b=\log_5 32$ …… ㉠

$5^{a-b}=2$에서 $a-b=\log_5 2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\log_5 4,\ b=\log_5 2$

$\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\log_5 4}+\dfrac{1}{\log_5 2}=\log_4 5+\log_2 5$

$=\log_4 5+\log_4 25$

$=\log_4 125$

따라서 $4^{\frac{a+b}{ab}}=4^{\log_4 125}=125$

내신연계 출제문항 040

$20^a=5,\ 20^b=2$인 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $10^{\frac{2a}{1-b}}$의 값은?

① 4 ② 9 ③ 16
④ 25 ⑤ 36

STEP A 지수법칙을 이용하여 $10^{\frac{1}{1-b}}$의 값 구하기

$20^b=2$에서 $20^{-b}=\dfrac{1}{2}$

이 식의 양변에 20을 곱하면

$20^{1-b}=10$

$\therefore\ 10^{\frac{1}{1-b}}=20$

STEP B $10^{\frac{2a}{1-b}}$의 값 구하기

따라서 $10^{\frac{2a}{1-b}}=(10^{\frac{1}{1-b}})^{2a}=20^{2a}=(20^a)^2=5^2=25$

정답 ④

0080

정답 ②

STEP A $12^{\frac{2a+b}{1-a}}=\left(\dfrac{60}{5}\right)^{\frac{2a+b}{1-a}}$임을 이용하여 구하기

$60^a=5,\ 60^b=6$에서

$12=\dfrac{60}{5}=\dfrac{60}{60^a}=60^{1-a}$

$12^{\frac{2a+b}{1-a}}=(60^{1-a})^{\frac{2a+b}{1-a}}=60^{2a+b}=60^{2a}\times60^b$

$=(60^a)^2\times60^b$

$=5^2\times6=150$

내신연계 출제문항 041

양수 $a,\ b$에 대하여 $10^a=9,\ 10^b=2$일 때, $5^{\frac{a+b+1}{1-b}}$의 값은?

① 90 ② 120 ③ 140
④ 160 ⑤ 180

STEP A $5=\dfrac{10}{2}=\dfrac{10}{10^b}=10^{1-b}$임을 이용하여 구하기

$5=\dfrac{10}{2}=\dfrac{10}{10^b}=10^{1-b}$

$5^{\frac{a+b+1}{1-b}}=(10^{1-b})^{\frac{a+b+1}{1-b}}=10^{a+b+1}=10^a\times10^b\times10^1$

$=9\times2\times10=180$

정답 ⑤

0081

정답 ④

STEP A 거듭제곱근의 성질을 이용하여 $a,\ b$를 지수로 표현하기

16의 세제곱근 중 실수인 것은 $a=\sqrt[3]{16}=2^{\frac{4}{3}}$이므로 $2=a^{\frac{3}{4}}$

27의 네제곱근 중 양수인 것은 $b=\sqrt[4]{27}=3^{\frac{3}{4}}$이므로 $3=b^{\frac{4}{3}}$

STEP B 72를 소인수분해하여 $a,\ b$로 표현하기

따라서 $72=2^3\times3^2=(a^{\frac{3}{4}})^3\times(b^{\frac{4}{3}})^2=a^{\frac{9}{4}}b^{\frac{8}{3}}$

0082

정답 ③

STEP A 주어진 조건의 밑이 서로 다르므로 밑을 통일시켜 나타내기

$24^x=32$에서 $24=32^{\frac{1}{x}}=(2^5)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{5}{x}}$ …… ㉠

$3^y=128$에서 $3=128^{\frac{1}{y}}=(2^7)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{7}{y}}$ …… ㉡

STEP B 조건식을 나누어 구하는 값 구하기

㉠÷㉡을 하면 $8=2^{\frac{5}{x}-\frac{7}{y}}$

따라서 $2^{\frac{5}{x}-\frac{7}{y}}=2^3$이므로 $\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{y}=3$

다른풀이 로그를 이용하여 구하기

$24^x=32$에서 $x=\log_{24}32$이므로 $\dfrac{1}{x}=\log_{32}24=\dfrac{1}{5}\log_2 24$

$\therefore\ \dfrac{5}{x}=\log_2 24$

$3^y=128$에서 $y=\log_3 128$이므로 $\dfrac{1}{y}=\log_{128}3=\dfrac{1}{7}\log_2 3$

$\therefore\ \dfrac{7}{y}=\log_2 3$

따라서 $\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{y}=\log_2 24-\log_2 3=\log_2 8=3$

0083

정답 ②

STEP A 주어진 조건의 밑이 서로 다르므로 밑을 통일시켜 나타내기

$5^x=81$에서 $5^x=3^4$이므로 $5=3^{\frac{4}{x}}$ ...... ㉠

$45^y=243$에서 $45^y=3^5$이므로 $45=3^{\frac{5}{y}}$ ...... ㉡

STEP B 조건식을 나누어 구하는 값 구하기

㉠÷㉡을 하면

$3^{\frac{4}{x}}\div 3^{\frac{5}{y}}=5\div 45=\frac{1}{9}$

따라서 $3^{\frac{4}{x}-\frac{5}{y}}=3^{-2}$이므로 $\frac{4}{x}-\frac{5}{y}=-2$

다른풀이 로그를 이용하여 구하기

$5^x=81$에서 $x=\log_5 81$이므로 $\frac{1}{x}=\log_{81}5=\frac{1}{4}\log_3 5$

$\therefore \frac{4}{x}=\log_3 5$

$45^y=243$에서 $y=\log_{45}243$이므로 $\frac{1}{y}=\log_{243}45=\frac{1}{5}\log_3 45$

$\therefore \frac{5}{y}=\log_3 45$

따라서 $\frac{4}{x}-\frac{5}{y}=\log_3 5-\log_3 45=\log_3\frac{5}{45}=\log_3\frac{1}{9}=-2$

내신연계 출제문항 042

$8^x=9$, $18^y=81$일 때, $\frac{2}{3x}-\frac{4}{y}$의 값은?

① -3　② -2　③ -1
④ 2　⑤ 3

STEP A 주어진 조건의 밑이 서로 다르므로 밑을 통일시켜 나타내기

$8^x=9$에서 $2^{3x}=3^2$이므로 $2=3^{\frac{2}{3x}}$ ...... ㉠

$18^y=81$에서 $18^y=3^4$이므로 $18=3^{\frac{4}{y}}$ ...... ㉡

STEP B 조건식을 나누어 구하는 값 구하기

㉠÷㉡을 하면

$3^{\frac{2}{3x}}\div 3^{\frac{4}{y}}=2\div 18=\frac{1}{9}$

따라서 $3^{\frac{2}{3x}-\frac{4}{y}}=3^{-2}$이므로 $\frac{2}{3x}-\frac{4}{y}=-2$

다른풀이 로그를 이용하여 구하기

$8^x=9$에서 $x=\log_8 9=\log_{2^3}3^2=\frac{2}{3}\log_2 3$이므로 $\frac{1}{x}=\frac{3}{2}\log_3 2$

$\therefore \frac{2}{3x}=\log_3 2$

$18^y=81$에서 $y=\log_{18}81=4\log_{18}3$이므로 $\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\log_3 18$

$\therefore \frac{4}{y}=\log_3 18$

따라서 $\frac{2}{3x}-\frac{4}{y}=\log_3 2-\log_3 18=\log_3\frac{2}{18}=\log_3\frac{1}{9}=-2$ 정답 ②

0084

정답 ②

STEP A 지수법칙을 이용하여 x, y를 지수로 표현하기

$27^x=a$에서 $(27^x)^{\frac{1}{x}}=a^{\frac{1}{x}}$이므로 $a^{\frac{1}{x}}=27$

$3^y=a$에서 $(3^y)^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{y}}$이므로 $a^{\frac{1}{y}}=3$

STEP B $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$임을 이용하여 a의 값 구하기

이때 $a^{\frac{1}{x}}\div a^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=27\div 3=9$에서 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$이므로 $a^2=9$

따라서 $a>0$이므로 $a=3$

다른풀이 로그를 이용하여 구하기

$27^x=a$에서 $x=\log_{27}a$이므로 $\frac{1}{x}=\log_a 27$

$3^y=a$에서 $y=\log_3 a$이므로 $\frac{1}{y}=\log_a 3$

이때 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\log_a 27-\log_a 3=\log_a 9=2\log_a 3$

따라서 $2\log_a 3=2$이므로 $\log_a 3=1$　$\therefore a=3$

내신연계 출제문항 043

$8^x=5^y=a$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$일 때, a의 값은?

① $2\sqrt[3]{5}$　② $5\sqrt[3]{2}$　③ 20
④ 210　⑤ 400

STEP A 지수법칙을 이용하여 x, y를 지수로 표현하기

$8^x=a$에서 $(8^x)^{\frac{1}{x}}=a^{\frac{1}{x}}$이므로 $a^{\frac{1}{x}}=8$

$5^y=a$에서 $(5^y)^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{y}}$이므로 $a^{\frac{1}{y}}=5$

STEP B 조건식을 곱하여 구하는 값 구하기

이때 $a^{\frac{1}{x}}\times a^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=8\times 5=40$에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$이므로 $a^3=40$

따라서 $a=\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{8\times 5}=2\sqrt[3]{5}$

다른풀이 로그를 이용하여 구하기

$8^x=a$에서 $x=\log_8 a$이므로 $\frac{1}{x}=\log_a 8$

$5^y=a$에서 $y=\log_5 a$이므로 $\frac{1}{y}=\log_a 5$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_a 8+\log_a 5=\log_a 40$

따라서 $\log_a 40=3$이므로 $a^3=40$　$\therefore a=\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{8\times 5}=2\sqrt[3]{5}$ 정답 ①

0085

정답 ②

STEP A 지수법칙을 이용하여 밑을 통일시켜 나타내기

$2^x=5^y=\left(\frac{1}{10}\right)^z=k$ $(k>0,\ k\neq 1)$로 놓으면

$2^x=k$에서 $k^{\frac{1}{x}}=2$ ...... ㉠

$5^y=k$에서 $k^{\frac{1}{y}}=5$ ...... ㉡

$\left(\frac{1}{10}\right)^z=k$에서 $k^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{10}$ ...... ㉢

STEP B 밑을 통일시킨 조건식을 이용하여 구하는 값을 계산하기

㉠×㉡×㉢을 하면

$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=2\times 5\times\frac{1}{10}=1$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

0086

정답 ②

STEP A 지수법칙을 이용하여 x, y, z를 지수로 표현하기

$2^x=3^y=5^z=20$

$2^x=20$에서 $2^3=20^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$3^y=20$에서 $3^2=20^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡

$5^z=20$에서 $5=20^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

STEP B $20^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}}$의 값 구하기

㉠÷㉡×㉢을 하면

$2^3\div3^2\times5=20^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}}$

따라서 $20^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}}=2^3\div3^2\times5=\frac{40}{9}$

0087

정답 ⑤

STEP A 지수법칙을 이용하여 밑을 통일시켜 나타내기

$a^x=b^y=c^z=8$이라 하면

$a^x=2^3$에서 $a=2^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$b^y=2^3$에서 $b=2^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡

$c^z=2^3$에서 $c=2^{\frac{3}{z}}$ …… ㉢

STEP B 밑을 통일시킨 조건식을 이용하여 구하는 값을 계산하기

㉠×㉡×㉢을 하면

$abc=2^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}}$

이때 $abc=64$이므로 $2^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}}=2^6$

따라서 $\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}=6$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$

내신연계 출제문항 044

양수 a, b에 대하여

$$a^x=b^y=3^z\text{이고 }\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$$

일 때, ab의 값은? (단, $xyz\neq0$)

① 3　② 6　③ 9
④ 12　⑤ 27

STEP A 지수법칙을 이용하여 x, y, z를 지수로 표현하기

$a^x=b^y=3^z=k\,(k>0)$이라 하면

$a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$, $3=k^{\frac{1}{z}}$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$이므로 $ab=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}=\left(k^{\frac{1}{z}}\right)^2=3^2=9$

정답 ③

0088

정답 ③

STEP A 64^a의 값을 임의로 두고 지수법칙을 이용하여 a, b, c를 지수로 표현하기

$64^a=81^b=k^c=t\,(t>0,\ t\neq1)$로 놓으면

$64^a=t$에서 $64=t^{\frac{1}{a}}$

$81^b=t$에서 $81=t^{\frac{1}{b}}$

$k^c=t$에서 $k=t^{\frac{1}{c}}$

STEP B $\frac{4}{a}+\frac{6}{b}=\frac{8}{c}$임을 이용하여 k의 값 구하기

이때 $\frac{4}{a}+\frac{6}{b}=\frac{8}{c}$이므로 $t^{\frac{4}{a}+\frac{6}{b}}=t^{\frac{8}{c}}$

$k^8=t^{\frac{8}{c}}=t^{\frac{4}{a}+\frac{6}{b}}=64^4\cdot81^6=(8\cdot27)^8$ ← $k=t^{\frac{1}{c}}$에서 $k^8=t^{\frac{8}{c}}$

따라서 $k=216$

내신연계 출제문항 045

0이 아닌 실수 a, b, c와 양의 정수 k에 대하여

$$36^a=16^b=k^c,\ \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=\frac{4}{c}$$

일 때, k의 값은?

① 2　② 4　③ 8
④ 16　⑤ 48

STEP A 지수법칙을 이용하여 밑을 통일시켜 나타내기

$36^a=16^b=k^c=t\,(t>0,\ t\neq1)$로 놓으면

$36^a=t$에서 $36=t^{\frac{1}{a}}$

$16^b=t$에서 $16=t^{\frac{1}{b}}$

$k^c=t$에서 $k=t^{\frac{1}{c}}$

STEP B 조건식을 이용하여 구하는 값 구하기

이때 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=\frac{4}{c}$이므로 $t^{\frac{2}{a}+\frac{3}{b}}=t^{\frac{4}{c}}$

$k^4=t^{\frac{4}{c}}=t^{\frac{2}{a}+\frac{3}{b}}=36^2\cdot16^3=6^4\cdot(2^3)^4=(6\cdot2^3)^4$

따라서 $k=48$

정답 ⑤

0089

정답 ③

STEP A 지수법칙을 이용하여 x, y, z를 지수로 표현하기

$80^x=2$에서 $80=2^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$\left(\frac{1}{10}\right)^y=4$에서 $\frac{1}{10}=2^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡

$a^z=8$에서 $a^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

STEP B $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$임을 이용하여 a의 값 구하기

㉠×㉡÷㉢ 을 하면

$2^{\frac{1}{x}}\times2^{\frac{2}{y}}\div2^{\frac{1}{z}}=2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}=80\times\frac{1}{10}\div a^{\frac{1}{3}}=8\div a^{\frac{1}{3}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$이므로 $2^1=8\div a^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a^{\frac{1}{3}}=4$

따라서 $a=4^3=64$

내신연계 출제문항 046

$40^x=2$, $\left(\frac{1}{10}\right)^y=8$, $a^z=4$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여

$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=1$이 성립할 때, 양수 a의 값은?

① 2　② 4　③ 8
④ 16　⑤ 64

STEP A 지수법칙을 이용하여 x, y, z를 지수로 표현하기

$40^x=2$에서 $40=2^{\frac{1}{x}}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^y=8$에서 $\frac{1}{10}=8^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{3}{y}}$

$a^z=4$에서 $a^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{z}}$

STEP B $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=1$임을 이용하여 a의 값 구하기

$2^{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}}=40\times\frac{1}{10}\div a^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{a}}$이므로

$\frac{4}{\sqrt{a}}=2$, $\sqrt{a}=2$

따라서 $a=4$

정답 ②

0090

정답 ②

STEP A 지수법칙을 이용하여 밑을 통일시켜 나타내기

$3^a=k^c$에서 $3=k^{\frac{c}{a}}$　…… ㉠

$5^b=k^c$에서 $5=k^{\frac{c}{b}}$　…… ㉡

STEP B $ab=bc+ca$임을 이용하여 양수 k의 값 구하기

㉠×㉡을 하면

$15=k^{\frac{c}{a}}k^{\frac{c}{b}}=k^{\frac{c}{a}+\frac{c}{b}}=k^{\frac{bc+ca}{ab}}$

이때 $ab=bc+ca$이므로 $\frac{bc+ca}{ab}=\frac{ab}{ab}=1$

따라서 $k=15$

0091

정답 ⑤

STEP A 지수법칙을 이용하여 구하기

$2^{\frac{4}{a}}=100$에서 $2^4=100^a$이므로

$2^4=10^{2a}$　…… ㉠

$25^{\frac{2}{b}}=10$에서 $25^2=10^b$이므로

$5^4=10^b$　…… ㉡

㉠×㉡를 하면

$2^4\times5^4=10^{2a}\times10^b$

즉 $10^{2a+b}=10^4$

따라서 $2a+b=4$

0092

정답 ③

STEP A 지수법칙을 이용하여 구하기

$2^{-a}+2^{-b}=\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}$

$=\frac{2^a+2^b}{2^{a+b}}$

$=\frac{9}{4}$　…… ㉠

그런데 $2^a+2^b=2$이므로 이 값을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{2^{a+b}}=\frac{9}{4}$

$2^{a+b}=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로 $p+q=17$

내신연계 출제문항 047

두 실수 a, b에 대하여

$$2^a\times3^b=4,\ 2^b\times3^a=9$$

일 때, $a-b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

STEP A 지수법칙을 이용하여 구하기

$2^a\times3^b=4$, $2^b\times3^a=9$이므로 같은 변끼리 나누면

$2^{a-b}\times3^{b-a}=\frac{4}{9}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{a-b}=\frac{4}{9}$

따라서 $a-b=2$

정답 ⑤

0093

정답 ⑤

STEP A 2^a의 값을 임의로 두고 지수법칙을 이용하여 a, b, c를 지수로 표현하기

$2^a=5^b=10^c=k$ ($k>0$, $k\neq1$)이라 하면

$2^a=k$에서 $2=k^{\frac{1}{a}}$　…… ㉠

$5^b=k$에서 $5=k^{\frac{1}{b}}$　…… ㉡

$10^c=k$에서 $10=k^{\frac{1}{c}}$　…… ㉢

STEP B [보기]의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $b=\frac{1}{3}$이면 $2^a=5^b=5^{\frac{1}{3}}$이므로 $a=\log_2 5^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_2 5$ [참]

ㄴ. ㉠×㉡÷㉢을 하면

$2\times5\div10=k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$

즉 $k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}=1$이므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$이다. [참]

ㄷ. $2^a=k$에서 $a=\log_2 k$

$5^b=k$에서 $b=\log_5 k$이므로 $\frac{a}{b}=\frac{\log_2 k}{\log_5 k}=\frac{\log_k 5}{\log_k 2}=\log_2 5$

즉 $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$이므로 $2<\frac{a}{b}<3$ [참]

참고

$2^a=5^b$에서 $2^{\frac{a}{b}}=5$

$\therefore \frac{a}{b}=\log_2 5$

이때 $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$에서 $2<\log_2 5<3$이므로

$2<\frac{a}{b}<3$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

내신연계 출제문항 048

등식 $2^a=5^b$을 만족시키는 양의 실수 a, b에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $b=\frac{1}{2}$이면 $a=\log_4 5$이다.
ㄴ. $2<\frac{a}{b}<3$
ㄷ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$은 무리수이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

STEP ① [보기]의 진위판단하기

ㄱ. $b=\frac{1}{2}$이면 $2^a=5^{\frac{1}{2}}$이므로 $a=\log_2\sqrt{5}=\log_4 5$ [참]

ㄴ. $2^a=5^b$에서 $2^{\frac{a}{b}}=5$

$\therefore \frac{a}{b}=\log_2 5$

이때 $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$에서 $2<\log_2 5<3$이므로

$2<\frac{a}{b}<3$ [참]

다른풀이 $2^a=5^b$의 양변에 로그를 취하여 구하기

$2^a=5^b$의 양변에 상용로그를 취하면 $a\log 2=b\log 5$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\log 5}{\log 2}=\log_2 5$

ㄷ. **반례** $2^a=5^b=10$으로 놓으면

$2=10^{\frac{1}{a}}$, $5=10^{\frac{1}{b}}$에서 $\frac{1}{a}=\log 2$, $\frac{1}{b}=\log 5$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log 2+\log 5=\log 10=1$(유리수) [거짓]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답 ③

참고 $2^a=5^b=k$ $(k>1)$로 놓으면

$2=k^{\frac{1}{a}}$, $5=k^{\frac{1}{b}}$에서 $\frac{1}{a}=\log_k 2$, $\frac{1}{b}=\log_k 5$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_k 2+\log_k 5=\log_k 10$이므로

$k=10^{\frac{n}{m}}$ (단, m, n은 자연수)일 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$은 유리수이다.

0094

정답 ④

STEP ① 주어진 식을 이용하여 F_1, F_2의 값 구하기

방향제 12g을 뿌리고 2시간 후에 실내에 남아 있는 방향제의 양이 F_1이므로

$F_1=12\cdot 2^{-\frac{2}{3}}$

방향제 8g을 뿌리고 8시간 후의 실내에 남아 있는 방향제의 양이 F_2이므로

$F_2=8\cdot 2^{-\frac{8}{3}}$

STEP ② 지수법칙을 이용하여 $\frac{F_1}{F_2}$의 값 구하기

따라서 $\frac{F_1}{F_2}=\frac{12}{8}\cdot 2^{-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}}=\frac{3}{2}\cdot 2^2=6$

0095

정답 ①

STEP ① 주어진 식을 이용하여 G_1, G_2의 값 구하기

상대습도가 80%, 기온이 35°C일 때의 식품손상지수는 G_1이므로

$G_1=\frac{80-65}{14}(1.05)^{35}=\frac{15}{14}(1.05)^{35}$ …… ㉠

상대습도가 70%, 기온이 20°C일 때의 식품손상지수는 G_2이므로

$G_2=\frac{70-65}{14}(1.05)^{20}=\frac{5}{14}(1.05)^{20}$ …… ㉡

STEP ② 지수법칙을 이용하여 $\frac{G_1}{G_2}$의 값 구하기

따라서 ㉠÷㉡을 하면 $\frac{G_1}{G_2}=3(1.05)^{15}=3\times 2=6$

0096

정답 ⑤

STEP ① 주어진 식을 이용하여 S_1, S_2의 값 구하기

펌프의 1분당 회전수 N은 일정하므로 $S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$에서

$Q=24$, $H=5$를 주어진 관계식에 대입하면

$S_1=N\times 24^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}$

$Q=12$, $H=10$을 주어진 관계식에 대입하면

$S_2=N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}$

STEP ② 지수법칙을 이용하여 $\frac{S_1}{S_2}$의 값 구하기

따라서 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times 24^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}}{N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}}=\frac{2^{\frac{1}{2}}\times 12^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}}{12^{\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{3}{4}}\times 5^{-\frac{3}{4}}}=2^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$

0097

정답 ②

STEP ① 주어진 m_0, v, c의 값을 식에 대입하여 정리하기

$m=m_0(1-v^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$에서 $m_0=8$, $v=\frac{9}{5}\times 10^8$, $c=3\times 10^8$이므로

$$m=8\left\{1-\left(\frac{9}{5}\times 10^8\right)^2\times(3\times 10^8)^{-2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=8\left(1-\frac{\frac{81}{25}\times 10^{16}}{9\times 10^{16}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=8\left(1-\frac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=8\times\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=8\times\frac{5}{4}=10$$

따라서 구하는 질량은 10 mg

0098

정답 ②

STEP ① 주어진 식을 이용하여 각각의 시간을 구하기

32인분의 식사를 준비하는 데 걸리는 시간은 $3\times 32^{0.5}$

8인분의 식사를 준비하는 데 걸리는 시간은 $3\times 8^{0.5}$이므로

$\frac{3\times 32^{0.5}}{3\times 8^{0.5}}=\left(\frac{32}{8}\right)^{0.5}=4^{0.5}=2$

따라서 32인분의 식사를 준비하는데 걸리는 시간은 8인분의 식사를 준비하는 데 걸리는 시간의 2(배)

STEP 2 서술형 기출유형

0099

정답 해설참조

1단계 -8의 세제곱근을 모두 구한다. ◀ 60%

-8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0,\ (x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

2단계 -8의 세제곱근 중에서 실수인 것을 구한다. ◀ 40%

따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-8}=-2$

0100

정답 해설참조

1단계 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 정리한다. ◀ 40%

$$\left[\left\{\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{9}{4}}\right\}^{\frac{8}{3}}\right]^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{9}{4}\times\frac{8}{3}\times\frac{1}{m}}$$
$$=\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{6}{m}}$$
$$=(2^{-8})^{\frac{6}{m}}=2^{-\frac{48}{m}}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

2단계 주어진 식이 자연수가 되는 가능한 정수 m의 값을 모두 구한다. ◀ 50%

㉠이 자연수가 되도록 하는 모든 정수 m의 값은

$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -6,\ -8,\ -12,\ -16,\ -24,\ -48$

3단계 정수 m의 개수를 구한다. ◀ 10%

따라서 정수 m의 개수는 10

0101

정답 해설참조

1단계 두 유리수 r, s를 문자로 정한다. ◀ 30%

$r=\frac{m}{n},\ s=\frac{p}{q}$ (m, n, p, q는 정수, $n\geq 2$, $q\geq 2$)라 하자.

2단계 지수법칙을 이용하여 성립함을 보인다. ◀ 70%

$$a^r a^s=a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq}{nq}}a^{\frac{np}{nq}}$$
$$=a^{\frac{mq+np}{nq}}$$
$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$
$$=a^{r+s}$$

0102

정답 해설참조

1단계 분모, 분자에 a^x을 곱하여 a^{2x}의 값 구한다. ◀ 80%

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{3}{2}$에서 좌변의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{3}{2},\ \frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=\frac{3}{2}$

$2a^{2x}+2=3a^{2x}-3$

$\therefore\ a^{2x}=5$

2단계 a^{6x}의 값 구한다. ◀ 20%

따라서 $a^{6x}=(a^{2x})^3=5^3=125$

0103

정답 해설참조

1단계 $a^x=b^y=c^z=27$에서 a, b, c의 값을 구한다. ◀ 50%

$a^x=b^y=c^z=27$에서

$a^x=3^3$에서 $a=3^{\frac{3}{x}}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$b^y=27$에서 $b=3^{\frac{3}{y}}$ $\cdots\cdots$ ㉡

$c^z=2^3$에서 $c=3^{\frac{3}{z}}$ $\cdots\cdots$ ㉢

2단계 $abc=9$에서 지수법칙을 이용하여 x, y, z의 관계식을 구한다. ◀ 30%

㉠×㉡×㉢을 하면 $abc=3^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}}$

$abc=9$이므로 $abc=3^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}}=3^2$

$\therefore\ 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2$

3단계 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$의 값을 구한다. ◀ 20%

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$

0104

정답 해설참조

1단계 곱셈공식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다. ◀ 40%

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$15=12+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=\frac{3}{2}$

2단계 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리한다. ◀ 40%

$$(2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}=2^{ab+ac}\times 2^{bc+ba}\times 2^{ca+cb}$$
$$=2^{2(ab+bc+ca)}$$

3단계 주어진 식의 값을 구한다. ◀ 20%

따라서 $ab+bc+ca=\frac{3}{2}$이므로 $2^{2(ab+bc+ca)}=2^{2\cdot\frac{3}{2}}=2^3=8$

0105

정답 해설참조

1단계 $a+a^{-1}$값을 구한다. ◀ 30%

$$a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3^2-2=7$$

2단계 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$값을 구한다. ◀ 40%

$$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-4a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3^2-4=5$$

$a>1$이므로 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}>0$

따라서 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

참고 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a-2+a^{-1}=7-2=5$

3단계 $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$값을 구한다. ◀ 30%

$$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a-1+a^{-1})$$
$$=3\cdot(7-1)=18$$

참고 $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=27-9=18$

0106

정답 해설참조

1단계 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$의 값을 구한다. ◀ 40%

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a-2+a^{-1}=11-2=9$

이때 $a>1$이므로 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$

2단계 $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}$의 값을 구한다. ◀ 40%

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^3=a^{\frac{3}{2}}-3\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})-a^{-\frac{3}{2}}=27$

← $(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$

$\therefore\ a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=27+3\cdot 3=36$

3단계 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}+14}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}+2}$의 값을 구한다. ◀ 20%

따라서 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}+14}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}+2}=\dfrac{36+14}{3+2}=\dfrac{50}{5}=10$

0107

정답 해설참조

1단계 주어진 값의 분자, 분모에 3^{-3a}을 곱하여 변형한다. ◀ 30%

$\dfrac{3^{6a}+1}{3^{4a}+3^{2a}}$의 분자, 분모에 3^{-3a}을 곱하면

$\dfrac{3^{6a}+1}{3^{4a}+3^{2a}}=\dfrac{3^{-3a}(3^{6a}+1)}{3^{-3a}(3^{4a}+3^{2a})}=\dfrac{3^{3a}+3^{-3a}}{3^{a}+3^{-a}}$

2단계 3^a+3^{-a}의 값을 구한다. ◀ 30%

또, $(3^a+3^{-a})^2=9^a+2+9^{-a}=7+2=9$이고

$3^a+3^{-a}>0$이므로 $3^a+3^{-a}=3$

3단계 $3^{3a}+3^{-3a}$의 값을 구한다. ◀ 20%

이때 $3^{3a}+3^{-3a}=(3^a+3^{-a})^3-3(3^a+3^{-a})$

$=3^3-3\times 3$

$=18$

4단계 $\dfrac{3^{6a}+1}{3^{4a}+3^{2a}}$의 값을 구한다. ◀ 20%

따라서 $3^a+3^{-a}=3$, $3^{3a}+3^{-3a}=18$이므로 주어진 식의 값은

$\dfrac{3^{6a}+1}{3^{4a}+3^{2a}}=\dfrac{3^{3a}+3^{-3a}}{3^a+3^{-a}}=\dfrac{18}{3}=6$

0108

정답 해설참조

1단계 주어진 식의 양변을 3^x으로 나누어 3^x+3^{-x}의 값을 구한다. ◀ 30%

$9^x-3^{x+1}=-1$에서 $3^{2x}-3\cdot 3^x+1=0$의 양변을 3^x으로 나누면

$3^x-3+\dfrac{1}{3^x}=0$

$\therefore\ 3^x+3^{-x}=3$

2단계 9^x+9^{-x}의 값을 구한다. ◀ 30%

$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}=3^2-2=7$

3단계 81^x+81^{-x}의 값을 구한다. ◀ 30%

$81^x+81^{-x}=3^{4x}+3^{-4x}=(3^{2x}+3^{-2x})^2-2=49-2=47$

4단계 $\dfrac{81^x+81^{-x}+1}{9^x+9^{-x}+1}$의 값을 구한다. ◀ 10%

따라서 $9^x+9^{-x}=7$, $81^x+81^{-x}=47$이므로 구하는 값은

$\dfrac{81^x+81^{-x}+1}{9^x+9^{-x}+1}=\dfrac{47+1}{7+1}=6$

0109

정답 해설참조

1단계 $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$이 양의 정수가 되도록 하는 p, q의 조건을 구한다. ◀ 30%

$\sqrt{\dfrac{n}{2}}$이 자연수가 되려면 $n=2^{2k+1}\times 3^{2l}$꼴이므로

$p=2k+1$, $q=2l$ (단, k, l은 음이 아닌 정수)

2단계 $\sqrt[3]{\dfrac{n}{3}}$이 양의 정수가 되도록 하는 p, q의 조건을 구한다. ◀ 40%

$\sqrt[3]{\dfrac{n}{3}}$이 자연수가 되려면 $n=2^{3r}\times 3^{3s+1}$꼴이므로

$p=3r$, $q=3s+1$ (단, r, s는 음이 아닌 정수)

3단계 [1단계], [2단계]를 이용하여 n의 최솟값을 구한다. ◀ 30%

p는 3의 배수, q는 2의 배수이어야 하므로

p의 최솟값과 q의 최솟값은 각각 3, 4이다.

따라서 n의 최솟값은 $2^3\times 3^4=648$

다른풀이 $n=2a^2$, $n=3b^3$꼴로 풀이하기

$\sqrt{\dfrac{n}{2}}$이 자연수가 되려면 $\dfrac{n}{2}=a^2$ (a는 자연수)

즉 $n=2a^2$꼴이어야 하고

$\sqrt[3]{\dfrac{n}{3}}$이 자연수가 되려면 $\dfrac{n}{3}=b^3$ (b는 자연수)

즉 $n=3b^3$꼴 이어야 하므로 $n=2a^2=3b^3$

이때 a는 3의 배수, b는 2의 배수이어야 하므로

$a=3k$, $b=2l$ (k, l은 자연수)

라 하면 $n=2\times 3^2\times k^2=3\times 2^3\times l^3$

따라서 구하는 n의 최솟값은 $k=2\times 3$, $l=3$일 때, $n=2^3\times 3^4=648$

0110

정답 해설참조

1단계 a^2-1을 구한다. ◀ 30%

$a^2-1=\dfrac{3^{\frac{2}{6}}+2+3^{-\frac{2}{6}}}{4}-1$

$=\dfrac{3^{\frac{2}{6}}+3^{-\frac{2}{6}}-2}{4}$

$=\left(\dfrac{3^{\frac{1}{6}}-3^{-\frac{1}{6}}}{2}\right)^2$

2단계 $a+\sqrt{a^2-1}$의 값을 구한다. ◀ 40%

$a+\sqrt{a^2-1}=\dfrac{3^{\frac{1}{6}}+3^{-\frac{1}{6}}}{2}+\dfrac{3^{\frac{1}{6}}-3^{-\frac{1}{6}}}{2}=3^{\frac{1}{6}}$

3단계 $(a+\sqrt{a^2-1})^{12}$의 값을 구한다. ◀ 30%

$(a+\sqrt{a^2-1})^{12}=(3^{\frac{1}{6}})^{12}=3^2=9$

STEP 3 행복한 1등급 문제

0111

정답 ⑤

STEP A x의 범위에 따른 실수 t의 개수 구하기

$t^2=-x^2+9$에서

(i) $-x^2+9>0$에서 $(x-3)(x+3)<0$

$-3<x<3$일 때, $t=\sqrt{-x^2+9}$ 또는 $t=-\sqrt{-x^2+9}$이므로

실수 t의 값은 2개

즉 $f(x)=2$

(ii) $-x^2+9=0$에서 $(x-3)(x+3)=0$

$x=-3$ 또는 $x=3$일 때, $t=0$이므로 실수 t의 값은 1개

즉 $f(x)=1$

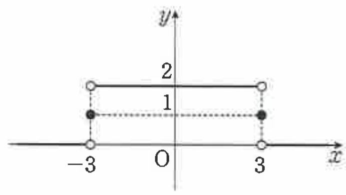
(iii) $-x^2+9<0$에서 $(x-3)(x+3)>0$

$x<-3$ 또는 $x>3$일 때, $t^2=-x^2+9<0$을 만족시키는 실수 t의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore f(x)=0$

STEP B 함수 $y=f(x)$의 그래프 그리기

(i)~(iii)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

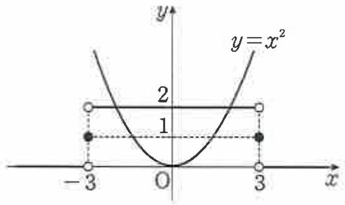


STEP C [보기]의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $f(-3)=1$ [참]

ㄴ. 방정식 $f(x)=2$를 만족시키는 x의 범위는 $-3<x<3$이므로 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. [참]

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 $y=x^2$은 두 점에서 만난다. [참]



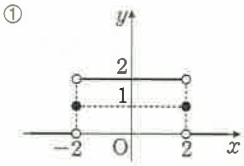
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

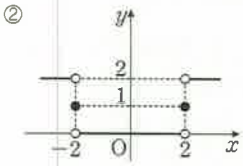
내신연계 출제문항 049

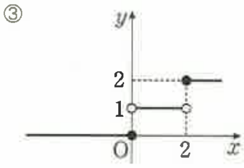
실수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

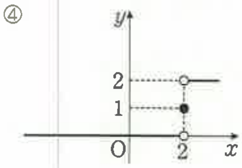
$f(x)=$(등식 $t^4=x^2-4$를 만족시키는 서로 다른 실수 t의 개수)

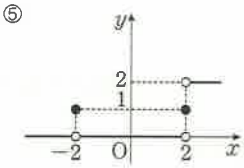
로 정의하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


STEP A x의 범위에 따른 실수 t의 개수 구하기

$t^4=x^2-4$에서

(i) $x^2-4>0$에서 $(x-2)(x+2)>0$

즉 $x<-2$ 또는 $x>2$일 때,

$t=\sqrt[4]{x^2-4}$ 또는 $t=-\sqrt[4]{x^2-4}$이므로 실수 t의 값은 2개

$\therefore f(x)=2$

(ii) $x^2-4=0$에서 $(x-2)(x+2)=0$

즉 $x=-2$ 또는 $x=2$일 때,

$t=0$이므로 실수 t의 값은 1개

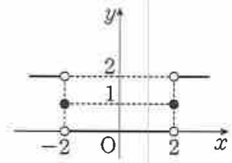
$\therefore f(x)=1$

(iii) $x^2-4<0$에서 $t^4=x^2-4<0$을 만족시키는 실수 t의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore f(x)=0$

STEP B 실근의 개수를 이용한 그래프 그리기

(i)~(iii)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



다른풀이 t는 x^2-4의 네제곱근 중 실수 구하기

$t^4=x^2-4$를 만족시키는 실수 t는 x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것이다.

(i) $x^2-4>0$일 때,

x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{x^2-4}$, $-\sqrt[4]{x^2-4}$이므로

$f(x)=2$

(ii) $x^2-4=0$일 때,

x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{0}=0$이므로

$f(x)=1$

(iii) $x^2-4<0$일 때,

x^2-4의 네제곱근 중 실수는 존재하지 않으므로 $f(x)=0$

정답 ②

0112

정답 26

STEP A 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하기

x에 대한 이차방정식 $n(n+1)x^2-(2n+1)x+1=0$의 서로 다른 두 실근을 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=\frac{2n+1}{n(n+1)},\ \alpha_n\beta_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

STEP B $\alpha_n+\beta_n-\alpha_n\beta_n$의 값을 n에 관하여 정리하기

$$\alpha_n+\beta_n-\alpha_n\beta_n=\frac{2n+1}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2}{n+1}$$

STEP C 주어진 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값의 합 구하기

$$\left\{\frac{2^{\alpha_n}\times 2^{\beta_n}}{(2^{\alpha_n})^{\beta_n}}\right\}^8=\left(\frac{2^{\alpha_n+\beta_n}}{2^{\alpha_n\beta_n}}\right)^8$$
$$=(2^{\alpha_n+\beta_n-\alpha_n\beta_n})^8$$
$$=(2^{\frac{2}{n+1}})^8$$
$$=2^{\frac{16}{n+1}}$$

이때 $2^{\frac{16}{n+1}}$의 값이 자연수가 되려면 $\frac{16}{n+1}$이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 자연수 n의 값은 1, 3, 7, 15이므로 n의 합은 $1+3+7+15=26$

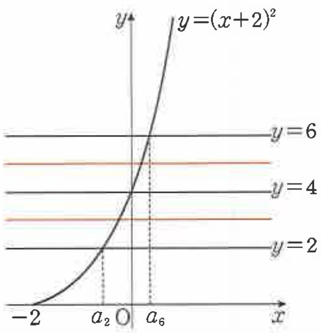
← $n+1$이 16의 양의 약수이면 주어진 값이 자연수가 된다.

0113

정답 26

STEP A $a_n<0$, $a_n=0$인 경우 $F(n)$의 값 구하기

두 함수 $y=(x+2)^2\ (x\ge-2)$, $y=n$의 그래프는 다음과 같다.



(i) $n=2$, 3일 때,

$a_n<0$이므로 $F(2)=0$, $F(3)=1$

(ii) $n=4$일 때,

$a_n=0$이므로 $F(4)=1$

STEP B $a_n>0$인 경우 $F(n)$의 값 구하기

(iii) $n\ge5$일 때, $a_n>0$

① 5 이상인 홀수 n에 대하여 n제곱하여 양수 a_n이 되는 실수는 $\sqrt[n]{a_n}$이므로 $F(5)=F(7)=F(9)=\cdots=F(19)=1$

② 6 이상인 짝수 n에 대하여 n제곱하여 양수 a_n이 되는 실수는 $\sqrt[n]{a_n}$, $-\sqrt[n]{a_n}$이므로 $F(6)=F(8)=F(10)=\cdots=F(20)=2$

STEP C 주어진 값 구하기

따라서 $F(2)+F(3)+F(4)+\cdots+F(20)=0+1+1+(1\times8)+(2\times8)$
$=26$

0114

정답 51

STEP A 거듭제곱근의 정의를 이용하여 $f(n)$의 값 구하기

$(7-2n)^3$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이므로

(i) $n=2$일 때,

$(7-4)^3$의 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 2이므로 $f(2)=2$

(ii) $n=3$일 때,

$(7-6)^3$의 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(3)=1$

(iii) $n\ge4$일 때,

$(7-2n)^3<0$이므로

$n=4, 6, 8, \cdots, 100$일 때, $f(n)=0$

$n=5, 7, 9, \cdots, 99$일 때, $f(n)=1$

STEP B $f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(100)$의 값 구하기

따라서 $f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(100)=2+1+48=51$

0115

정답 (1) 6 (2) 900 (3) 1

STEP A $a^x=k$이면 $a=k^{\frac{1}{x}}$임을 이용하기

(1) $2^x=3^y=6^z=a$에서 $2=a^{\frac{1}{x}}$, $3=a^{\frac{1}{y}}$, $6=a^{\frac{1}{z}}$

$2\cdot3\cdot6=a^{\frac{1}{x}}\cdot a^{\frac{1}{y}}\cdot a^{\frac{1}{z}}=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$이므로 $a^2=36$

따라서 $a=6$

(2) $2^x=3^y=5^z=a$에서 $a^{\frac{1}{x}}=2$, $a^{\frac{1}{y}}=3$, $a^{\frac{1}{z}}=5$이므로

$a^{\frac{1}{x}}\times a^{\frac{1}{y}}\times a^{\frac{1}{z}}=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=30$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$이므로 $a^{\frac{1}{2}}=30$

따라서 양변을 제곱하면 $a=900$

(3) $2^x=5^{-y}=10^{\frac{z}{2}}=k\ (k>0)$로 놓으면

$2=k^{\frac{1}{x}}$, $5=k^{-\frac{1}{y}}$, $10=k^{\frac{2}{z}}$

따라서 $10=2\cdot5=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}$이므로 $a=1$

0116

정답 (1) 10 (2) $2\sqrt{5}$

STEP A 산술평균과 기하평균을 이용하여 최솟값 구하기

(1) 점 (a, b)가 직선 $y=-3x+6$ 위에 있으므로 $b=-3a+6$

$5^a+(\sqrt[3]{5})^b=5^a+5^{\frac{b}{3}}=5^a+5^{-a+2}$이므로

$5^a+5^{-a+2}\ge2\sqrt{5^a\times5^{-a+2}}=2\sqrt{5^2}=2\cdot5=10$

(단, 등호는 $a=-a+2$일 때, 즉 $a=1$일 때 성립)

따라서 $5^a+(\sqrt[3]{5})^b$의 최솟값은 10

(2) $(2^{-a}\div2^{4b})^{-2}=2^8$에서 $2^{2a+8b}=2^8$이므로 $2a+8b=8$

즉 $\frac{a}{4}+b=1$이므로

$(\sqrt[4]{5})^a+5^b=5^{\frac{a}{4}}+5^b\ge2\sqrt{5^{\frac{a}{4}}\times5^b}=2\sqrt{5^{\frac{a}{4}+b}}=2\sqrt{5}$

따라서 $(\sqrt[4]{5})^a+5^b$의 최솟값은 $2\sqrt{5}$

0117

정답 64

STEP Ⓐ 정육면체의 부피가 a^4임을 이용하여 x, a의 관계식 구하기

정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면 정육면체의 부피는 a^4이므로

$x^3=a^4$ $\therefore x=a^{\frac{4}{3}}$ ⋯⋯ ㉠

STEP Ⓑ 정삼각형의 넓이를 이용하여 양수 a의 값 구하기

이때 색칠한 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}x$이므로 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2}x)^2=8\sqrt{3}a^2$ $\therefore x=4a$

따라서 ㉠에서 $4a=a^{\frac{4}{3}}$이므로 양변을 a로 나누면 $4=a^{\frac{1}{3}}$, $a=4^3=64$

내신연계 출제문항 050

넓이가 $\sqrt[3]{64}\pi$인 원의 둘레의 길이를 $a\pi$, 부피가 $\sqrt[4]{27}$인 정육면체의 겉넓이를 b라 할 때, $ab=2^{\alpha}3^{\beta}$이 성립한다. 이때 유리수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

STEP Ⓐ 원의 반지름의 길이 r 구하기

원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\pi r^2=\sqrt[3]{32}\pi$

$r>0$이므로 $r=\sqrt[6]{32}=\sqrt[6]{2^5}=2$

원의 둘레의 길이 $a\pi$는 $a\pi=2\pi r=2\pi\times2=2^2\pi$

$\therefore a=2^2$

STEP Ⓑ 정육면체의 한 모서리의 길이 x 구하기

정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

부피는 $x^3=\sqrt[4]{27}$

$x>0$이므로 $x=\sqrt[12]{27}=\sqrt[12]{3^3}=3^{\frac{1}{4}}$

정육면체의 겉넓이 b는 $b=6x^2=6\times(3^{\frac{1}{4}})^2=2\times3\times3^{\frac{1}{2}}=2\times3^{\frac{3}{2}}$

STEP Ⓒ ab의 값 구하기

$ab=2^2\times2\times3^{\frac{3}{2}}=2^3\times3^{\frac{3}{2}}$이므로 $\alpha=3$, $\beta=\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{9}{2}$

정답 ⑤

0118

정답 16

STEP Ⓐ 함수 $y=x^n$과 직선 $y=a$의 교점의 x좌표 구하기

함수 $y=x^n\,(x>0)$과 직선 $y=a\,(2\le a\le100$, a는 자연수$)$의 교점의 x좌표는 $\sqrt[n]{a}$

STEP Ⓑ $\sqrt[n]{a}$가 자연수가 되는 순서쌍 (n, a)의 개수 구하기

$\sqrt[n]{a}$가 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (n, a)는

(i) $n=2$일 때, $(2, 2^2)$, $(2, 3^2)$, $\cdots$, $(2, 10^2)$의 9개

(ii) $n=3$일 때, $(3, 2^3)$, $(3, 3^3)$, $(3, 4^3)$의 3개

(iii) $n=4$일 때, $(4, 2^4)$, $(4, 3^4)$의 2개

(iv) $n=5$일 때, $(5, 2^5)$의 1개

(v) $n=6$일 때, $(6, 2^6)$의 1개

(i)~(v)에 의하여 조건을 만족하는 순서쌍 (n, a)의 개수는

$9+3+2+1+1=16$

0119

정답 16

STEP Ⓐ 그래프에서 b, c를 a에 대하여 나타내기

점 P_2는 정사각형 OQ_1AB 위에 있으므로 점 B의 y좌표는 a

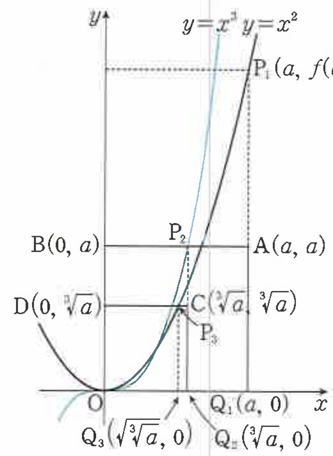
이때 점 P_2는 $y=x^3$ 위에 있으므로 P_2의 x좌표는 $\sqrt[3]{a}$

$\therefore b=\sqrt[3]{a}$

점 P_3는 정사각형 OQ_2CD 위에 있으므로 P_3의 y좌표는 $\sqrt[3]{a}$

이때 점 P_3는 $y=x^2$ 위에 있으므로 P_3의 x좌표는 $\sqrt[6]{a}$

$\therefore c=\sqrt[6]{a}$



STEP Ⓑ 다항함수와 지수의 성질을 이용하여 미지수 구하기

$bc=\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}=a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}$

즉 $bc=2$이므로 $a^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore a=4$

따라서 점 P_1의 y좌표의 값은 $a^2=16$

0120

정답 2

STEP Ⓐ 주어진 조건에 대입하여 정리하기

$a>0$에서 $0<2^{-\frac{2}{a}}<1$이므로 $1-2^{-\frac{2}{a}}>0$

$$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})}{Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})}=\frac{1-(2^{-\frac{2}{a}})^2}{1-2^{-\frac{2}{a}}}=\frac{(1-2^{-\frac{2}{a}})(1+2^{-\frac{2}{a}})}{1-2^{-\frac{2}{a}}}=1+2^{-\frac{2}{a}}$$

STEP Ⓑ $\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$을 만족하는 a의 값 구하기

$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$이므로 $1+2^{-\frac{2}{a}}=\frac{3}{2}$, $2^{-\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}=2^{-1}$

따라서 $-\frac{2}{a}=-1$이므로 $a=2$

다른풀이 치환을 이용하여 풀이하기

STEP Ⓐ $2^{-\frac{2}{a}}=t$로 치환하여 t의 값 구하기

$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$에서 $2Q(4)=3Q(2)$

$2Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})=3Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})$

$2^{-\frac{2}{a}}=t$로 놓으면 $a>0$이므로 $0<t<1$

$2(1-t^2)=3(1-t)$, $2(1-t)(1+t)=3(1-t)$

$2(1+t)=3$에서 $t=\frac{1}{2}$

STEP Ⓑ 지수방정식을 이용하여 a의 값 구하기

즉 $2^{-\frac{2}{a}}=2^{-1}$이므로 $-\frac{2}{a}=-1$

따라서 $a=2$

0121

정답 8

STEP A 주어진 조건을 이용하여 v_A, v_B의 식 구하기

수도관 A의 단면인 원의 넓이 $S=\pi a^2$

둘레의 길이 $L=2\pi a$이고 기울기가 $I=0.01$

물의 속력 v_A이므로 주어진 식에 대입하면

$$v_A=c\left(\frac{\pi a^2}{2\pi a}\right)^{\frac{2}{3}}(0.01)^{\frac{1}{2}}=\frac{c}{10}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

수도관 B의 단면인 원의 넓이 $S=\pi b^2$

둘레의 길이 $L=2\pi b$이고 기울기가 $I=0.04$

물의 속력 v_B이므로 주어진 식에 대입하면

$$v_B=c\left(\frac{\pi b^2}{2\pi b}\right)^{\frac{2}{3}}(0.04)^{\frac{1}{2}}=\frac{2c}{10}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

STEP B $\frac{v_A}{v_B}=2$임을 이용하여 $\frac{a}{b}$의 값 구하기

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\frac{c}{10}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2c}{10}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=2$$

따라서 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4$이므로 $\frac{a}{b}=8$

0122

정답 0.35

STEP A $\frac{Q_A}{Q_B}$를 식으로 나타내기

수온이 동일하고 A조개와 B조개의 개체중량이 같으므로

$\frac{Q_A}{Q_B}$의 식을 먼저 구해보면

$$\frac{Q_A}{Q_B}=\frac{0.01t^{1.25}\omega^{0.25}}{0.05t^{0.75}\omega^{0.30}}=\frac{t^{0.5}}{5\omega^{0.05}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

STEP B $t=20$, $\omega=8$을 대입하여 a, b의 값 구하기

$t=20$, $\omega=8$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{Q_A}{Q_B}=\frac{20^{0.5}}{5\times8^{0.05}}=\frac{(4\times5)^{0.5}}{5\times2^{0.15}}&=5^{-1}\times(2^2\times5)^{0.5}\times(2^3)^{-0.05}\\&=5^{-1}\times2\times5^{0.5}\times2^{-0.15}\\&=2^{1-0.15}\times5^{-1+0.5}\\&=2^{0.85}\times5^{-0.5}\end{aligned}$$

따라서 $a=0.85$, $b=-0.5$이므로 $a+b=0.85+(-0.5)=0.35$

mapl YOUR MASTER PLAN

MEMO

I 지수함수와 로그함수

02 로그

STEP 1 내신 정복 기출 유형

0123

정답 ②

STEP A 로그의 정의를 이용하여 로그의 식을 지수의 식으로 나타내기

$\log_2 a=-1$에서 로그의 정의에 의하여 $a=2^{-1}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\log_b 9=2$에서 로그의 정의에 의하여 $b^2=9=3^2$

$\therefore\ b=3$

따라서 $ab=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$

0124

정답 ③

STEP A 로그의 정의를 이용하여 로그의 식을 지수의 식으로 나타내기

조건 (가)에서 $\log_3 a=2$이므로 로그의 정의에 의하여

$3^2=a\quad \therefore\ a=9$

조건(나)에서 $\log_b a=\log_b 9=2$이고 로그의 정의에 의하여

$b^2=9$이므로 $b=3$ 또는 $b=-3$

STEP B 로그의 밑과 진수의 조건을 만족시키는 a, b의 값 구하기

이때 로그의 밑의 조건에서 b는 1이 아닌 양수이므로 $b=3$

따라서 구하는 값은 $a+b=9+3=12$

0125

정답 ④

STEP A 로그의 정의를 이용하여 a, b의 값 구하기

$\log_2 ab=8$에서 로그의 정의에 의하여 $ab=2^8$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2 \frac{a}{b}=2$에서 로그의 정의에 의하여 $\frac{a}{b}=2^2$

즉 $a=2^2b$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2^2b^2=2^8$

즉 $b=2^3$이므로 $a=2^5$

STEP B $\log_2(a+4b)$의 값 구하기

$$\begin{aligned}\text{따라서 } \log_2(a+4b)&=\log_2(2^5+4\cdot 2^3)\\&=\log_2(2^5+2^5)\\&=\log_2 2^6\\&=6\end{aligned}$$

내신연계 출제문항 051

두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

> (가) $\log_a b=\frac{4}{3}$
> (나) $\log_9 a+\log_3 b=11$

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 81

STEP A 로그의 정의를 이용하여 a, b의 관계식 구하기

조건 (가)에서 $\log_a b=\frac{4}{3}$에서 로그의 정의에 의하여

$b=a^{\frac{4}{3}}$ ⋯⋯ ㉠

STEP B 로그의 성질을 이용하여 a, b의 값 구하기

조건 (나)에서

$\log_9 a+\log_3 b=\log_9 a+\log_9 b^2=\log_9 ab^2=11$에서

$ab^2=9^{11}$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2=a^{\frac{11}{3}}=9^{11}$

$\therefore\ a=9^3$

㉠에서 $b=a^{\frac{4}{3}}=(9^3)^{\frac{4}{3}}=9^4$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{9^4}{9^3}=9$

정답 ③

0126

정답 ③

STEP A 로그의 정의를 이용하여 3^x, 3^{-x}의 값 구하기

$x=\log_3(2+\sqrt{3})$에서 로그의 정의에 의하여 $3^x=2+\sqrt{3}$

$3^{-x}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

STEP B 주어진 값 구하기

따라서 $\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

0127

정답 ③

STEP A $a=\log(1+\sqrt{2})$에서 10^{2a}의 값 구하기

$a=\log(1+\sqrt{2})$에서 로그의 정의에 의하여

$10^a=1+\sqrt{2}$이므로 $10^{2a}=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$

STEP B 주어진 식의 분모, 분자에 10^a를 곱하여 계산하기

따라서 $\frac{10^a+10^{-a}}{10^a-10^{-a}}=\frac{10^{2a}+1}{10^{2a}-1}=\frac{4+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

내신연계 출제문항 052

$x=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1)$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(3+2\sqrt{2})$일 때, 2^x+2^y의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 6 ⑤ $6\sqrt{2}$

STEP A 로그의 정의를 이용하여 2^x, 2^y의 값 구하기

$x=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1)$에서 로그의 정의에 의하여

$(\sqrt{2})^x=\sqrt{2}+1$이므로 양변을 제곱하면

$2^x=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$

$y=\log_{\frac{1}{2}}(3+2\sqrt{2})$에서 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{2}\right)^y=3+2\sqrt{2}$이므로 $2^y=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$

STEP B 주어진 값 구하기

따라서 $2^x+2^y=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$

정답 ④

0128
정답 ②

STEP A $\frac{8}{n}$이 될 수 있는 값 구하기

$\log_2 \frac{8}{n}$과 n이 자연수이므로

$\frac{8}{n}=2^k$ (k은 자연수)꼴이고 n은 8의 약수이어야 한다.

즉 $\frac{8}{n}=2$ 또는 $\frac{8}{n}=4$ 또는 $\frac{8}{n}=8$이므로

$n=4$ 또는 $n=2$ 또는 $n=1$ ← $\frac{8}{n}=1$이면 $\log_2 \frac{8}{n}=\log_2 1=0$이므로 자연수가 아니다.

따라서 모든 n의 값의 합은 $1+2+4=7$

내신연계 출제문항 053

100 이하의 자연수 n에 대하여 $\log_2 \frac{n}{6}$이 자연수가 되는 모든 n의 값의 합은?

① 120 ② 140 ③ 160
④ 180 ⑤ 200

STEP A 로그의 정의에 의하여 지수꼴로 나타내어 n의 값 구하기

$\log_2 \frac{n}{6}=k$ (k는 자연수)라 하면

$\frac{n}{6}=2^k$, $n=3\times 2^{k+1}$

STEP B 모든 n의 값의 합 구하기

n이 100 이하인 자연수이므로 가능한 k는 1, 2, 3, 4이다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 $3(2^2+2^3+2^4+2^5)=180$ 정답 ④

0129
정답 ①

STEP A $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되는 n의 값 구하기

$5\log_n 2$의 값이 자연수가 되려면

$\log_n 2=1$ 또는 $\log_n 2=\frac{1}{5}$이어야 한다.

$\log_n 2=1$에서 $n=2$

$\log_n 2=\frac{1}{5}$에서 $n=2^5=32$

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은 $2+32=34$

다른풀이 로그꼴을 지수꼴로 바꾸어 자연수 n 구하기

$5\log_n 2=k$ (단, k는 자연수)라 하면

$\log_n 2=\frac{k}{5}$이므로 $n^{\frac{k}{5}}=2$

이때 $n=2^{\frac{5}{k}}$ (자연수)이므로
자연수 $k=1$이면 $n=2^5=32$
자연수 $k=5$이면 $n=2^1=2$
따라서 구하는 모든 n의 값의 합은 $2+32=34$

내신연계 출제문항 054

$\frac{1}{4}\log 2^{2n}+\frac{1}{2}\log 5^n$이 정수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 n의 개수는?

① 28 ② 25 ③ 22
④ 19 ⑤ 16

STEP A 로그의 성질을 이용하여 정리하기

$\frac{1}{4}\log 2^{2n}+\frac{1}{2}\log 5^n=\frac{n}{2}\log 2+\frac{n}{2}\log 5=\frac{n}{2}\log 10=\frac{n}{2}$

STEP B 정수가 되는 50 이하의 자연수 n의 개수 구하기

$\frac{n}{2}$이 정수이므로 n은 2의 배수이다.

따라서 50 이하의 자연수 n의 개수는 25 정답 ②

0130
정답 ④

STEP A 로그의 밑과 진수의 조건을 이용하여 x에 대한 부등식으로 나타내기

$\log_{(x-3)}(-x^2+9x-14)$가 정의되기 위해서는

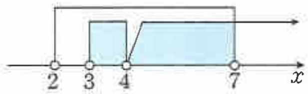
밑의 조건에 의해 $x-3>0$, $x-3\neq 1$ $\therefore x>3$, $x\neq 4$ …… ㉠

진수의 조건에 의해 $-x^2+9x-14>0$

$x^2-9x+14<0$, $(x-2)(x-7)<0$ $\therefore 2<x<7$ …… ㉡

STEP B 두 조건을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위 구하기

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $3<x<7$, $x\neq 4$



따라서 정수 x는 5, 6이므로 합은 11

0131
정답 ①

STEP A 밑 조건을 이용하여 x값의 범위 구하기

$\log_{|x-1|}(-x^2+2x+3)$가 정의되기 위해서는

로그의 밑의 조건으로부터 $|x-1|>0$, $|x-1|\neq 1$

$\therefore x\neq 1$, $x\neq 0$, $x\neq 2$ …… ㉠

STEP B 진수의 조건을 이용하여 x의 범위 구하기

로그의 진수의 조건으로부터 $-x^2+2x+3>0$

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면

$-1<x<0$ 또는 $0<x<1$ 또는 $1<x<2$ 또는 $2<x<3$

따라서 정수 x는 없으므로 0개이다.

내신연계 출제문항 055

$\log_{|x+1|}(-x^2+x+2)$가 정의되도록 하는 정수 x의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

STEP A 밑 조건을 이용하여 x값의 범위 구하기

$\log_{|x+1|}(-x^2+x+2)$가 정의되기 위해서는

로그의 밑의 조건으로부터 $|x+1|>0$, $|x+1|\neq 1$

$\therefore x\neq -1$, $x\neq 0$, $x\neq -2$ …… ㉠

STEP B 진수의 조건을 이용하여 x의 범위 구하기

로그의 진수의 조건으로부터 $-x^2+x+2>0$

$x^2-x-2<0$, $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면

$-1<x<0$ 또는 $0<x<2$

따라서 정수 x는 1이므로 1개이다. 정답 ②

0132

정답 ④

STEP A 로그의 밑과 진수의 조건을 이용하여 x에 대한 부등식으로 나타내기

$\log_{(x-1)^2}(-x^2+8x-7)$가 정의되기 위해서는

로그의 밑의 조건으로부터 $(x-1)^2>0$, $(x-1)^2\neq1$이어야 한다.

$\therefore x\neq1,\ x\neq0,\ x\neq2$ …… ㉠

로그의 진수의 조건으로부터 $-x^2+8x-7>0$

$x^2-8x+7<0$, $(x-1)(x-7)<0$

$\therefore 1<x<7$ …… ㉡

STEP B 두 조건을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위 구하기

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $1<x<2$ 또는 $2<x<7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x의 개수는 3, 4, 5, 6의 4개이다.

0133

정답 ③

STEP A 밑의 조건을 이용하여 x값의 범위 구하기

$\log_{x-1}\{x(n-x)\}$가 정의되기 위해서는

로그의 밑의 조건으로부터 $x-1>0$, $x-1\neq1$

$x>1$, $x\neq2$ …… ㉠

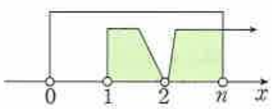
STEP B 진수의 조건을 이용하여 x의 범위 구하기

로그의 진수의 조건에 의하여

$x(n-x)>0$, $x(x-n)<0$

$\therefore 0<x<n$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<n$, $x\neq2$



따라서 정수 x는 3, 4, 5, $\cdots$, $n-1$이므로 개수는 $n-3$이므로 $n-3=50$

$\therefore n=53$

0134

정답 ②

STEP A 밑의 조건을 이용하여 a 값의 범위 구하기

로그의 밑의 조건에서 $a>0$, $a\neq1$

$\therefore 0<a<1$ 또는 $a>1$ …… ㉠

STEP B 진수의 조건을 이용하여 a의 범위 구하기

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+a+3>0$이어야 하므로

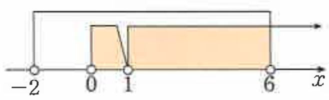
이차방정식 $x^2+ax+a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(a+3)<0$, $a^2-4a-12<0$

$(a+2)(a-6)<0$

$\therefore -2<a<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $0<a<1$ 또는 $1<a<6$



따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 $2+3+4+5=14$

0135

정답 ①

STEP A 밑의 조건을 이용하여 a의 값 구하기

밑의 조건에서 $|a-1|>0$, $|a-1|\neq1$

$\therefore a\neq0,\ a\neq1,\ a\neq2$인 모든 실수 …… ㉠

STEP B 진수의 조건을 이용하여 a의 범위 구하기

진수 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+a>0$이어야 하므로

이차방정식 $x^2+ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a<0$

$a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통범위에 의하여 정수 a의 값은 3이므로 1개이다.

내신연계 출제문항 056

모든 실수 x에 대하여

$$\log_{(a-1)}(x^2-2ax+5a)$$

가 정의될 때, 정수 a의 값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

STEP A 밑의 조건을 이용하여 a의 값의 범위 구하기

$\log_{(a-1)}(x^2-2ax+5a)$가 정의되기 위해서는

로그의 밑의 조건에서 $a-1>0$, $a-1\neq1$

$\therefore 1<a<2$ 또는 $a>2$ …… ㉠

STEP B 진수의 조건을 이용하여 a의 범위 구하기

진수 조건에 의해 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+5a>0$이어야 하므로

이차방정식 $x^2-2ax+5a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-5a<0$

$a(a-5)<0$

$\therefore 0<a<5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a의 값의 범위는 $1<a<2$ 또는 $2<a<5$

따라서 구하는 정수 a의 값은 3, 4이므로 구하는 합은 $3+4=7$ 정답 ②

0136

정답 ③

STEP A 밑의 조건을 이용하여 a의 조건 구하기

$\log_{|a-3|}(ax^2+ax+2)$가 정의되기 위해서는

로그의 밑의 조건에 의해 $|a-3|>0$, $|a-3|\neq1$

$\therefore a\neq3,\ a\neq4,\ a\neq2$인 모든 실수 …… ㉠

STEP B 진수의 조건을 이용하여 a의 범위 구하기

로그의 진수 조건에 의해 모든 실수 x에 대하여

$ax^2+ax+2>0$이 성립하려면

(i) $a=0$일 때, $2>0$이므로 성립한다.

(ii) $a>0$일 때, $ax^2+ax+2>0$이므로

이차방정식 $ax^2+ax+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8a<0$

$a(a-8)<0$ $\therefore 0<a<8$

(i), (ii)에서 $0\leq a<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면

$0\leq a<2$ 또는 $2<a<3$ 또는 $3<a<4$ 또는 $4<a<8$

따라서 정수 a는 0, 1, 5, 6, 7이므로 5개이다.

내/신/연/계/ 출제문항 057

모든 실수 x에 대하여

$$\log_{|a-1|}(ax^2-ax+3)$$

이 정의되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

STEP A 밑의 조건을 이용하여 a의 조건 구하기

$\log_{|a-1|}(ax^2-ax+3)$이 정의되기 위해서는
로그의 밑의 조건에 의해 $|a-1|>0$, $|a-1|\neq 1$
$\therefore a\neq 1,\ a\neq 0,\ a\neq 2$인 모든 실수 …… ㉠

STEP B 진수조건을 이용하여 a의 범위 구하기

로그의 진수 조건에 의해 모든 실수 x에 대하여 $ax^2-ax+3>0$이 성립하려면
(i) $a=0$일 때, $3>0$이므로 성립한다.
(ii) $a>0$일 때, $ax^2-ax+3>0$이므로
이차방정식 $ax^2-ax+3=0$의 판별식 D는
$D=a^2-12a<0$
$a(a-12)<0$
$\therefore 0<a<12$
(i), (ii)에서 $0\leq a<12$ …… ㉡
따라서 ㉠, ㉡에 의하여 정수 a는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11이므로 9개이다.

정답 ⑤

0137

정답 ③

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

① $\log_{10}10=1$
② $\log_7 1=0$
③ $\log_{\sqrt{2}}8=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^3=2\times 3\log_2 2=6$
④ $\log_3 42=\log_3(3\times 2\times 7)=1+\log_3 2+\log_3 7$
⑤ $\log_5\sqrt{10}=\log_5(2\times 5)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(1+\log_5 2)$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

0138

정답 ⑤

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

① $4^{-\frac{1}{2}}\times\log_2 4=(2^2)^{-\frac{1}{2}}\times\log_2 2^2=2^{2\times(-\frac{1}{2})}\times 2\log_2 2$
$=2^{-1}\times 2$
$=2^0=1$ [참]
② $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\times\log_3 81=\frac{1}{\sqrt[3]{2^3}}\times\log_3 3^4=\frac{1}{2}\times 4=2$ [참]
③ $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}\times\log_2\frac{1}{16}=\log_{2^{-1}}2^{\frac{5}{2}}\times\log_2 2^{-4}=-\frac{5}{2}\log_2 2\times(-4\log_2 2)$
$=-\frac{5}{2}\times(-4)$
$=10$ [참]
④ $\log_4(\sqrt{2^7}\times 4^{\frac{1}{4}})=\log_4(2^{\frac{7}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}})=\log_4 2^{(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})}$
$=\log_{2^2}2^4$
$=\frac{4}{2}\log_2 2$
$=2$ [참]
⑤ $8^{\frac{2}{3}}+\log_2 8=(2^3)^{\frac{2}{3}}+\log_2 2^3=2^2+3=7$ [거짓]
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

내/신/연/계/ 출제문항 058

다음 중 옳지 않은 것은?

① $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\times\log_2 8=48$ ② $\log_2 4\times\log_4 2^{-2}=-2$
③ $27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4=5$ ④ $\log_3\frac{9}{2}+\log_3 6=3$
⑤ $\log_5\frac{9}{25}-\log_5 9=2$

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

① $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\times\log_2 8=(4^{-1})^{-2}\times\log_2 2^3=16\times 3=48$ [참]
② $\log_2 4\times\log_4 2^{-2}=\log_2 2^2\times\log_4 4^{-1}=2\cdot(-1)=-2$ [참]
③ $27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4=(3^3)^{\frac{1}{3}}+2\log_2 2=3+2=5$ [참]
④ $\log_3\frac{9}{2}+\log_3 6=\log_3\left(\frac{9}{2}\times 6\right)=\log_3 3^3=3\log_3 3=3$ [참]
⑤ $\log_5\frac{9}{25}-\log_5 9=(\log_5 9-\log_5 25)-\log_5 9=-\log_5 25$
$=-\log_5 5^2$
$=-2\log_5 5$
$=-2$ [거짓]
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

정답 ⑤

0139

정답 ⑤

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

① $\log_2 16+\log_2\frac{1}{8}=\log_2\left(16\times\frac{1}{8}\right)=\log_2 2=1$ [참]
② $\log_2 6-\log_2\frac{3}{2}=\log_2\frac{6}{\frac{3}{2}}=\log_2 4=\log_2 2^2=2$ [참]
③ $\log_2 40-\log_2 5=\log_2\frac{40}{5}=\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$ [참]
④ $\log_2\frac{24}{5}+\log_2\frac{80}{3}=\log_2\left(\frac{24}{5}\times\frac{80}{3}\right)=\log_2 128=\log_2 2^7=7$ [참]
⑤ $\log_3 12+\log_3 9-\log_3 4=\log_3\left(\frac{12\times 9}{4}\right)=\log_3 3^3=3$ [거짓]
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0140

정답 ⑤

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

① $\log_2 4-\log_{\frac{1}{3}}27=\log_2 2^2-\log_{3^{-1}}3^3=2-(-3)=5$ [참]
② $\log_2\frac{3}{4}+2\log_2\frac{1}{\sqrt{12}}=\log_2\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{12}\right)=\log_2\frac{1}{16}=-4$ [참]
③ $\frac{1}{3}\log_3\sqrt{27}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\log_3 3^{\frac{3}{2}}+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=1$ [참]
④ $\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4=\log_3\frac{6\times 2}{4}=\log_3 3=1$ [참]
⑤ $\log_5(6-\sqrt{11})+\log_5(6+\sqrt{11})=\log_5(6-\sqrt{11})(6+\sqrt{11})$
$=\log_5\{6^2-(\sqrt{11})^2\}$
$=\log_5(36-11)$
$=\log_5 25$
$=\log_5 5^2$
$=2\log_5 5$
$=2$ [거짓]
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0141

정답 ①

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$\log_3\left(\sqrt[3]{81}\times\frac{1}{3}\right)=\log_3\left(\sqrt[3]{3^4}\times\frac{1}{3}\right)$

$=\log_3(3^{\frac{4}{3}}\times 3^{-1})$

$=\log_3 3^{\frac{4}{3}-1}$

$=\log_3 3^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{3}\log_3 3$

$=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$

0142

정답 ④

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$2\log_3\sqrt{18}+\frac{1}{3}\log_3 64-\log_3\frac{8}{9}=\log_3(\sqrt{18})^2+\log_3(4^3)^{\frac{1}{3}}-\log_3\frac{8}{9}$

$=\log_3 18+\log_3 4-\log_3\frac{8}{9}$

$=\log_3\left(18\times 4\times\frac{9}{8}\right)$

$=\log_3 3^4=4$

0143

정답 ⑤

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$2\log_2\sqrt{3}-\log_2 6+7\log_2\sqrt{2}+\log_5 3\sqrt{15}-\log_5 3-\log_5\sqrt{3}$

$=\log_2(\sqrt{3})^2-\log_2 6+\log_2(\sqrt{2})^7+\log_5 3\sqrt{15}-\log_5 3-\log_5\sqrt{3}$

$=\log_2\frac{3\times(\sqrt{2})^7}{6}+\log_5\frac{3\sqrt{15}}{3\sqrt{3}}$

$=\log_2 2^{\frac{5}{2}}+\log_5 5^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

0144

정답 ③

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$2\log_2 a+\log_2\frac{a}{3}-4\log_2\sqrt[4]{a}=\log_2 a^2+\log_2\frac{a}{3}-\log_2(\sqrt[4]{a})^4$

$=\log_2\left(a^2\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{1}{a}\right)$

$=\log_2\frac{a^2}{3}=3$

즉 $\frac{a^2}{3}=2^3=8$이므로 $a^2=24$

0145

정답 ②

STEP A 곱셈공식과 로그의 성질을 이용하여 구하기

$(\log_6 4)^2+(\log_6 9)^2+2\log_6 4\cdot\log_6 9=(\log_6 4+\log_6 9)^2$

$=(\log_6 36)^2$

$=(\log_6 6^2)^2$

$=2^2=4$

내신연계 출제문항 059

$(\log_{10}2)^2+(\log_{10}5)^2+\log_{10}4\cdot\log_{10}5$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

STEP A 곱셈공식과 로그의 성질을 이용하여 구하기

$(\log_{10}2)^2+(\log_{10}5)^2+\log_{10}4\cdot\log_{10}5$

$=(\log_{10}2)^2+(\log_{10}5)^2+2\log_{10}2\cdot\log_{10}5$

$=(\log_{10}2+\log_{10}5)^2$

$=(\log_{10}10)^2$

$=1$

정답 ①

0146

정답 ②

STEP A 로그의 성질을 이용하여 직선의 기울기 구하기

두 점 A $(\sqrt[3]{-125},\ \log_2\sqrt[4]{48})$, B $(-\sqrt{\sqrt[3]{64}},\ \log_2\sqrt[4]{3})$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\log_2\sqrt[4]{3}-\log_2\sqrt[4]{48}}{-\sqrt{\sqrt[3]{64}}-\sqrt[3]{-125}}=\frac{\log_2\sqrt[4]{\frac{3}{48}}}{-\sqrt[6]{2^6}-\sqrt[3]{(-5)^3}}$

$=\frac{\log_2\sqrt[4]{\frac{1}{16}}}{-2-(-5)}$

$=\frac{\log_2\frac{1}{2}}{3}=-\frac{1}{3}$

내신연계 출제문항 060

좌표평면 위의 두 점 $(1,\ \log_2 5)$, $(2,\ \log_2 10)$을 지나는 직선의 기울기는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

STEP A 로그의 성질을 이용하여 직선의 기울기 구하기

두 점 $(1,\ \log_2 5)$, $(2,\ \log_2 10)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\log_2 10-\log_2 5}{2-1}=\log_2\frac{10}{5}=\log_2 2=1$

정답 ①

0147

정답 ⑤

STEP A 직선의 수직 조건과 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구하기

직선 AB는 직선 $y=-x+4$에 수직이므로 직선 AB의 기울기는 1

$\frac{\log_3 b-\log_3 a}{3-(-1)}=1$

$\log_3 b-\log_3 a=\log_3\frac{b}{a}=4$

따라서 $\frac{b}{a}=3^4=81$

0148

정답 ②

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$\log_2(a^3-1)-\log_2(a^2+a+1)=\log_2\dfrac{a^3-1}{a^2+a+1}$

$=\log_2\dfrac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$

$=\log_2(a-1)$

STEP B a의 값을 대입하여 주어진 식의 값 구하기

이때 $a=(\sqrt{2}-1)^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$이므로

(주어진 식)$=\log_2(a-1)$

$=\log_2(\sqrt{2}+1-1)$

$=\log_2\sqrt{2}$

$=\dfrac{1}{2}\log_2 2$

$=\dfrac{1}{2}$

0149

정답 ④

STEP A 로그의 성질을 이용하여 $a+b$, ab의 값 구하기

$\log_2(a+b)=3$에서 $a+b=2^3=8$

$\log_3 a+\log_3 b=1$에서 $\log_3 ab=1$, $ab=3$

STEP B 곱셈공식을 이용하여 구하기

따라서 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2\cdot3=58$

내신연계 출제문항 061

$\log_2(a+b)=3$, $\log_3 a+\log_3 b=2$일 때, $(a-b)^2$의 값은?

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

STEP A 로그의 성질을 이용하여 $a+b$, ab의 값 구하기

$\log_2(a+b)=3$에서 $a+b=2^3=8$

$\log_3 a+\log_3 b=2$에서 $\log_3 ab=2$이므로 $ab=3^2=9$

STEP B 곱셈공식을 이용하여 구하기

따라서 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=64-4\cdot9=28$

정답 ②

0150

정답 ④

STEP A 주어진 식을 연립하여 $\log_3 a$, $\log_3 b$의 값 구하기

$ab=27$의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_3 ab=\log_3 27=3$

$\log_3 ab=\log_3 a+\log_3 b=3$ …… ㉠

$\log_3\dfrac{b}{a}=5$에서 $\log_3\dfrac{b}{a}=\log_3 b-\log_3 a=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\log_3 a=-1$, $\log_3 b=4$

따라서 $4\log_3 a+9\log_3 b=-4+36=32$

내신연계 출제문항 062

$x=\log_2 5$, $8^y=20$일 때, $3y-x$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

STEP A 로그의 정의를 이용하여 $3y$의 값 구하기

$8^y=20$에서 $2^{3y}=20$이므로 $3y=\log_2 20$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $3y-x$의 값 구하기

$3y-x=\log_2 20-\log_2 5=\log_2\dfrac{20}{5}=\log_2 4$

$=\log_2 2^2$

$=2\log_2 2$

$=2\times1$

$=2$

다른풀이 지수법칙을 이용하여 풀이하기

$x=\log_2 5$에서 $2^x=5$

$8^y=(2^3)^y=2^{3y}=20$

$2^{3y-x}=2^{3y}\div2^x=20\div5=4=2^2$이므로

$3y-x=2$

정답 ③

0151

정답 ③

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하기

$\log_{\sqrt{3}}a=2\log_3 a=4\log_9 a=\log_9 a^4$이므로

$\log_9 a^4=\log_9 ab$에서 $a^4=ab$

$a(a^3-b)=0$에서 $b=a^3$ ($\because a>1$)

따라서 $\log_a b=\log_a a^3=3$

다른풀이 밑의 변환 공식을 이용하여 풀이하기

$\log_{\sqrt{3}}a=\log_9 ab$에서 $2\log_3 a=\dfrac{1}{2}\log_3 ab$

$4\log_3 a=\log_3 a+\log_3 b$

$3\log_3 a=\log_3 b$

즉 $3=\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=\log_a b$

내신연계 출제문항 063

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$이고 $\log_3\sqrt{a}=\log_{27}b$일 때, $\log_a ab$의 값은?

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{7}{2}$
④ 5 ⑤ $\dfrac{12}{5}$

STEP A 로그의 성질을 이용하여 a, b의 관계식 구하기

$\log_3\sqrt{a}=\log_{27}b$, $\log_3\sqrt{a}=\log_{3^3}b$, $\log_3\sqrt{a}=\dfrac{1}{3}\log_3 b$

$3\log_3\sqrt{a}=\log_3 b$, $\log_3(\sqrt{a})^3=\log_3 b$

$\therefore b=(\sqrt{a})^3=a^{\frac{3}{2}}$

따라서 $\log_a ab=\log_a a\cdot a^{\frac{3}{2}}=\log_a a^{\frac{5}{2}}=\dfrac{5}{2}$

정답 ②

0152

정답 ③

STEP A $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$을 만족하는 x, y, z의 조건 구하기

$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

그런데 $x+y+z>0$이므로 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

$\therefore\ x-y=0,\ y-z=0,\ z-x=0$

$\therefore\ x=y=z$

STEP B 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\log_2(x-y+2)+\log_2(y-z+4)+\log_2(z-x+8)$

$=\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8$

$=6$

내신연계 출제문항 064

1이 아닌 양수 a, b, c에 대하여

$$\log a+\log b+\log c=0$$

일 때, $\log_a b+\log_b a+\log_a c+\log_c a+\log_b c+\log_c b$의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 3 ⑤ 5

STEP A 로그의 성질을 이용하여 abc의 값 구하기

$\log a+\log b+\log c=0$에서 $\log abc=0$

$\therefore\ abc=1$

STEP B 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\log_a b+\log_b a+\log_a c+\log_c a+\log_b c+\log_c b$

$=\log_a bc+\log_b ac+\log_c ab$

$=\log_a \frac{1}{a}+\log_b \frac{1}{b}+\log_c \frac{1}{c}$

$=-1+(-1)+(-1)=-3$

정답 ②

0153

정답 ②

STEP A 주어진 조건의 밑이 서로 다르므로 밑을 통일시켜 나타내기

$a=b^2=c^3=k$(k는 실수)라 하면

$a=k,\ b=k^{\frac{1}{2}},\ c=k^{\frac{1}{3}}$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 구하기

따라서 $\log_a b+\log_b c+\log_c a=\log_k k^{\frac{1}{2}}+\log_{k^{\frac{1}{2}}} k^{\frac{1}{3}}+\log_{k^{\frac{1}{3}}} k$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3$

$=\frac{25}{6}$

다른풀이 밑을 각각 통일하여 풀이하기

$a=b^2=c^3$에서 $b=a^{\frac{1}{2}},\ c=b^{\frac{2}{3}},\ a=c^3$

따라서 $\log_a b+\log_b c+\log_c a=\log_a a^{\frac{1}{2}}+\log_b b^{\frac{2}{3}}+\log_c c^3$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3$

$=\frac{25}{6}$

내신연계 출제문항 065

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여

$$a^2=b^3=c^5$$

이 성립할 때, $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab$의 값은?

① $\frac{22}{3}$ ② $\frac{23}{3}$ ③ $\frac{25}{3}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{31}{2}$

STEP A 주어진 조건의 밑이 서로 다르므로 밑을 통일시켜 나타내기

$a^2=b^3=c^5=k$ (k는 실수)라 하면 $a=k^{\frac{1}{2}},\ b=k^{\frac{1}{3}},\ c=k^{\frac{1}{5}}$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 구하기

따라서 $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab=\log_{k^{\frac{1}{2}}} k^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{5}}+\log_{k^{\frac{1}{3}}} k^{\frac{1}{5}}k^{\frac{1}{2}}+\log_{k^{\frac{1}{5}}} k^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{3}}$

$=\log_{k^{\frac{1}{2}}} k^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}+\log_{k^{\frac{1}{3}}} k^{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}}+\log_{k^{\frac{1}{5}}} k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$

$=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+3\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)+5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{22}{3}$

정답 ①

0154

정답 ④

STEP A $\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k$로 놓고 로그의 성질을 이용하여 정리하기

조건 (가)에서 $\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k$라 하면 $a=k^3,\ b=k^2,\ c=k^4$

이를 (나)에 대입하면

$\log_8 a+\log_4 b+\log_2 c=\log_8 k^3+\log_4 k^2+\log_2 k^4$

$=\log_2 k+\log_2 k+4\log_2 k$

$=6\log_2 k$

즉 $6\log_2 k=2$

$\log_2 k=\frac{1}{3}$

STEP B $\log_2 abc$의 값 구하기

따라서 $\log_2 abc=\log_2(k^3\times k^2\times k^4)=\log_2 k^9=9\log_2 k=9\times\frac{1}{3}=3$

0155

정답 ①

STEP A 거듭제곱근의 성질을 이용하여 a, b의 관계식 구하기

조건 (가)에서 $\sqrt[3]{a}$는 ab의 네제곱근이므로 ← $(\sqrt[3]{a})^4=ab$

$a^{\frac{4}{3}}=ab\quad \therefore\ b=a^{\frac{1}{3}}$ …… ㉠

STEP B 로그의 성질을 이용하여 a, b의 관계식 구하기

㉠을 조건 (나)에 대입하면

$\log_a bc+\log_b ac=\log_a a^{\frac{1}{3}}c+\log_{a^{\frac{1}{3}}} ac$

$=\frac{1}{3}\log_a a+\log_a c+3(\log_a a+\log_a c)$

$=\frac{10}{3}+4\log_a c=4$

$\log_a c=\frac{1}{6}\quad \therefore\ c=a^{\frac{1}{6}}$ …… ㉡

STEP C $a=\left(\frac{b}{c}\right)^k$를 만족하는 k구하기

㉠, ㉡을 대입하면

$a=\left(\frac{b}{c}\right)^k=\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^k=\left(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\right)^k=a^{\frac{k}{6}}$이므로 $1=\frac{k}{6}$

따라서 $k=6$

0156

정답 ⑤

STEP A 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$$3^{\log_9 4}\times\log_2\sqrt[3]{64}=4^{\log_9 3}\times\log_2\sqrt[3]{2^6}$$
$$=4^{\frac{1}{2}}\times\log_2 2^2$$
$$=(2^2)^{\frac{1}{2}}\times 2$$
$$=2\times2=4$$

0157

정답 ①

STEP A $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$을 이용하여 식을 계산하기

$$4^{\log_2 5}+3^{\log_3 a}=5^{\log_2 4}+a^{\log_3 3}$$
$$=5^{\log_2 2^2}+a^1$$
$$=5^2+a$$
$$=25+a$$

따라서 $25+a=30$에서 $a=5$

0158

정답 ②

STEP A $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$을 이용하여 식을 계산하기

$$2\log_3 5-3\log_{\frac{1}{3}}4-2\log_3 20=\log_3 5^2-(-\log_3 4^3)-\log_3 20^2$$
$$=\log_3\frac{5^2\cdot4^3}{20^2}$$
$$=\log_3 4$$

따라서 $27^{2\log_3 5-3\log_{\frac{1}{3}}4-2\log_3 20}=27^{\log_3 4}=3^{3\log_3 4}=3^{\log_3 4^3}=4^3=64$

내신연계 출제문항 066

$2^{3\log_2 2+\log_2 5-\frac{1}{3}\log_2 8}$의 값은?

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

$$3\log_2 2+\log_2 5-\frac{1}{3}\log_2 8=\log_2 8+\log_2 5-\log_2 2$$
$$=\log_2\frac{8\times5}{2}$$
$$=\log_2 20$$

$2^{\log_2 20}=x$로 놓으면 $\log_2 20=\log_2 x$

따라서 $2^{\log_2 20}=x=20$

정답 ②

0159

정답 ①

STEP A 함숫값을 대입한 후 로그의 성질을 이용하여 정리하기

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{2}{3}\right)\times f\left(\frac{3}{4}\right)\times f\left(\frac{4}{5}\right)\times\cdots\times f\left(\frac{15}{16}\right)$$
$$=3^{\log_2\frac{1}{2}}\times3^{\log_2\frac{2}{3}}\times3^{\log_2\frac{3}{4}}\times\cdots\times3^{\log_2\frac{15}{16}}$$
$$=3^{\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{15}{16}}$$
$$=3^{\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{15}{16}\right)}$$
$$=3^{\log_2\frac{1}{16}}=3^{-4}$$
$$=\frac{1}{81}$$

0160

정답 ③

STEP A 부등식을 이용하여 로그의 정수, 소수 부분 구하기

$1=\log_3 3<\log_3 5<\log_3 9=2$이므로 정수부분은 1

$a=1,\ b=\log_3 5-1=\log_3\frac{5}{3}$

$3^a=3,\ 3^b=3^{\log_3\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$

STEP B 주어진 값 구하기

따라서 $\dfrac{3^a+3^b}{3^{-a}+3^{-b}}=\dfrac{3+\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{5}}=\dfrac{\frac{14}{3}}{\frac{14}{15}}=\dfrac{15}{3}=5$

KEYPOINT

양수 M과 정수 n에 대하여 $a^n\le M<a^{n+1}$ $(a>0,\ a\ne1)$일 때,
⇨ $\log_a a^n\le\log_a M<\log_a a^{n+1}$ $\therefore\ n\le\log_a M<n+1$
⇨ $\log_a M$의 정수 부분은 n, 소수 부분은 $\log_a M-n$이다.

내신연계 출제문항 067

$\log_2 6$의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라고 할 때, $2(2^x+2^y)$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 11 ⑤ 13

STEP A 부등식을 이용하여 로그의 정수, 소수 부분 구하기

$2=\log_2 4<\log_2 6<\log_2 8=3$이므로 정수부분은 2

$x=2,\ y=\log_2 6-2=\log_2\frac{6}{4}=\log_2\frac{3}{2}$

STEP B $2(2^x+2^y)$의 값 구하기

따라서 $2(2^x+2^y)=2(2^2+2^{\log_2\frac{3}{2}})=2\left(4+\frac{3}{2}\right)=2\cdot\frac{11}{2}=11$

정답 ④

0161

정답 ④

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$$\log_3 x+2\log_9 y+3\log_{27}z=\log_3 x+2\log_{3^2}y+3\log_{3^3}z$$
$$=\log_3 x+\log_3 y+\log_3 z$$
$$=\log_3 xyz$$

$\log_3 xyz=2$이므로 $xyz=3^2=9$

STEP B $\{(2^x)^y\}^z$의 값 구하기

따라서 $\{(2^x)^y\}^z=2^{xyz}=2^9=512$

내/신/연/계/ 출제문항 068

세 양수 x, y, z가

$$\log_2 x+2\log_4 y+3\log_8 z=1$$

을 만족시킬 때, $\{(2^{\frac{x}{3}})^{2y}\}^{3z}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$$\log_2 x+2\log_4 y+3\log_8 z=\log_2 x+\frac{2\log_2 y}{\log_2 2^2}+\frac{3\log_2 z}{\log_2 2^3}$$
$$=\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z$$
$$=\log_2 xyz$$

$\log_2 xyz=1$이므로 $xyz=2$

STEP B $\{(2^{\frac{x}{3}})^{2y}\}^{3z}$의 값 구하기

따라서 $\{(2^{\frac{x}{3}})^{2y}\}^{3z}=2^{\frac{x}{3}\cdot 2y\cdot 3z}=2^{2xyz}=4^{xyz}=4^2=16$ 정답 ④

0162

정답 ⑤

STEP A 로그의 성질을 이용하여 [보기]의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $2^{\log_2 1+\log_2 2+\log_2 3+\log_2 4+\log_2 5+\log_2 6}=2^{\log_2(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)}$
$=2^{\log_2 720}=720$ [참]

ㄴ. $\log_2(2^1\times 2^2\times 2^3\times 2^4\times 2^5)^2=\log_2(2^{1+2+3+4+5})^2$
$=\log_2(2^{15})^2$
$=\log_2 2^{30}=30$ [참]

ㄷ. $(\log_2 2^1)(\log_2 2^2)(\log_2 2^3)(\log_2 2^4)(\log_2 2^5)$
$=1\times 2\times 3\times 4\times 5=120$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

내/신/연/계/ 출제문항 069

다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\log_4(\log_3 2)+\log_4(\log_4 3)+\log_4(\log_5 4)+\cdots$
$+\log_4(\log_{16}15)=-1$

ㄴ. $\log_6(37^{\frac{1}{8}}-1)(37^{\frac{1}{8}}+1)(37^{\frac{1}{4}}+1)(37^{\frac{1}{2}}+1)=2$

ㄷ. $\log_2(\log_2 2^4\times\log_3 3^4\times\cdots\times\log_{11}11^4)=20$

ㄹ. $\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{3}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots$
$+\log_2\left(1+\frac{1}{63}\right)=5$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

STEP A 로그의 성질을 이용하여 [보기]의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $\log_4(\log_3 2)+\log_4(\log_4 3)+\log_4(\log_5 4)+\cdots+\log_4(\log_{16}15)$
$=\log_4(\log_3 2\times\log_4 3\times\log_5 4\times\cdots\times\log_{16}15)$
$=\log_4(\log_{16}2)$
$=\log_4\frac{1}{4}=\log_{2^2}2^{-2}=-1$ [참]

ㄴ. $\log_6(37^{\frac{1}{8}}-1)(37^{\frac{1}{8}}+1)(37^{\frac{1}{4}}+1)(37^{\frac{1}{2}}+1)$
$=\log_6(37^{\frac{1}{4}}-1)(37^{\frac{1}{4}}+1)(37^{\frac{1}{2}}+1)$ ← $(37^{\frac{1}{8}}-1)(37^{\frac{1}{8}}+1)=(37^{\frac{1}{8}})^2-1=37^{\frac{1}{4}}-1$
$=\log_6(37^{\frac{1}{2}}-1)(37^{\frac{1}{2}}+1)$ ← $(37^{\frac{1}{4}}-1)(37^{\frac{1}{4}}+1)=(37^{\frac{1}{4}})^2-1=37^{\frac{1}{2}}-1$
$=\log_6(37-1)=\log_6 36=2$ [참]

ㄷ. $\log_2(\log_2 2^4\times\log_3 3^4\times\cdots\times\log_{11}11^4)$
$=\log_2(4\times 4\times\cdots\times 4)$
$=\log_2 4^{10}$
$=\log_2 2^{20}=20$ [참]

ㄹ. $\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{3}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log_2\left(1+\frac{1}{63}\right)$
$=\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\log_2\frac{5}{4}+\cdots+\log_2\frac{64}{63}$
$=\log_2\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{64}{63}\right)$
$=\log_2\frac{64}{2}$
$=\log_2 32$
$=\log_2 2^5=5$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 정답 ⑤

0163

정답 ②

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{99}\right)$
$=\log\left\{\left(1+\frac{1}{1}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{99}\right)\right\}$
$=\log\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)$
$=\log 100=\log 10^2=2$

0164

정답 ②

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log\left(1-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log\left(1-\frac{1}{100}\right)$
$=\log\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{100}\right)\right\}$
$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{99}{100}\right)$
$=\log\frac{1}{100}$
$=\log 10^{-2}$
$=-2$

내/신/연/계/ 출제문항 070

$a=\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{30}\right)$일 때,
10^a의 값은?

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$a=\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{30}\right)$
$=\log\left\{\left(1+\frac{1}{1}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{30}\right)\right\}$
$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{31}{30}\right)$
$=\log 31$

STEP B 10^a의 값 구하기

따라서 $10^a=10^{\log 31}=31^{\log 10}=31$ 정답 ④

0165

정답 ③

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$f(x)=\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)=\log_a\frac{x+1}{x}$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=\log_a\frac{2}{1}+\log_a\frac{3}{2}+\log_a\frac{4}{3}+\cdots+\log_a\frac{101}{100}$

$=\log_a\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{101}{100}\right)$

$=\log_a 101$

STEP B $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=1$을 만족하는 a 구하기

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=1$이므로 $\log_a 101=1$

따라서 $a=101$

0166

정답 ④

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$f(x)=\log_3\left(1+\frac{1}{x+2}\right)=\log_3\frac{x+3}{x+2}$이므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\log_3\frac{4}{3}+\log_3\frac{5}{4}+\cdots+\log_3\frac{n+3}{n+2}$

$=\log_3\left(\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n+3}{n+2}\right)$

$=\log_3\frac{n+3}{3}$

STEP B n의 값 구하기

이때 $\log_3\frac{n+3}{3}=4$이므로 $\frac{n+3}{3}=3^4$, $n+3=243$

따라서 $n=240$

내신연계 출제문항 071

함수 $f(x)=\log_2\left(1+\frac{1}{x+3}\right)$에서

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=3$$

을 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$f(x)=\log_2\left(1+\frac{1}{x+3}\right)=\log_2\frac{x+4}{x+3}$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=\log_2\frac{5}{4}+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{7}{6}+\cdots+\log_2\frac{n+4}{n+3}$

$=\log_2\left(\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{n+4}{n+3}\right)$

$=\log_2\frac{n+4}{4}$

STEP B n의 값 구하기

이때 $\log_2\frac{n+4}{4}=3$이므로 $\frac{n+4}{4}=8$

따라서 $n=28$

정답 ②

0167

정답 ⑤

STEP A 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 구하기

① $\log_2 9\times\log_3\sqrt{2}=\frac{\log 9}{\log 2}\times\frac{\log\sqrt{2}}{\log 3}=\frac{2\log 3}{\log 2}\times\frac{\frac{1}{2}\log 2}{\log 3}$

$=2\times\frac{1}{2}=1$

② $\log_3\sqrt{8}\times\log_2 9=\frac{\log 2^{\frac{3}{2}}}{\log 3}\times\frac{\log 3^2}{\log 2}=\frac{\frac{3}{2}\log 2}{\log 3}\times\frac{2\log 3}{\log 2}$

$=\frac{3}{2}\times 2=3$

③ $\left(\frac{1}{\log_8 2}\right)^3+\log_2 16^2=(\log_2 2^3)^3+\log_2 2^8$

$=3^3+8=27+8=35$

④ $\log_2 48-\log_2 3+\frac{\log_3 64}{\log_3 2}=\log_2\frac{48}{3}+\log_2 64$

$=\log_2 2^4+\log_2 2^6$

$=4+6=10$

⑤ $\log_2(\log_2 3)+\log_2(\log_3 4)=\log_2(\log_2 3\times\log_3 4)$

$=\log_2\left(\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 2^2}{\log 3}\right)$

$=\log_2 2=1$ [거짓]

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

내신연계 출제문항 072

다음 중 옳지 않은 것은?

① $\log_5 27\times\log_3 5=3$
② $\log_2 5\times\log_5 3\times\log_3 16=4$
③ $\log_5 3\times\left(\log_3\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}}125\right)=2$
④ $\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_6 2}-\frac{1}{\log_9 2}=2$
⑤ $\log_2(\log_{25} 3)-\log_2(\log_5 81)=-3$

STEP A 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 구하기

① $\log_5 27\times\log_3 5=\frac{\log 27}{\log 5}\times\frac{\log 5}{\log 3}=\frac{3\log 3}{\log 5}\times\frac{\log 5}{\log 3}=3$

② $\log_2 5\times\log_5 3\times\log_3 16=\log_2 5\times\frac{\log_2 3}{\log_2 5}\times\frac{\log_2 16}{\log_2 3}$

$=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

③ $\log_5 3\times\left(\log_3\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}}125\right)=\log_5 3\times\left(\frac{1}{2}\log_3 5+\frac{3}{2}\log_3 5\right)$

$=\log_5 3\times 2\log_3 5$

$=2\log_5 3\times\log_3 5=2$

④ $\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_6 2}-\frac{1}{\log_9 2}=\log_2 3+\log_2 6-\log_2 9$

$=\log_2\left(3\times 6\times\frac{1}{9}\right)$

$=\log_2 2=1$ [거짓]

⑤ $\log_2(\log_{25} 3)-\log_2(\log_5 81)=\log_2\left(\frac{\log_{25} 3}{\log_5 81}\right)$

$=\log_2\left(\frac{\frac{1}{2}\log_5 3}{4\log_5 3}\right)$

$=\log_2\frac{1}{8}=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

정답 ④

0168

정답 ②

STEP A 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 구하기

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_3 6}+\frac{1}{\log_{12} 6}$$
$$=\log_6 3+\log_6 12$$
$$=\log_6(3\times12)$$
$$=\log_6 6^2$$
$$=2$$

0169

정답 ②

STEP A 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 구하기

$$\frac{1}{\log_4 18}+\frac{2}{\log_9 18}=\log_{18}4+2\log_{18}9$$
$$=\log_{18}2^2+2\log_{18}3^2$$
$$=\log_{18}2^2+\log_{18}(3^2)^2$$
$$=\log_{18}(2^2\times3^4)=\log_{18}(2\times3^2)^2$$
$$=\log_{18}18^2$$
$$=2\log_{18}18$$
$$=2$$

0170

정답 ①

STEP A 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 구하기

$$x=\frac{\log_6 3}{1-\dfrac{\log_2 3}{\log_2 6}}=\frac{\log_6 3}{1-\log_6 3}=\frac{\log_6 3}{\log_6 \dfrac{6}{3}}$$
$$=\frac{\log_6 3}{\log_6 2}$$
$$=\log_2 3$$

따라서 $2^x=2^{\log_2 3}=3$

0171

정답 ②

STEP A 로그의 밑의 변환을 이용하여 식 간단히 하기

$$\frac{1}{\log_3 b}+\frac{1}{\log_9 b}+\frac{1}{\log_{27} b}=\log_b 3+\log_b 9+\log_b 27$$
$$=\log_b 3+\log_b 3^2+\log_b 3^3$$
$$=\log_b 3+2\log_b 3+3\log_b 3$$
$$=6\log_b 3=3\log_b 3^2$$
$$=\frac{3}{\log_9 b}$$

따라서 $a=9$

내신연계 출제문항 073

1이 아닌 양수 x에 대하여

$$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_5 x}=\frac{1}{\log_a x}$$

일 때, 양수 a의 값은?

① 30　② 32　③ 35　④ 48　⑤ 50

STEP A 로그의 밑의 변환을 이용하여 식 간단히 하기

$$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_5 x}=\log_x 2+\log_x 3+\log_x 5$$
$$=\log_x(2\times3\times5)$$
$$=\log_x 30$$
$$=\frac{1}{\log_{30} x}$$

따라서 $a=30$

정답 ①

0172

정답 ④

STEP A 로그의 밑의 변환을 이용하여 식 간단히 하기

$$\frac{3}{\log_2 x}+\frac{2}{\log_3 x}=3\log_x 2+2\log_x 3$$
$$=\log_x(2^3\times3^2)$$
$$=\log_x 72$$
$$=\frac{1}{\log_{72} x}$$

따라서 $a=72$

0173

정답 ④

STEP A 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하기

이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=k$

STEP B 로그의 밑의 변환을 이용하여 k의 값 구하기

$$\log_{(\alpha+\beta)}\beta+\frac{1}{\log_\alpha(\alpha+\beta)}=\log_{(\alpha+\beta)}\beta+\log_{(\alpha+\beta)}\alpha$$
$$=\log_{(\alpha+\beta)}\alpha\beta$$
$$=\log_4 k$$

따라서 $\log_4 k=\frac{1}{2}$이므로 $k=4^{\frac{1}{2}}=2$

내신연계 출제문항 074

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때,

$$\log_{(\alpha+\beta)}\beta+\frac{1}{\log_\alpha(\alpha+\beta)}=2$$

가 성립하도록 하는 양수 k의 값은? (단, $\alpha\neq1$)

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=k$

STEP B 조건을 만족하는 양수 k의 값 구하기

$$\log_{(\alpha+\beta)}\beta+\frac{1}{\log_\alpha(\alpha+\beta)}=\log_{(\alpha+\beta)}\beta+\log_{(\alpha+\beta)}\alpha$$
$$=\log_{(\alpha+\beta)}\alpha\beta$$
$$=\log_2 k$$

따라서 $\log_2 k=2$이므로 $k=2^2=4$

정답 ⑤

0174

정답 ④

STEP A 로그의 성질을 이용하여 a, b의 관계식 구하기

$\log_a c : \log_b c = 2:1$에서 $\log_a c = 2\log_b c$

이때 $\frac{1}{\log_c a} = \frac{2}{\log_c b}$이므로 $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b = 2$

따라서 $\log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

다른풀이 로그의 성질을 이용하여 a, b의 관계식 구하여 풀이하기

$\log_a c : \log_b c = 2:1$이므로 $\log_a c = 2\log_b c$

$\frac{\log c}{\log a} = \frac{2\log c}{\log b}$, $2\log a = \log b$, $\log a^2 = \log b$

∴ $b = a^2$

따라서 $\log_a b + \log_b a = \log_a a^2 + \log_{a^2} a = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

내신연계 출제문항 075

1보다 큰 실수 a, b, c에 대하여

$$\log_a c : \log_b c = 3:2$$

일 때, $\log_a b + \log_b a$의 값은?

① $\frac{11}{6}$ ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{13}{2}$

STEP A 로그의 성질을 이용하여 a, b의 관계식 구하기

$\log_a c : \log_b c = 3:2$에서 $2\log_a c = 3\log_b c$

이때 $\frac{2}{\log_c a} = \frac{3}{\log_c b}$이므로 $2\log_c b = 3\log_c a$

$\log_c b^2 = \log_c a^3$, $b^2 = a^3$

∴ $b = a^{\frac{3}{2}}$

따라서 $\log_a b + \log_b a = \log_a a^{\frac{3}{2}} + \log_{a^{\frac{3}{2}}} a = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$

다른풀이 로그의 성질을 이용하여 a, b의 관계식 구하여 풀이하기

$\log_a c : \log_b c = 3:2$에서 $2\log_a c = 3\log_b c$

이때 $\frac{2}{\log_c a} = \frac{3}{\log_c b}$이므로 $\frac{\log b}{\log a} = \frac{3}{2}$

따라서 $\log_a b + \log_b a = \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$

정답 ②

0175

정답 ③

STEP A $\log_a 2 = x$, $\log_b 2 = y$이라 두고 주어진 식을 변형하기

$\log_a 2 = x$, $\log_b 2 = y$라 하면

$\log_a 2 + \log_b 2 = x + y = 2$

$\log_2 a + \log_2 b = \frac{1}{\log_a 2} + \frac{1}{\log_b 2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = -1$이므로

$\frac{2}{xy} = -1$ ∴ $xy = -2$

STEP B 곱셈공식을 이용하여 $(\log_a 2)^2 + (\log_b 2)^2$의 값 구하기

따라서 $(\log_a 2)^2 + (\log_b 2)^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

$= 2^2 - 2(-2)$

$= 8$

0176

정답 ③

STEP A 로그의 정의를 이용하여 $a+b$, $a-b$의 값 구하기

$5^{a+b} = 4$에서 $a + b = \log_5 4$

$2^{a-b} = 3$에서 $a - b = \log_2 3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = \log_5 4 \times \log_2 3 = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 5} \times \log_2 3$

$= 2 \times \frac{\log_2 3}{\log_2 5}$

$= 2\log_5 3$

STEP B $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$을 이용하여 식을 계산하기

따라서 $5^{a^2-b^2} = 5^{2\log_5 3} = 3^2 = 9$

다른풀이 곱셈공식을 이용하여 주어진 식 변형하기

$5^{a^2-b^2} = (5^{a+b})^{a-b} = 4^{a-b} = (2^{a-b})^2 = 3^2 = 9$

내신연계 출제문항 076

두 실수 a, b가

$$3^{a+b} = 4,\ 2^{a-b} = 5$$

를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값은?

① 9 ② 16 ③ 25
④ 27 ⑤ 36

STEP A 로그의 정의를 이용하여 $a+b$, $a-b$의 값 구하기

$3^{a+b} = 4$에서 $a + b = \log_3 4$ …… ㉠

$2^{a-b} = 5$에서 $a - b = \log_2 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 각 변끼리 각각 곱하면

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = \log_3 4 \times \log_2 5 = \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 2}$

$= 2 \times \frac{\log 5}{\log 3}$

$= 2\log_3 5 = \log_3 5^2 = \log_3 25$

∴ $a^2 - b^2 = \log_3 25$

STEP B 로그의 정의를 이용하여 $a+b$, $a-b$의 값 구하기

따라서 $3^{a^2-b^2} = 3^{\log_3 25} = 25$

다른풀이 곱셈공식을 이용하여 주어진 식 변형하기

$3^{a^2-b^2} = (3^{a+b})^{a-b} = 4^{a-b} = (2^{a-b})^2 = 5^2 = 25$

정답 ③

0177

정답 ③

STEP A 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 ab의 값 구하기

$\frac{\log_a b}{2a} = \frac{3}{4}$이므로 $\log_a b = \frac{3a}{2}$ …… ㉠

$\frac{18\log_b a}{b} = \frac{3}{4}$이므로 $\log_b a = \frac{b}{24}$ …… ㉡

㉠×㉡에서

$\log_a b \times \log_b a = \frac{3a}{2} \times \frac{b}{24} = 1$

따라서 $ab = 16$

내신연계 출제문항 077

$\dfrac{\log_3 4}{a}=\dfrac{\log_3 9}{b}=\dfrac{\log_3 36}{c}=\log_3 6$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　② 4　③ 8
④ 16　⑤ 32

STEP Ⓐ 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 a, b, c의 값 구하기

$\dfrac{\log_3 4}{a}=\log_3 6$에서 $a=\dfrac{\log_3 4}{\log_3 6}=\log_6 4$

$\dfrac{\log_3 9}{b}=\log_3 6$에서 $b=\dfrac{\log_3 9}{\log_3 6}=\log_6 9$

$\dfrac{\log_3 36}{c}=\log_3 6$에서 $c=\dfrac{\log_3 36}{\log_3 6}=\log_6 36$

STEP Ⓑ 로그의 성질을 이용하여 계산하기

따라서 $a+b+c=\log_6 4+\log_6 9+\log_6 36=\log_6(4\times 9\times 36)$

$=\log_6 6^4=4$

정답 ②

0178

정답 ⑤

STEP Ⓐ 밑을 변환하여 로그의 성질을 이용하여 [보기]의 진위판단하기

ㄱ. $\log_2 6\times\log_6 3\times\log_3 16=\log_2 6\times\dfrac{\log_2 3}{\log_2 6}\times\dfrac{\log_2 16}{\log_2 3}$

$=\log_2 16=\log_2 2^4=4$ [참]

ㄴ. $(\log_3 50-\log_3 2)\times\log_5 27=\log_3\dfrac{50}{2}\times\log_5 27$

$=\log_3 25\times\log_5 27$

$=\log_3 5^2\times\log_5 3^3$

$=2\log_3 5\times 3\log_5 3=6$ [참]

ㄷ. $\log_2(\log_3 25)+\log_2(\log_5 9)=\log_2(\log_3 25\times\log_5 9)$

$=\log_2\left(\dfrac{\log_3 25}{\log_3 3}\times\dfrac{\log_3 9}{\log_3 5}\right)$

$=\log_2\left(\dfrac{2\log_3 5}{\log_3 3}\times\dfrac{2\log_3 3}{\log_3 5}\right)$

$=\log_2 4=2$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0179

정답 ③

STEP Ⓐ 밑을 변환하여 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$\dfrac{3}{2}\log_5 3+(\log_5\sqrt{2})(\log_2 25)-\log_5 3\sqrt{15}$

$=(\log_5\sqrt{2})(\log_2 25)+\dfrac{3}{2}\log_5 3-\log_5 3\sqrt{15}$

$=\dfrac{1}{2}\log_5 2\cdot 2\log_2 5+\log_5 3^{\frac{3}{2}}-\log_5 3\sqrt{15}$

$=1+\log_5\dfrac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{15}}$

$=1+\log_5\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$=1-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}$

0180

정답 ④

STEP Ⓐ 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 계산하기

$(\log_2 9+\log_{\sqrt{3}}2)^2-(\log_2 9-\log_{\sqrt{3}}2)^2$

$=(\log_2 9)^2+2\log_2 9\cdot\log_{\sqrt{3}}2+(\log_{\sqrt{3}}2)^2$

$-\{(\log_2 9)^2-2\log_2 9\cdot\log_{\sqrt{3}}2+(\log_{\sqrt{3}}2)^2\}$

$=4\log_2 9\cdot\log_{\sqrt{3}}2$

$=4\log_2 3^2\cdot\log_{3^{\frac{1}{2}}}2$

$=4\cdot 2\cdot 2\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2=16$

0181

정답 ⑤

STEP Ⓐ 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$(\log_4 9+\log_2 27)(\log_3 2+\log_9 8)=(\log_{2^2}3^2+\log_2 3^3)(\log_3 2+\log_{3^2}2^3)$

$=(\log_2 3+3\log_2 3)\left(\log_3 2+\dfrac{3}{2}\log_3 2\right)$

$=4\log_2 3\times\dfrac{5}{2}\log_3 2$

$=4\times\dfrac{5}{2}=10$

0182

정답 ④

STEP Ⓐ 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$(\log_3 2+\log_9 8)(\log_2 3+\log_4 9)=\left(\log_3 2+\dfrac{3}{2}\log_3 2\right)(\log_2 3+\log_2 3)$

$=\dfrac{5}{2}\log_3 2\times 2\log_2 3$

$=5\log_3 2\times\dfrac{1}{\log_3 2}=5$

$(\log_4 5+\log_8 5)(\log_5 2-\log_{25}2)=\left(\dfrac{1}{2}\log_2 5+\dfrac{1}{3}\log_2 5\right)\left(\log_5 2-\dfrac{1}{2}\log_5 2\right)$

$=\dfrac{5}{6}\log_2 5\times\dfrac{1}{2}\log_5 2$

$=\dfrac{5}{12}\log_2 5\times\dfrac{1}{\log_2 5}=\dfrac{5}{12}$

따라서 구하는 값은 $\dfrac{5}{\frac{5}{12}}=12$

내신연계 출제문항 078

$5^{\log_5 3\cdot\log_3 7}+(\log_3 5-\log_{\sqrt{3}}25)(\log_5 3+\log_{\frac{1}{5}}\sqrt[3]{3})$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

STEP Ⓐ 밑을 변환하여 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$5^{\log_5 3\cdot\log_3 7}=5^{\log_5 7}=7$

$\log_3 5-\log_{\sqrt{3}}25=\log_3 5-\dfrac{\log_3 5^2}{\log_3\sqrt{3}}=\log_3 5-4\log_3 5$

$=-3\log_3 5$

$\log_5 3+\log_{\frac{1}{5}}\sqrt[3]{3}=\log_5 3+\dfrac{\log_5\sqrt[3]{3}}{\log_5\frac{1}{5}}=\log_5 3-\dfrac{1}{3}\log_5 3$

$=\dfrac{2}{3}\log_5 3$

$\therefore -3\log_3 5\times\dfrac{2}{3}\log_5 3=-2$

따라서 구하는 값은 $7+(-2)=5$

정답 ⑤

0183

정답 ①

STEP Ⓐ 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 계산하기

$\log(\log_2 3)+\log(\log_3 4)+\log(\log_4 5)+\cdots+\log(\log_{1023} 1024)$

$=\log(\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{1023} 1024)$

$=\log\left(\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 4}\times\cdots\times\frac{\log 1024}{\log 1023}\right)$

$=\log\left(\frac{\log 1024}{\log 2}\right)$

$=\log(\log_2 1024)$

$=\log(\log_2 2^{10})$

$=\log 10$

$=1$

내신연계 출제문항 079

$\log(\log_2 3)+\log(\log_3 4)+\log(\log_4 5)+\cdots+\log(\log_{63} 64)$를 간단히 하면?

① $\log 3$ ② $\log 4$ ③ $\log 5$
④ $\log 6$ ⑤ $\log 7$

STEP Ⓐ 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 계산하기

$\log(\log_2 3)+\log(\log_3 4)+\log(\log_4 5)+\cdots+\log(\log_{63} 64)$

$=\log(\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{63} 64)$

$=\log\left(\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 4}\times\cdots\times\frac{\log 64}{\log 63}\right)$

$=\log\left(\frac{\log 64}{\log 2}\right)$

$=\log(\log_2 64)$

$=\log(\log_2 2^6)$

$=\log 6$

정답 ④

0184

정답 ①

STEP Ⓐ 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 변형하기

$\log_a(\log_2 3)+\log_a(\log_3 4)+\cdots+\log_a(\log_7 8)$

$=\log_a(\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_7 8)$

STEP Ⓑ 로그의 성질을 이용하여 a의 값 구하기

이때 $\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_7 8$

$\frac{\log_2 3}{\log_2 2}\times\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\times\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\times\cdots\times\frac{\log_2 8}{\log_2 7}=\frac{\log_2 8}{\log_2 2}=3$

이므로 주어진 등식은 $\log_a 3=-\frac{1}{2}$이어야 한다.

따라서 $a^{-\frac{1}{2}}=3$이므로 $a=3^{-2}=\frac{1}{9}$

0185

정답 ②

STEP Ⓐ 3^a의 값을 임의로 두고 a, b, c를 로그로 나타내기

$3^a=5^b=k^c=t$라고 하면

$a=\log_3 t$, $b=\log_5 t$, $c=\log_k t$

STEP Ⓑ 조건 $ab=bc+ca$와 로그의 성질을 이용하여 k의 값 구하기

$ab=bc+ca$에서

$\log_3 t\cdot\log_5 t=\log_5 t\cdot\log_k t+\log_k t\cdot\log_3 t$

$\frac{1}{\log_t 3}\cdot\frac{1}{\log_t 5}=\frac{1}{\log_t 5}\cdot\frac{1}{\log_t k}+\frac{1}{\log_t k}\cdot\frac{1}{\log_t 3}$

$\frac{1}{\log_t 3\cdot\log_t 5}=\frac{1}{\log_t k}\left(\frac{1}{\log_t 5}+\frac{1}{\log_t 3}\right)$

$\log_t k=(\log_t 3\cdot\log_t 5)\left(\frac{1}{\log_t 5}+\frac{1}{\log_t 3}\right)=\log_t 3+\log_t 5=\log_t 15$

따라서 $k=15$

다른풀이 $ab=bc+ca$의 양변에 abc로 나누어 $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 유도하기

$3^a=5^b=k^c=t$라고 하면

$a=\log_3 t$, $b=\log_5 t$, $c=\log_k t$ …… ㉠

$ab=bc+ca$의 양변을 abc로 나누면

$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{\log_k t}=\frac{1}{\log_3 t}+\frac{1}{\log_5 t}$

$\log_t k=\log_t 3+\log_t 5=\log_t 15$

따라서 $k=15$

0186

정답 ④

STEP Ⓐ 두 직선이 일치하기 위한 조건 구하기

두 직선 $(\log_2 a)x+(\log_3 8)y+\log_2 b=0$, $(\log_2 3)x+(\log_3 2)y+1=0$

이 일치하기 위해서는 $\frac{\log_2 a}{\log_2 3}=\frac{\log_3 8}{\log_3 2}=\frac{\log_2 b}{1}$

STEP Ⓑ 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 계산하기

$\frac{\log_2 a}{\log_2 3}=\frac{\log_3 8}{\log_3 2}$에서 $\log_3 a=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

$\therefore a=3^3=27$

$\frac{\log_3 8}{\log_3 2}=\frac{\log_2 b}{1}$에서 $\log_2 8=3=\log_2 b$

$\therefore b=2^3=8$

따라서 $a+b=27+8=35$

0187

정답 ②

STEP Ⓐ 로그의 밑변환 공식을 이용하여 $\log_b a$의 값 구하기

$\log_3 a=\frac{1}{\log_b 27}$에서 $\log_3 a\cdot\log_b 3^3=1$

$\log_3 a\times\frac{3}{\log_3 b}=1$, $\frac{\log_3 a}{\log_3 b}=\frac{1}{3}$

$\therefore \log_b a=\frac{1}{3}$

STEP Ⓑ 로그의 성질을 이용하여 계산하기

따라서 $\log_a b^2+\log_b a^2=2(\log_a b+\log_b a)=2\left(3+\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{3}$

0188

정답 ②

STEP A $\log_a b=\log_b a$**에서** a, b**의 관계식 구하기**

$\log_a b=\log_b a$에서 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_a b}$, $(\log_a b)^2=1$

$\therefore \log_a b=1$ 또는 $\log_a b=-1$

a, b는 서로 다른 양수이므로 $\log_a b=-1 \quad \therefore b=\dfrac{1}{a}$

STEP B 산술평균과 기하평균을 이용하여 주어진 식의 최솟값 구하기

$a>0$, $\dfrac{1}{a}>0$이므로

$$(a+1)(b+9)=(a+1)\left(\frac{1}{a}+9\right)=10+9a+\frac{1}{a}$$
$$\geq 10+2\sqrt{9a\times\frac{1}{a}}$$
$$=16$$

따라서 최솟값은 16

다른풀이 밑의 변환공식을 이용하여 풀이하기

$\log_a b=\log_b a$이므로 $\dfrac{\log b}{\log a}=\dfrac{\log a}{\log b}$

$(\log a)^2-(\log b)^2=0$, $\log a=\pm\log b$

그런데 $a\neq b$이므로 $\log a=-\log b=\log\dfrac{1}{b}$

$a=\dfrac{1}{b}$, 즉 $b=\dfrac{1}{a}$이고 $9a>0$, $\dfrac{1}{a}>0$이므로

$$(a+1)(b+9)=(a+1)\left(\frac{1}{a}+9\right)=10+9a+\frac{1}{a}\geq 10+2\sqrt{9a\times\frac{1}{a}}=16$$

(단, 등호는 $9a=\dfrac{1}{a}$, 즉 $a=\dfrac{1}{3}$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 16

내/신/연/계/ 출제문항 080

$a>1$, $b>1$일 때, $(\log_a b)^2+(\log_b a^2)^2$의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 4
④ 8　⑤ 10

STEP A 산술평균과 기하평균을 이용하여 주어진 식의 최솟값 구하기

$a>1$, $b>1$에서 $(\log_a b)^2>0$, $(\log_b a^2)^2>0$이므로

$$(\log_a b)^2+(\log_b a^2)^2=(\log_a b)^2+(2\log_b a)^2$$
$$\geq 2\sqrt{(\log_a b)^2\times(2\log_b a)^2}$$
$$=2\sqrt{\left(\log_a b\times\frac{2}{\log_a b}\right)^2}=4$$

(단, 등호는 $(\log_a b)^2=2$일 때 성립)

따라서 $(\log_a b)^2+(\log_b a^2)^2$의 최솟값은 4 　정답 ③

0189

정답 ③

STEP A 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 a, b, c**의 관계식 구하기**

주어진 식을 밑이 a인 로그로 변환하면

$$\frac{1}{\log_a(b+c)}+\frac{1}{\log_a(c-b)}=\frac{2}{\log_a(c-b)\log_a(b+c)}$$

양변에 $\log_a(c-b)\log_a(b+c)$를 곱하면

$\log_a(c-b)+\log_a(b+c)=2$

로그의 성질에 의하여 $\log_a(c-b)(c+b)=2$이므로 $\log_a(c^2-b^2)=2$

로그의 정의에 의하여 $c^2-b^2=a^2$

따라서 $c^2=a^2+b^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

KEYPOINT

삼각형의 세변의 길이가 a, b, c일 때,
① $a=b=c$ ⇨ 정삼각형
② $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ⇨ 이등변삼각형
③ $c^2=a^2+b^2$ ⇨ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

내/신/연/계/ 출제문항 081

삼각형 ABC의 세 변 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때,

$$\log_c(a+b)+\log_c(a-b)=\log_{(a+b)}c\times\log_c(a+b)^2$$

가 성립한다. 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인가?
(단, $a>b$, $c\neq1$, $a+b\neq1$)

① 빗변이 a인 직각삼각형　② 빗변이 b인 직각삼각형
③ 빗변이 c인 직각삼각형　④ $a=b$인 이등변삼각형
⑤ $a=c$인 이등변삼각형

STEP A 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 a, b, c**의 관계식 구하기**

$\log_c(a+b)+\log_c(a-b)=\log_{(a+b)}c\cdot\log_c(a+b)^2$

$\log_c(a+b)(a-b)=\log_{(a+b)}(a+b)^2=2$

$\log_c(a^2-b^2)=2$

로그의 정의에 의하여 $a^2-b^2=c^2$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변이 a인 직각삼각형이다. 　정답 ①

0190

정답 ③

STEP A 로그의 성질을 이용하여 $\log_6 72$**를** a, b**로 나타내기**

$\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$이므로

$$\log_6 72=\frac{\log_5 72}{\log_5 6}=\frac{\log_5(2^3\times3^2)}{\log_5(2\times3)}$$
$$=\frac{3\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 2+\log_5 3}$$
$$=\frac{3a+2b}{a+b}$$

0191

정답 ①

STEP A $\log_{10}5$**를** a**로 나타내기**

$\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$이므로

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-a$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\log_5 12$**를** a, b**로 나타내기**

$$\text{따라서 } \log_5 12=\frac{\log_{10}12}{\log_{10}5}=\frac{\log_{10}(3\times2^2)}{\log_{10}\frac{10}{2}}$$
$$=\frac{\log_{10}3+2\log_{10}2}{1-\log_{10}2}$$
$$=\frac{b+2a}{1-a}$$

내신연계 출제문항 082

$\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$일 때, $\log_{12}15$를 a, b로 나타내면?

① $\dfrac{a+b}{2a+b}$　② $\dfrac{2a+b}{a+2b}$　③ $\dfrac{1-a+b}{a+b}$
④ $\dfrac{a+2b}{2a+b}$　⑤ $\dfrac{1-a+b}{2a+b}$

STEP A $\log_{10}5$**를** a**로 나타내기**

$\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$이므로

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-a$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\log_{12}15$**를** a, b**로 나타내기**

$$\log_{12}15=\frac{\log_{10}15}{\log_{10}12}=\frac{\log_{10}(5\times3)}{\log_{10}(2^2\times3)}=\frac{\log_{10}5+\log_{10}3}{2\log_{10}2+\log_{10}3}$$

$$=\frac{1-a+b}{2a+b}$$

정답 ⑤

0192

정답 ③

STEP A 밑을 3으로 변환하기

$\log_2 3=a$, $\log_3 15=b$에서 $\log_3 2=\dfrac{1}{a}$, $\log_3 15=b$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\log_{30}54$**를 변형하기**

$$\log_{30}54=\frac{\log_3 54}{\log_3 30}=\frac{\log_3(2\times3^3)}{\log_3(2\times15)}=\frac{\log_3 2+3}{\log_3 2+\log_3 15}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}+3}{\frac{1}{a}+b}=\frac{1+3a}{1+ab}$$

0193

정답 ⑤

STEP A 함수 $f(x)$**에** $\log_3 6$**을 대입하고 간단히 하기**

$$f(\log_3 6)=\frac{\log_3 6+1}{2\log_3 6-1}=\frac{\log_3 6+\log_3 3}{\log_3 6^2-\log_3 3}=\frac{\log_3 18}{\log_3 12}$$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\dfrac{\log_3 18}{\log_3 12}$**을 변형하기**

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$f(\log_3 6)=\frac{\log_3 18}{\log_3 12}=\frac{\frac{\log 18}{\log 3}}{\frac{\log 12}{\log 3}}=\frac{\log 18}{\log 12}=\frac{\log(2\times3^2)}{\log(2^2\times3)}$$

$$=\frac{\log 2+2\log 3}{2\log 2+\log 3}$$

$$=\frac{a+2b}{2a+b}$$

다른풀이 $\log_3 6$을 직접 a, b로 나타내어 풀이하기

$$\log_3 6=\frac{\log 6}{\log 3}=\frac{\log(2\times3)}{\log 3}=\frac{\log 2+\log 3}{\log 3}=\frac{a+b}{b}$$

$$f(\log_3 6)=f\left(\frac{a+b}{b}\right)=\frac{\frac{a+b}{b}+1}{2\times\frac{a+b}{b}-1}=\frac{\frac{a+2b}{b}}{\frac{2a+b}{b}}=\frac{\frac{a+2b}{b}\times b}{\frac{2a+b}{b}\times b}=\frac{a+2b}{2a+b}$$

0194

정답 ④

STEP A 로그의 정의를 이용하여 a, b**의 값 구하기**

$2^a=3$에서 $a=\log_2 3$

$\therefore \log_3 2=\dfrac{1}{a}$

$3^b=5$에서 $b=\log_3 5$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\log_{15}90$**을 변형하기**

$$\log_{15}90=\frac{\log_3 90}{\log_3 15}=\frac{\log_3(3^2\times2\times5)}{\log_3(3\times5)}$$

$$=\frac{\log_3 3^2+\log_3 2+\log_3 5}{\log_3 3+\log_3 5}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{a}+b}{1+b}$$

$$=\frac{2a+1+ab}{a(1+b)}$$

내신연계 출제문항 083

$2^a=3$, $2^b=5$일 때, $\log_5\sqrt[3]{108}$을 a, b로 나타낸 것은?

① $\dfrac{2a+2}{3b}$　② $\dfrac{3a+2}{b}$　③ $\dfrac{3a+1}{3b}$
④ $\dfrac{2a+3}{b}$　⑤ $\dfrac{3a+2}{3b}$

STEP A 로그의 정의에 의하여 a, b**의 값 구하기**

$2^a=3$에서 $\log_2 3=a$

$2^b=5$에서 $\log_2 5=b$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\log_5\sqrt[3]{108}$**을 변형하기**

$$\log_5\sqrt[3]{108}=\frac{\log_2\sqrt[3]{108}}{\log_2 5}$$

$$\log_2\sqrt[3]{108}=\frac{1}{3}\log_2 108=\frac{1}{3}\log_2(2^2\times3^3)$$

$$=\frac{1}{3}(\log_2 2^2+\log_2 3^3)$$

$$=\frac{1}{3}(2+3\log_2 3)$$

$$=\frac{2}{3}+\log_2 3$$

따라서 $\log_5\sqrt[3]{108}=\dfrac{\frac{2+3\log_2 3}{3}}{\log_2 5}=\dfrac{\frac{2+3a}{3}}{\frac{b}{1}}=\dfrac{3a+2}{3b}$

정답 ⑤

0195

정답 ③

STEP A 로그의 정의를 이용하여 x, y, z**를** a, b, c**로 나타내기**

$10^x=a$에서 $x=\log_{10}a$

$10^y=b$에서 $y=\log_{10}b$

$10^z=c$에서 $z=\log_{10}c$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\log_{ab}c$**를 변형하기**

$\log_{ab}c$를 밑이 10인 로그로 변환하면

$$\log_{ab}c=\frac{\log_{10}c}{\log_{10}ab}=\frac{\log_{10}c}{\log_{10}a+\log_{10}b}=\frac{z}{x+y}$$

0196

정답 ⑤

STEP **A** **진수를 소인수분해하여 $\log_3 2$, $\log_3 5$의 값을 a, b로 나타내기**

$\log_3\sqrt{30}=a$에서 $\frac{1}{2}\log_3 30=a$

$\log_3 30=2a$에서 $\log_3(3\times2\times5)=2a$이므로

$1+\log_3 2+\log_3 5=2a$ …… ㉠

$\log_3\frac{6}{25}=b$에서 $\log_3 6-\log_3 25=b$

$1+\log_3 2-2\log_3 5=b$ …… ㉡

㉠$\times2+$㉡을 하면 $3(1+\log_3 2)=4a+b$

$\therefore \log_3 2=\frac{4a+b-3}{3}$

㉠$-$㉡을 하면 $3\log_3 5=2a-b$

$\therefore \log_3 5=\frac{2a-b}{3}$

STEP **B** **로그의 성질을 이용하여 $\log_3 60$을 a, b로 나타내기**

따라서 $\log_3 60=\log_3(3\times2^2\times5)=1+2\log_3 2+\log_3 5$

$=1+2\cdot\frac{4a+b-3}{3}+\frac{2a-b}{3}$

$=\frac{10a+b-3}{3}$

0197

정답 ③

STEP **A** **로그의 정의와 성질을 이용하여 $\frac{5}{x}$, $\frac{2}{y}$의 값 구하기**

$184^x=32$에서 $x=\log_{184}32$이므로 $\frac{1}{x}=\log_{32}184=\frac{1}{5}\log_2 184$

$\therefore \frac{5}{x}=\log_2 184$

$23^y=4$에서 $y=\log_{23}4$이므로 $\frac{1}{y}=\log_4 23=\frac{1}{2}\log_2 23$

$\therefore \frac{2}{y}=\log_2 23$

STEP **B** **$\frac{5}{x}-\frac{2}{y}$의 값 구하기**

따라서 $\frac{5}{x}-\frac{2}{y}=\log_2 184-\log_2 23=\log_2\frac{184}{23}=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

다른풀이 $a^x=k$, $b^y=k$이면 $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$을 이용하여 구하기

$184^x=32$에서 $184=32^{\frac{1}{x}}=(2^5)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{5}{x}}$ …… ㉠

$23^y=4$에서 $23=4^{\frac{1}{y}}=(2^2)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡

㉠$\div$㉡을 하면 $8=2^{\frac{5}{x}-\frac{2}{y}}$

따라서 $2^{\frac{5}{x}-\frac{2}{y}}=2^3$이므로 $\frac{5}{x}-\frac{2}{y}=3$

0198

정답 ①

STEP **A** **로그의 정의와 성질을 이용하여 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$의 값 구하기**

$25^x=15$에서 $x=\log_{25}15$

$\therefore \frac{1}{x}=\log_{15}25$

$9^y=15$에서 $y=\log_9 15$

$\therefore \frac{1}{y}=\log_{15}9$

STEP **B** **$\frac{x+y}{xy}$의 값 구하기**

따라서 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_{15}25+\log_{15}9=\log_{15}(25\cdot9)=\log_{15}15^2=2$

다른풀이 $a^x=k$, $b^y=k$이면 $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$을 이용하여 구하기

$25^x=15$에서 $25=15^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$9^y=15$에서 $9=15^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠$\times$㉡을 하면 $225=15^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, $15^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=15^2$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$이므로 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

0199

정답 ①

STEP **A** **로그의 정의와 성질을 이용하여 x, y, z의 값 구하기**

$3^x=5^y=15^z=k\,(k>0)$라 하면

$x=\log_3 k$, $y=\log_5 k$, $z=\log_{15}k$

STEP **B** **$\frac{(x+y)z}{xy}$의 값 구하기**

따라서 $\frac{(x+y)z}{xy}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)z$

$=(\log_k 3+\log_k 5)\log_{15}k$

$=\log_k 15\cdot\log_{15}k$

$=1$

다른풀이 $a^x=k$, $b^y=k$이면 $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$을 이용하여 구하기

STEP **A** **3^x의 값을 k라 두고 $\frac{x+y}{xy}$의 값을 k로 표현하기**

$3^x=5^y=15^z=k$라 하면

$3=k^{\frac{1}{x}}$, $5=k^{\frac{1}{y}}$이므로 $3\times5=k^{\frac{1}{x}}k^{\frac{1}{y}}$, $15=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{x+y}{xy}}$

즉 $\frac{x+y}{xy}=\log_k 15$

STEP **B** **주어진 식의 값 구하기**

이때 $z=\log_{15}k$이므로 $\frac{(x+y)z}{xy}=\log_k 15\cdot\log_{15}k$

$=\frac{\log 15}{\log k}\cdot\frac{\log k}{\log 15}$

$=1$

내신연계 출제문항 084

$2^x=3^y=\left(\frac{1}{18}\right)^z$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}$의 값은? (단, $xyz\neq0$)

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 4

STEP **A** **로그의 정의와 성질을 이용하여 x, y, z의 값 구하기**

$2^x=3^y=\left(\frac{1}{18}\right)^z=k\,(k>0)$라 하면

$x=\log_2 k$, $y=\log_3 k$, $z=\log_{\frac{1}{18}}k$

STEP **B** **$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}$의 값 구하기**

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=\log_k 2+2\log_k 3+\log_k\frac{1}{18}$

$=\log_k\left(2\times9\times\frac{1}{18}\right)$

$=\log_k 1=0$

정답 ②

0200

정답 ①

STEP ⓐ $2^x=5^y=10$에서 x, y의 값 구하기

$2^x=10$에서 $x=\log_2 10=1+\log_2 5$

$5^y=10$에서 $y=\log_5 10=1+\log_5 2$

STEP ⓑ 로그의 성질을 이용하여 주어진 값 구하기

따라서 $(x-1)(y-1)=\log_2 5\times\log_5 2=1$

내신연계 출제문항 085

두 실수 x, y가 $2^x=5^y=10$을 만족할 때, $y-\dfrac{x}{x-1}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

STEP ⓐ 로그의 정의를 이용하여 x, y의 값 구하기

$2^x=5^y=10$에서

$2^x=10$이므로 $x=\log_2 10$

$5^y=10$이므로 $y=\log_5 10$

STEP ⓑ 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

따라서 $y-\dfrac{x}{x-1}=\log_5 10-\dfrac{\log_2 10}{\log_2 10-1}=\log_5 10-\dfrac{\log_2 10}{\log_2 \frac{10}{2}}$

$=\log_5 10-\log_5 10=0$

정답 ③

0201

정답 ②

STEP ⓐ $2^x=5^y=80$에서 x, y의 값 구하기

$2^x=80$에서 $x=\log_2 80$

$5^y=80$에서 $y=\log_5 80$

STEP ⓑ 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

$$\begin{aligned}xy-x-4y+4&=(x-4)(y-1)\\&=(\log_2 80-4)(\log_5 80-1)\\&=(\log_2 80-\log_2 16)(\log_5 80-\log_5 5)\\&=\log_2\frac{80}{16}\times\log_5\frac{80}{5}\\&=\log_2 5\times\log_5 16\\&=\log_2 5\times\log_5 2^4\\&=4\log_2 5\times\log_5 2=4\end{aligned}$$

0202

정답 ③

STEP ⓐ 로그의 정의를 이용하여 a, b의 값 구하기

$80^a=4$에서 $a=\log_{80}4$

$80^b=5$에서 $b=\log_{80}5$

STEP ⓑ 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

$$\frac{1-a-b}{1-2a}=\frac{1-\log_{80}4-\log_{80}5}{1-2\log_{80}4}=\frac{\log_{80}\left(80\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)}{\log_{80}\left(80\times\frac{1}{4^2}\right)}$$

$$=\frac{\log_{80}4}{\log_{80}5}=\log_5 4$$

따라서 $25^{\frac{1-a-b}{1-2a}}=25^{\log_5 4}=4^{\log_5 5^2}=4^2=16$

0203

정답 ②

STEP ⓐ $a^2b^3=1$을 이용하여 $\log_a b$의 값 구하기

$a^2b^3=1$에서 $\log_a a^2b^3=\log 1=0$

$\log_a a^2+\log_a b^3=0$

$\therefore \log_a b=-\dfrac{2}{3}$

STEP ⓑ 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\log_a a^4b^3=\log_a a^4+\log_a b^3=4+3\log_a b$

$=4+3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

$=4-2=2$

다른풀이 $a^x=k$, $b^y=k$이면 $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$을 이용하여 풀이하기

$a^2b^3=1$에서 $b=a^{-\frac{2}{3}}$

따라서 $\log_a a^4b^3=\log_a a^4\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3=\log_a a^4\cdot a^{-2}$

$=\log_a a^2=2$

내신연계 출제문항 086

두 양수 a, b에 대하여 $a^4b^2=1$일 때, $\log_a a^3b$의 값은? (단, $a\neq 1$)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

STEP ⓐ $a^4b^2=1$을 이용하여 $\log_a b$의 값 구하기

$a^4b^2=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^4b^2=\log_a 1$

$\log_a a^4+\log_a b^2=0$

$4+2\log_a b=0$

$\log_a b=-2$

STEP ⓑ 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\log_a a^3b=\log_a a^3+\log_a b=3+\log_a b$

$=3-2=1$

정답 ①

0204

정답 ④

STEP ⓐ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\log_5 a$, $\log_5 b$의 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5 a+\log_5 b=4$, $\log_5 a\cdot\log_5 b=2$

STEP ⓑ 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{\log_5 b}{\log_5 a}+\dfrac{\log_5 a}{\log_5 b}$

$$=\frac{(\log_5 b)^2+(\log_5 a)^2}{\log_5 a\cdot\log_5 b}$$

$$=\frac{(\log_5 a+\log_5 b)^2-2\log_5 a\cdot\log_5 b}{\log_5 a\cdot\log_5 b}$$

$$=\frac{4^2-2\cdot 2}{2}=6$$

내/신/연/계/ 출제문항 087

이차방정식 $x^2-6x-3=0$의 두 근이 $\log_{10}a$, $\log_{10}b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값은?

① -20 ② -18 ③ -16
④ -14 ⑤ -12

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 $\log a$, $\log b$의 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-6x-3=0$의 두 근이 $\log_{10}a$, $\log_{10}b$이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\log a+\log b=6$, $\log a\cdot\log b=-3$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}$

$=\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\cdot\log b}$

$=\dfrac{(\log a+\log b)^2-2\log a\cdot\log b}{\log a\cdot\log b}$

$=\dfrac{6^2-2\cdot(-3)}{-3}$

$=-14$

정답 ④

0205

정답 ③

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 $\log a$, $\log b$의 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\log a$, $\log b$이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\log a+\log b=3$, $\log a\cdot\log b=1$

STEP B 로그의 성질과 곱셈공식을 이용하여 구하기

따라서 $\log_a b^2+\log_b a^2=2\log_a b+2\log_b a$

$=2\left(\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}\right)$

$=2\cdot\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\cdot\log b}$

$=2\cdot\dfrac{(\log a+\log b)^2-2\log a\cdot\log b}{\log a\cdot\log b}$

$=2\cdot\dfrac{3^2-2}{1}$

$=14$

내/신/연/계/ 출제문항 088

이차방정식 $x^2-7x+7=0$의 두 근이 $\log a$, $\log b$일 때, $\log_a b^3+\log_b a^3$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 $\log a$, $\log b$의 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-7x+7=0$의 두 근이 $\log a, \log b$이므로
근과 계수의 관계에서
$\log a+\log b=7$, $\log a\cdot\log b=7$

STEP B 로그의 성질과 곱셈공식을 이용하여 구하기

$\log_a b+\log_b a=\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}=\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\cdot\log b}$

$\log_a b^3+\log_b a^3=3\log_a b+3\log_b a=3\left(\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}\right)$

$=3\cdot\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\cdot\log b}$

$=3\cdot\dfrac{(\log a+\log b)^2-2\log a\cdot\log b}{\log a\cdot\log b}$

$=3\cdot\dfrac{7^2-2\cdot7}{7}=15$

정답 ④

0206

정답 ①

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 $\log a$, $\log b$의 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-6x+6=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2 a+\log_2 b=6$, $\log_2 a\cdot\log_2 b=6$

STEP B $\log_a b+\log_b a$의 값 구하기

$\log_a b+\log_b a=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}=\dfrac{(\log_2 b)^2+(\log_2 a)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{6^2-2\cdot6}{6}=4$

STEP C $2^{\log_a b}\cdot a^{\log_b 2}$의 값 구하기

따라서 $2^{\log_a b}\cdot a^{\log_b 2}=2^{\log_a b}\cdot 2^{\log_b a}=2^{\log_a b+\log_b a}=2^4$

0207

정답 ③

STEP A 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 구하기

이차방정식 $x^2-8x+k=0$의 두 근이 $\log_\alpha\beta^2$, $\log_\beta\alpha^2$이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\log_\alpha\beta^2+\log_\beta\alpha^2=2\log_\alpha\beta+2\log_\beta\alpha=8$
$\therefore\ \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=4$
$\log_\alpha\beta^2\cdot\log_\beta\alpha^2=4\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\alpha=4$
$\therefore\ k=4$

STEP B 주어진 값 구하기

따라서 $k\left(\dfrac{\log\beta}{\log\alpha}+\dfrac{\log\alpha}{\log\beta}\right)=4(\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha)=4\times4=16$

0208

정답 ⑤

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-2x\log2+\log5-\log2=0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2\log2$, $\alpha\beta=\log5-\log2$

STEP B 조건을 만족하는 $(\alpha+1)(\beta+1)$의 값 구하기

따라서 $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$=\log5-\log2+2\log2+1$

$=\log2+\log5+1$

$=\log10+1$

$=1+1=2$

0209

정답 ②

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식 구하기

이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

STEP B $\log_{6\alpha\beta}2\alpha(\alpha+1)+\log_{6\alpha\beta}2\beta(\beta+1)$의 값 구하기

따라서 $\log_{6\alpha\beta}2\alpha(\alpha+1)+\log_{6\alpha\beta}2\beta(\beta+1)=\log_{6\alpha\beta}4\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)$

$=\log_{6\alpha\beta}4\alpha\beta(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$

$=\log_{6\cdot\frac{1}{2}}\left\{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+3+1\right)\right\}$

$=\log_3 9=2$

다른풀이 두 근을 변형하여 풀이하기

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식 구하기

이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

STEP B $\log_{6\alpha\beta}2\alpha(\alpha+1)+\log_{6\alpha\beta}2\beta(\beta+1)$의 값 구하기

$2\alpha^2-6\alpha+1=0$에서 $2\alpha(\alpha+1)=8\alpha-1$

$2\beta^2-6\beta+1=0$에서 $2\beta(\beta+1)=8\beta-1$

따라서 $\log_{6\alpha\beta}2\alpha(\alpha+1)+\log_{6\alpha\beta}2\beta(\beta+1)=\log_{6\alpha\beta}(8\alpha-1)+\log_{6\alpha\beta}(8\beta-1)$

$=\log_{6\alpha\beta}(8\alpha-1)(8\beta-1)$

$=\log_{6\alpha\beta}\{64\alpha\beta-8(\alpha+\beta)+1\}$

$=\log_{6\cdot\frac{1}{2}}\left\{64\cdot\frac{1}{2}-8\cdot3+1\right\}$

$=\log_3(32-24+1)$

$=\log_3 9=2$

내/신/연/계/ 출제문항 089

이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\log(\alpha+1)+\log(\beta+1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=3$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\log(\alpha+1)+\log(\beta+1)=\log(\alpha+1)(\beta+1)$

$=\log(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$

$=\log(6+3+1)$

$=\log 10=1$

정답 ①

0210

정답 ②

STEP A 로그의 성질을 이용하여 각 값을 계산하여 대소 비교하기

$A=11^{\log_{11}3}=3^{\log_{11}11}=3$

$B=\frac{\log_5 125}{\log_2 4}=\frac{\log_5 5^3}{\log_2 2^2}=\frac{3\log_5 5}{2\log_2 2}=\frac{3}{2}$

$C=\log_3 63-\log_3 7=\log_3\frac{63}{7}=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

따라서 $B<C<A$

0211

정답 ④

STEP A 로그의 성질을 이용하여 각 값을 계산하여 대소 비교하기

세 수를 정리하면

$A=3^{\log_3 12-\log_3 6}=3^{\log_3\frac{12}{6}}=3^{\log_3 2}=2$

$B=\log_5 25-\log_5\frac{1}{125}=\log_5 5^2-\log_5\frac{1}{5^3}=2-(-3)=5$

$C=\log_2\{\log_4(\log_8 64)\}=\log_2(\log_4 2)=\log_2\frac{1}{2}=-1$ ← $\log_8 64=\log_8 8^2=2$

따라서 $C<A<B$

0212

정답 ②

STEP A 로그의 성질을 이용하여 각 값을 계산하여 대소 비교하기

$A=\log_4 2+\frac{1}{\log_3 9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$B=\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_3 2}=\log_3 2+\frac{1}{\log_3 2}$

$\log_3 2>0$, $\frac{1}{\log_3 2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_3 2+\frac{1}{\log_3 2}>2\sqrt{\log_3 2\cdot\frac{1}{\log_3 2}}=2$ (단, 등호가 성립하지 않는다.)

$\therefore B>2$

$C=3^{1-\log_3 2}=3^{\log_3\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

따라서 $A<C<B$

0213

정답 ⑤

STEP A 지수법칙을 이용하여 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ 증명하기

$x=\log_a M$, $y=\log_a N$으로 놓으면 $a^x=\boxed{M}$, $a^y=N$

지수법칙에 의하여 $a^{x+y}=\boxed{MN}$

로그의 정의에 의하여 $x+y=\log_a\boxed{MN}$

그러므로 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$이다.

내/신/연/계/ 출제문항 090

로그의 성질 $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$을 유도하는 과정을 지수법칙 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ($a>0$, $a\neq1$, m, n은 실수)을 이용하여 증명하여라.

STEP A 로그의 정의에 의하여 로그의 식을 지수의 식으로 바꾸기

$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$에서

$\log_a M=m$, $\log_a N=n$이라 하면

로그의 정의에 의하여

$a^m=M$, $a^n=N$

STEP B $a^m\div a^n=a^{m-n}$을 이용하여 로그의 정의 구하기

이때 $\frac{M}{N}=a^m\div a^n=a^{m-n}$이므로 로그의 정의에 의하여

$\log_a\frac{M}{N}=m-n=\log_a M-\log_a N$

정답 해설참조

0214

정답 ②

STEP Ⓐ **지수법칙을 이용하여 $\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ 증명하기**

$x=\log_{a^m}b^n$으로 놓으면 $b^n=\boxed{(a^m)^x}=(a^x)^{\boxed{m}}$이므로

$a^x=\boxed{b^{\frac{n}{m}}}$

따라서 $x=\log_a\boxed{b^{\frac{n}{m}}}=\frac{n}{m}\log_a b$가 성립한다.

0215

정답 ③

STEP Ⓐ **$\log_{10}5$를 유리수라 가정하고 모순점 찾기**

$\log_{10}5$를 유리수라 하면 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여

$\log_{10}5=\frac{p}{q}\ (p<q)$

로그의 정의에 의하여 $10^{\frac{p}{q}}=5$, $10^p=5^q$

이므로 $2^p5^p=5^q$, 즉 $5^{q-p}=\boxed{2^p}$

그런데 5^{q-p}은 $\boxed{5의\ 배수}$

이고 $\boxed{2^p}$은 $\boxed{2의\ 배수}$

이므로 5^{q-p}과 $\boxed{2^p}$은 항상 같지 않다.

따라서 $\log 5$는 무리수이다.

참고 5^{q-p}은 홀수이고 $\boxed{2^p}$은 짝수라고 할 수 있다.

내신연계 출제문항 091

다음은 $\log_{10}2$가 유리수가 아님을 증명한 것이다.

> [증명]
>
> $\log_{10}2$가 유리수라고 가정하자.
>
> $\log_{10}2=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수) …… ㉠
>
> 으로 놓으면 $0<\log_{10}2<1$이므로 $\boxed{(가)}$이다.
>
> ㉠에서 $10^{\frac{n}{m}}=2$이므로 $2^{\boxed{(나)}}=5^n$
>
> 이때 $\boxed{(가)}$이므로
>
> $2^{\boxed{(나)}}$은 $\boxed{(다)}$이고 5^n은 홀수가 되어 모순이다.
>
> 따라서 $\log_{10}2$는 유리수가 아니다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$m>n$	$m-n$	짝수
②	$m>n$	$m-n$	홀수
③	$m<n$	$m-n$	홀수
④	$m<n$	$m+n$	홀수
⑤	$m>n$	$m+n$	짝수

STEP Ⓐ **$\log_{10}2$를 유리수라 가정하고 모순점 찾기**

$\log_{10}2$가 유리수라고 가정하자.

$\log_{10}2=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)으로 놓으면

$0<\log_{10}2<1$이므로 $\boxed{m>n}$이다.

$\log_{10}2=\frac{n}{m}$ 로그의 정의에 의하여 $10^{\frac{n}{m}}=2$

양변을 m제곱하면 $2^m=10^n$

양변을 2^n으로 나누면 $2^{\boxed{m-n}}=5^n$

이때 $\boxed{m>n}$이므로 $2^{\boxed{m-n}}$은 $\boxed{짝수}$이고 5^n은 홀수가 되어 모순이다.

따라서 $\log 2$는 무리수이다.

정답 ①

0216

정답 ⑤

STEP Ⓐ **양변에 밑이 2인 로그 취하기**

(가) $n=2^k\cdot m$에서 $\log_2 n=\log_2(2^k\cdot m)=\boxed{k+\log_2 m}$

STEP Ⓑ **로그의 정의 이용하기**

(나) $\log_2 m=\frac{q}{p}$에서 $m=2^{\frac{q}{p}}$이므로 $\boxed{m^p=2^q}$

STEP Ⓒ **2^q가 홀수일 때, q의 값 구하기**

(다) 2^q이 홀수이어야 하므로 $\boxed{q=0}$

0217

정답 ③

STEP Ⓐ **두 지점 사이의 거리가 같은 부분을 이용하여 x, y에 관한 식 세우기**

$\log_{10}21-\log_{10}3=\log_{10}14-\log_{10}y$ …… ㉠

$\log_{10}x-\log_{10}21=\log_{10}26-\log_{10}14$ …… ㉡

STEP Ⓑ **로그의 성질을 이용하여 x, y의 값 구하기**

㉠에서 $\log_{10}y=\log_{10}\frac{14\times3}{21}=\log_{10}2$

$\therefore\ y=2$

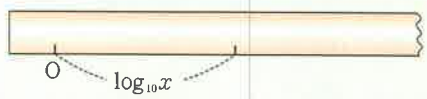
㉡에서 $\log_{10}x=\log_{10}\frac{26\times21}{14}=\log_{10}39$

$\therefore\ x=39$

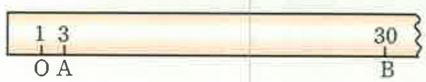
따라서 $x-y=39-2=37$

내신연계 출제문항 092

그림과 같이 눈금 1이 새겨진 점 O로부터의 거리가 $\log_{10}x$인 곳에 눈금 x를 새긴 자를 '로그자' 라고 한다.



두 점 A, B에 새겨진 눈금이 각각 3, 30일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

STEP Ⓐ **$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$임을 이용하여 $\overline{AB}$의 길이 구하기**

$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$

$\overline{OA}=\log_{10}3$, $\overline{OB}=\log_{10}30$

따라서 $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\log_{10}30-\log_{10}3$

$=\log_{10}\frac{30}{3}$

$=\log_{10}10=1$

정답 ①

0218

정답 ②

STEP A **곱하여 1000이 되는 수끼리 묶어서 생각하기**

$1000=2^3\times5^3$이므로 1000의 양의 약수의 개수는 $(3+1)(3+1)=16$
16개의 양의 약수를 작은 수부터 차례로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots a_{16}$이라 하면
$a_1\times a_{16}=a_2\times a_{15}=\cdots=a_8\times a_9=1000$

STEP B **$\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\cdots+\log_{10}a_{16}$의 값 구하기**

따라서 $\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\cdots+\log_{10}a_{16}=\log_{10}(a_1\times a_2\times\cdots\times a_{16})$
$=\log_{10}1000^8$
$=\log_{10}10^{24}$
$=24$

KEYPOINT

양의 약수의 개수와 총합
자연수 $\mathrm{N}=a^{\alpha}b^{\beta}$ (a, b는 서로 다른 소수 α, β는 음이 아닌 정수에 대하여)
① 약수의 개수 : $(\alpha+1)(\beta+1)$(개)
② 약수의 총합 : $(a^0+a^1+a^2+\cdots+a^{\alpha})(b^0+b^1+b^2+\cdots+b^{\beta})$

내신연계 출제문항 093

100의 모든 양의 약수들을 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_9$라 할 때,
$\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3+\cdots+\log_{10}a_9$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

STEP A **100의 약수의 개수 구하기**

$10^2=2^2\times5^2$이므로 100의 약수의 개수는 $(2+1)(2+1)=9$(개)
약수를 크기순으로
$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9$ (단, $a_1<a_2<\cdots<a_9$)이라 하면
$a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=10^2$, $a_5=10$

STEP B **$a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=10^2$을 이용하여 구하기**

따라서 $\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\cdots+\log_{10}a_9$
$=\log_{10}(a_1\times a_2\times\cdots\times a_9)$
$=\log_{10}(a_1a_9\times a_2a_8\times a_3a_7\times a_4a_6\times a_5)$
$=\log_{10}(10^2\times10^2\times10^2\times10^2\times10)$
$=\log_{10}10^9=9$

정답 ①

0219

정답 ②

STEP A **$\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$이면 $a\le0,\ b\le0$임을 이용하여 n의 범위 구하기**

$\sqrt{(-n-1)(n-2)}=-\sqrt{-n-1}\sqrt{n-2}$가 성립하려면
$-n-1\le0,\ n-2\le0$이므로 $-1\le n\le2$

STEP B **각각의 정수 n에 대하여 x의 값을 구하여 곱하기**

$n=-1$일 때, $\log x=-\dfrac{1}{2}$ $\therefore x=10^{-\frac{1}{2}}$

$n=0$일 때, $\log x=\dfrac{1}{2}$ $\therefore x=10^{\frac{1}{2}}$

$n=1$일 때, $\log x=\dfrac{3}{2}$ $\therefore x=10^{\frac{3}{2}}$

$n=2$일 때, $\log x=\dfrac{5}{2}$ $\therefore x=10^{\frac{5}{2}}$

따라서 모든 x값의 곱은 $10^{-\frac{1}{2}}\times10^{\frac{1}{2}}\times10^{\frac{3}{2}}\times10^{\frac{5}{2}}=10^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=10^4$

STEP 2 서술형 기출유형

0220

정답 해설참조

1단계 로그의 정의를 이용하여 로그의 식을 지수의 식으로 나타낸다. ◀ 30%

$x=\log_3(2+\sqrt{3})$에서 $3^x=2+\sqrt{3}$

2단계 3^{-x}의 값을 구한다. ◀ 30%

$3^{-x}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

3단계 $\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$의 값을 구한다. ◀ 40%

$3^x+3^{-x}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$
$3^x-3^{-x}=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$
$\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0221

정답 해설참조

1단계 비례식을 정리하여 $\log_ab$의 값 구한다. ◀ 50%

$\log_ac:\log_bc=2:3$에서 $\dfrac{1}{\log_ca}:\dfrac{1}{\log_cb}=2:3$

$\dfrac{3}{\log_ca}=\dfrac{2}{\log_cb}$, $\dfrac{\log_cb}{\log_ca}=\dfrac{2}{3}$이므로 $\log_ab=\dfrac{2}{3}$

2단계 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 $\log_ab+\log_ba$의 값을 구한다. ◀ 50%

$\log_ab+\dfrac{1}{\log_ab}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{6}$

0222

정답 해설참조

1단계 $\log_2a=x$, $\log_2b=y$로 놓고 주어진 조건의 식을 세운다. ◀ 40%

$\log_2a=x$, $\log_2b=y$로 놓으면

$\log_8a=\dfrac{1}{3}x$, $\log_4b^2=\log_2b=y$이므로

$\log_8a+\log_4b^2=5$에서 $\dfrac{1}{3}x+y=5$

$\therefore x+3y=15$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\log_8b=\dfrac{1}{3}y$, $\log_4a^2=\log_2a=x$이므로

$\log_8b+\log_4a^2=7$에서 $\dfrac{1}{3}y+x=7$

$\therefore 3x+y=21$ $\cdots\cdots$ ㉡

2단계 연립방정식을 풀어 x, y의 값을 구한다. ◀ 20%

㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x=6,\ y=3$

3단계 로그의 정의를 이용하여 a, b의 값을 구하여 $a+b$의 값 구한다. ◀ 40%

$\log_2a=6$, $\log_2b=3$이므로 $a=2^6=64$, $b=2^3=8$
따라서 $a+b=64+8=72$

0223

정답 해설참조

1단계 | $\log_a b=x$, $\log_c a=y$로 놓고 로그의 정의를 이용하여 b, a 값을 구한다. ◀ 30%

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$로 놓으면
로그의 정의에 따라 $a^x=b$, $c^y=a$

2단계 | 지수의 성질을 이용하여 b를 구한다. ◀ 20%

지수의 성질에 따르면 $b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$

3단계 | [2단계]에서 로그의 정의를 이용하여 xy를 구한다. ◀ 20%

로그의 정의에 따라 $xy=\log_c b$이므로
$\log_a b\times\log_c a=\log_c b$ ⋯⋯ ㉠

4단계 | $a\neq1$일 때, $\log_c a\neq0$임을 이용하여 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$임을 보인다. ◀ 30%

그런데 $a\neq1$일 때, $\log_c a\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $\log_c a$로 나누면
다음이 성립한다.

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

0224

정답 해설참조

1단계 | $5^x=4$에서 로그의 정의를 이용하여 $\dfrac{2}{x}$의 값을 구한다. ◀ 40%

$5^x=4$에서 $x=\log_5 4=\log_5 2^2=2\log_5 2$

$\therefore\ \dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{2\log_5 2}=\log_2 5$

2단계 | $40^y=8$에서 로그의 정의를 이용하여 $\dfrac{3}{y}$의 값을 구한다. ◀ 40%

$40^y=8$에서 $y=\log_{40} 8=\log_{40} 2^3=3\log_{40} 2$

$\therefore\ \dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{3\log_{40} 2}=\log_2 40$

3단계 | $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}$의 값을 구한다. ◀ 20%

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\log_2 5-\log_2 40=\log_2\frac{5}{40}=\log_2\frac{1}{8}$$
$$=\log_2 2^{-3}=-3$$

0225

정답 해설참조

1단계 | 로그의 밑 조건을 만족하는 a의 범위를 구한다. ◀ 30%

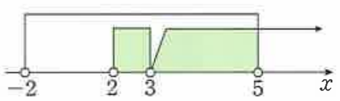
$\log_{a-2}(-a^2+3a+10)$가 정의되기 위해서는
로그의 밑의 조건으로 부터 $a-2>0$, $a-2\neq1$이므로
$a>2$, $a\neq3$ ⋯⋯ ㉠

2단계 | 로그의 진수조건을 만족하는 a의 범위를 구한다. ◀ 30%

로그의 진수의 조건으로 부터 $-a^2+3a+10>0$이므로
$a^2-3a-10<0$, $(a+2)(a-5)<0$
$\therefore\ -2<a<5$ ⋯⋯ ㉡

3단계 | 두 조건을 동시에 만족하는 a의 범위를 구한다. ◀ 40%

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<a<3$, $3<a<5$



0226

정답 해설참조

1단계 | $\log_{10}5$를 a로 나타낸다. ◀ 30%

$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}$$
$$=\log_{10}10-\log_{10}2$$
$$=1-a$$

2단계 | $\log_5 12$를 a, b로 나타낸다. ◀ 40%

$$\log_5 12=\frac{\log_{10}12}{\log_{10}5}$$
$$=\frac{\log_{10}(2^2\cdot3)}{\log_{10}5}$$
$$=\frac{2\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}5}$$
$$=\frac{2a+b}{1-a}$$

3단계 | 10^{a+2b}의 값을 구한다. ◀ 30%

$a+2b=\log_{10}2+2\log_{10}3=\log_{10}(2\cdot3^2)=\log_{10}18$
따라서 $10^{a+2b}=10^{\log_{10}18}=18$

0227

정답 해설참조

1단계 | $\log_a b=\log_b a$를 만족하는 서로 다른 두 양수 a, b의 관계식을 구한다. ◀ 40%

$\log_a b=\log_b a$에서 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_a b}$, $(\log_a b)^2=1$

$\log_a b=1$ 또는 $\log_a b=-1$

$\therefore\ b=a$ 또는 $b=\dfrac{1}{a}$

이때 $a\neq b$이므로 $b=\dfrac{1}{a}$ ⋯⋯ ㉠

2단계 | $(a+3)(b+12)$를 전개하여 산술평균과 기하평균을 이용하여 최솟값을 구한다. ◀ 40%

$a>0$, $\dfrac{1}{a}>0$이므로

$$(a+3)(b+12)=(a+3)\left(\frac{1}{a}+12\right)$$
$$=1+12a+\frac{3}{a}+36$$
$$=37+12a+\frac{3}{a}$$
$$\geq37+2\sqrt{12a\cdot\frac{3}{a}}$$
$$=49$$

따라서 $(a+3)(b+12)$의 최솟값은 49

3단계 | 최소가 되는 a, b의 값을 구한다. ◀ 20%

이때 등호는 $12a=\dfrac{3}{a}$일 때, 성립하므로 $a^2=\dfrac{1}{4}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$

내신연계 출제문항 094

1이 아닌 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 $\log_a b$가 x에 대한 이차방정식 $x^2-1=0$의 한 근일 때, $4a+9b$의 최솟값을 다음 단계로 서술하여라.

[1단계] 양수 a, b의 관계식을 구한다.
[2단계] 산술평균과 기하평균을 이용하여 $4a+9b$의 최솟값을 구한다.
[3단계] 최소가 되는 a, b의 값을 구한다.

1단계 양수 a, b의 관계식을 구한다. ◀ 30%

$x^2-1=0$의 두 근이 $x=1$ 또는 $x=-1$이므로
$\log_a b=1$이면 $a=b$이므로 서로 다른 두 양수 a, b라는 조건에 모순
$\log_a b=-1$이면 $b=a^{-1}=\frac{1}{a}$ …… ㉠

2단계 산술평균과 기하평균을 이용하여 $4a+9b$의 최솟값을 구한다. ◀ 40%

$4a+9b=4a+\frac{9}{a}$이므로 산술평균과 기하평균에 의하여

$4a+9b=4a+\frac{9}{a}\ge 2\sqrt{4a\cdot\frac{9}{a}}=12$

따라서 $4a+9b$의 최솟값은 12

3단계 최소가 되는 a, b의 값을 구한다. ◀ 30%

이때 등호는 $4a=\frac{9}{a}$에서 $a^2=\frac{9}{4}$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

㉠에서 $b=\frac{2}{3}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{2}{3}$이고 최솟값은 12

정답 해설참조

0228

정답 해설참조

1단계 이차방정식의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합과 두 근의 곱을 구한다. ◀ 30%

이차방정식 $x^2-2x-7=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2 a+\log_2 b=2$, $\log_2 a\times\log_2 b=-7$

2단계 $\log_a b+\log_b a$을 밑을 2로 변환한다. ◀ 30%

$\log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$

3단계 곱셈공식의 변형을 이용하여 $\log_a b+\log_b a$의 값 구한다. ◀ 40%

$$\begin{aligned}\log_a b+\log_b a&=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}\\&=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}\\&=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}\\&=\frac{2^2-2\times(-7)}{-7}\\&=-\frac{18}{7}\end{aligned}$$

0229

정답 해설참조

1단계 10^9의 약수의 개수를 구한다. ◀ 30%

$10^9=2^9\times5^9$이므로 10^9의 약수의 개수는
$(9+1)(9+1)=100$

2단계 10^9의 모든 양의 약수의 곱 N을 구한다. ◀ 50%

약수를 크기순으로
a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{100} (단 $a_1<a_2<\cdots<a_{100}$)이라 하면
$a_1a_{100}=a_2a_{99}=a_3a_{98}=\cdots=a_{50}a_{51}=10^9$이므로
모든 양의 약수의 곱은
$N=a_1a_2a_3a_4\cdots a_{99}a_{100}=(10^9)^{50}=10^{450}$

3단계 $\log_{10}N$의 값을 구한다. ◀ 20%

따라서 $\log_{10}N=\log_{10}10^{450}=450$

0230

정답 해설참조

1단계 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합과 두 근의 곱을 구한다. ◀ 30%

이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$

2단계 곱셈공식을 이용하여 a의 값 구한다. ◀ 40%

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=5^2-4\cdot5=5$
$\therefore a=\alpha-\beta=\sqrt{5}$ ($\because \alpha>\beta$)

3단계 $\log_a\alpha+\log_a\beta$의 값을 구한다. ◀ 30%

$\log_a\alpha+\log_a\beta=\log_a\alpha\beta=\log_{\sqrt{5}}5=2\log_5 5=2$

0231

정답 해설참조

1단계 기울기를 이용하여 ab를 구한다. ◀ 50%

두 점 A$(1, -\log a)$, B$(5, \log b)$를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\log b-(-\log a)}{5-1}=\frac{1}{2}$, $\frac{\log b+\log a}{4}=\frac{1}{2}$
$\log ab=2$
$\therefore ab=100$

2단계 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다. ◀ 50%

서로 다른 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 100)$, $(2, 50)$, $(4, 25)$, $(5, 20)$, $(20, 5)$, $(25, 4)$, $(50, 2)$, $(100, 1)$이므로
개수는 8개이다.

STEP 3 행복한 1등급 문제

0232

정답 180

STEP A 로그의 정의를 이용하여 ab, $a+b$의 값 구하기

$\log_2 a+\log_2 b=1$에서 $\log_2 ab=1$

로그의 정의에 의하여 $ab=2$

$\log_3(1+a)+\log_3(1+b)=2$에서 $\log_3(1+a)(1+b)=2$

$\log_3(1+a+b+ab)=2$, $\log_3(1+a+b+2)=2$

로그의 정의에 의하여 $3+a+b=3^2$

$\therefore a+b=6$

STEP B 곱셈공식을 이용하여 식의 값 구하기

따라서 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=6^3-3\cdot2\cdot6=180$

0233

정답 ③

STEP A 10^a을 3으로 나눌 때, 몫이 정수이고 나머지가 2가 되는 a 구하기

$0<a<1$일 때,

$1<10^a<10$이므로 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수 10^a은

$10^a=3Q+2$에서 자연수는 $10^a=2, 5, 8$

$\therefore a=\log 2, \log 5, \log 8$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 모든 a의 값의 합 구하기

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$\log 2+\log 5+\log 8=\log 2\times5+3\log 2=1+3\log 2$

0234

정답 12

STEP A 로그의 정의를 이용하여 집합의 원소 구하기

$\log_a b=\frac{k}{2}$에서 $b=a^{\frac{k}{2}}$

$\therefore b^2=a^k$

이므로

$A_k=\left\{\frac{b}{a}\,\middle|\,b^2=a^k,\ a\text{와 }b\text{는 2 이상 100 이하의 자연수}\right\}$이다.

STEP B $n(A_3)+n(A_4)$의 값 구하기

(i) $k=3$일 때,

$b^2=a^3$을 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍은

$(2^2, 2^3)$, $(3^2, 3^3)$, $(4^2, 4^3)$이므로 $A_3=\{2, 3, 4\}$

즉 $n(A_3)=3$

(ii) $k=4$일 때,

$b^2=a^4$을 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍은

$(2, 2^2)$, $(3, 3^2)$, $(4, 4^2)$, $\cdots$, $(9, 9^2)$, $(10, 10^2)$이므로

$A_4=\{2, 3, 4, \cdots, 10\}$

즉 $n(A_4)=9$

(i), (ii)에 의하여 $n(A_3)+n(A_4)=3+9=12$

0235

정답 13

STEP A 주어진 식을 연립하여 $\log_2 ab$, $\log_2 bc$, $\log_2 ca$의 값 구하기

$\log_2 ab+\log_2 bc=5$ ······ ㉠

$\log_2 bc+\log_2 ca=8$ ······ ㉡

$\log_2 ca+\log_2 ab=7$ ······ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(\log_2 ab+\log_2 bc+\log_2 ca)=20$

$\log_2 ab+\log_2 bc+\log_2 ca=10$ ······ ㉣

㉣−㉡을 하면 $\log_2 ab=2$

$\therefore ab=4$ ······ ㉤

㉣−㉢을 하면 $\log_2 bc=3$

$\therefore bc=8$ ······ ㉥

㉣−㉠을 하면 $\log_2 ca=5$

$\therefore ca=32$ ······ ㉦

STEP B $a+b+c$의 값 구하기

㉣에서 $\log_2(abc)^2=10$, $\log_2 abc=5$

$\therefore abc=32$ ······ ㉧

㉧÷㉤, ㉧÷㉥, ㉧÷㉦을 각각 하면

$c=8$, $a=4$, $b=1$

따라서 $a+b+c=13$

다른풀이 로그의 성질을 이용하여 풀이하기

STEP A 로그의 성질을 이용하여 각 등식을 간단히 하기

$\log_2 ab+\log_2 bc=\log_2 ab^2c=5$에서

$ab^2c=2^5$ ······ ㉠

$\log_2 bc+\log_2 ca=\log_2 abc^2=8$에서

$abc^2=2^8$ ······ ㉡

$\log_2 ca+\log_2 ab=\log_2 a^2bc=7$에서

$a^2bc=2^7$ ······ ㉢

STEP B abc의 값 구하기

이때 ㉠, ㉡, ㉢을 각 변끼리 곱하면

$a^4b^4c^4=2^{20}$이므로 $abc=2^5$ ······ ㉣

STEP C $a+b+c$의 값 구하기

㉠÷㉣을 하면 $b=1$

㉡÷㉣을 하면 $c=2^3=8$

㉢÷㉣을 하면 $a=2^2=4$

따라서 $a=4$, $b=1$, $c=8$ 이므로 $a+b+c=13$

0236

정답 $55\log_2 3$

STEP A 6^n, 5^n이 각각 홀수인지 짝수인지 판단하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n 구하기

자연수 n에 대하여 6^n은 짝수이고 5^n은 홀수이므로

$a_n=f(6^n)-f(5^n)$

$=\log_2 6^n-\log_2 5^n$

$=n(1+\log_2 3)-n$

$=(\log_2 3)n$ ← 공차가 $\log_2 3$인 등차수열

STEP B $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값 구하기

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\log_2 3+2\log_2 3+3\log_2 3+\cdots+10\log_2 3$

$=(1+2+3+\cdots+10)\log_2 3$

$=55\log_2 3$

0237 정답 18

STEP A 주어진 식을 이용하여 $\log_3 a$, $\log_3 b$의 관계식 구하기

$\log_a 9=\log_b 27$에서 $\log_9 a=\log_{27} b$

$\frac{1}{2}\log_3 a=\frac{1}{3}\log_3 b$

$\therefore \log_3 a=\frac{2}{3}\log_3 b$

STEP B $\log_{ab} a^2b^3$의 값 구하기

$$\begin{aligned}\log_{ab} a^2b^3&=\log_{ab}\{(ab)^2\cdot b\}=2+\log_{ab} b=2+\frac{\log_3 b}{\log_3 ab}\\&=2+\frac{\log_3 b}{\log_3 a+\log_3 b}\\&=2+\frac{\log_3 b}{\frac{2}{3}\log_3 b+\log_3 b}\\&=2+\frac{\log_3 b}{\frac{5}{3}\log_3 b}\\&=2+\frac{3}{5}\\&=\frac{13}{5}\end{aligned}$$

따라서 $p=13$, $q=5$이므로 $p+q=18$

0238 정답 46

STEP A 200의 약수의 개수 구하기

$200=2^3\times5^2$이므로 200의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)=12$

STEP B 200의 모든 양의 약수의 곱 $a_1a_2a_3\cdots a_{12}$을 구하기

$200=2^3\times5^2$이므로 200의 양의 약수를 표로 나타내면 다음과 같다.

	5^0	5^1	5^2
2^0	$2^0\cdot5^0$	$2^0\cdot5^1$	$2^0\cdot5^2$
2^1	$2^1\cdot5^0$	$2^1\cdot5^1$	$2^1\cdot5^2$
2^2	$2^2\cdot5^0$	$2^2\cdot5^1$	$2^2\cdot5^2$
2^3	$2^3\cdot5^0$	$2^3\cdot5^1$	$2^3\cdot5^2$

즉 200의 모든 양의 약수들의 곱은

$$\begin{aligned}a_1a_2a_3\cdots a_{12}&=(2^0\cdot2^1\cdot2^2\cdot2^3)^3\cdot(5^0\cdot5^1\cdot5^2)^4\\&=2^{18}\cdot5^{12}\end{aligned}$$

참고 200의 양의 약수가 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{12}이므로
$a_1a_{12}=a_2a_{11}=\cdots=a_6a_7=200$
모든 약수의 곱은
$a_1a_2a_3\cdots a_{12}=200^6=(2^3\times5^2)^6=2^{18}\times5^{12}$

STEP C 로그의 성질을 이용하여 주어진 값 구하기

로그의 성질을 이용하여

$$\begin{aligned}&\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{12}\\&=\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_{12})\\&=\log_2(2^{18}\cdot5^{12})\\&=18\log_2 2+12\log_2 5\\&=18+12(\log_2 10-\log_2 2) \quad \leftarrow \log_2 5=\log_2\frac{10}{2}=\log_2 10-\log_2 2\\&=18+12\left(\frac{1}{\log_{10}2}-1\right)\\&=18+12\left(\frac{1}{0.3}-1\right)\\&=46\end{aligned}$$

0239 정답 30

STEP A 진수조건을 만족하는 이차함수 $f(x)$의 그래프 그리기

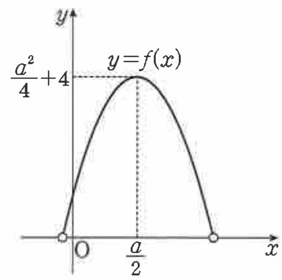
$f(x)=-x^2+ax+4$라 하면 로그의 진수 조건에 의해

$f(x)=-x^2+ax+4>0$

즉 $f(x)$의 그래프는 x축 위쪽의 영역이다.

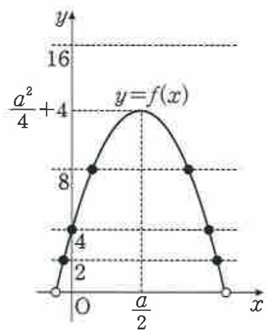
$$\begin{aligned}f(x)&=-x^2+ax+4\\&=-\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)+4\\&=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+4\end{aligned}$$

이때 a는 자연수이고 $f(x)>0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP B 주어진 조건을 만족하는 자연수 a의 값 구하기

$\log_2(-x^2+ax+4)$의 값이 자연수가 되는 실수 x의 개수가 6이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=2^1$, $y=2^2$, $y=2^3$과 각각 2개의 점에서 만나고 $y=2^n$ $(n\ge4)$와는 만나지 않는다.



즉 $2^3<\frac{a^2}{4}+4<2^4$, $4<\frac{a^2}{4}<12$

$\therefore 16<a^2<48$

이때 a가 자연수이므로 $a=5$, 6

따라서 $5\times6=30$

0240 정답 2

STEP A 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $\beta-\alpha$의 값 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$이므로

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=5^2-4\cdot5=5$

$\alpha<\beta$이므로 $a=\beta-\alpha=\sqrt{5}$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

$$\begin{aligned}&\text{따라서 } \log_{\sqrt5}(3\alpha+\beta)+\log_{\sqrt5}(\alpha+3\beta)-\log_{\sqrt5}19\\&=\log_{\sqrt5}(3\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)-\log_{\sqrt5}19\\&=\log_{\sqrt5}\{(3(\alpha^2+\beta^2)+10\alpha\beta)\}-\log_{\sqrt5}19\\&=\log_{\sqrt5}\{(3(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta)\}-\log_{\sqrt5}19 \quad \leftarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\log_{\sqrt5}(3\cdot5^2+4\cdot5)-\log_{\sqrt5}19\\&=\log_{\sqrt5}95-\log_{\sqrt5}19\\&=\log_{\sqrt5}\frac{95}{19}\\&=\log_{\sqrt5}5\\&=2\end{aligned}$$

0241

정답 15개

STEP Ⓐ $4\log m-2\log n$의 값을 임의로 두고 m, n의 관계식 구하기

$4\log m-2\log n=\log \frac{m^4}{n^2}=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$\frac{m^4}{n^2}=10^k$, $m^4=10^k\cdot n^2$

$\therefore m^2=10^{\frac{k}{2}}n$

STEP Ⓑ 순서쌍 (m, n)의 개수 구하기

이때 m^2과 n이 자연수이므로 $10^{\frac{k}{2}}$도 자연수이어야 한다.

(ⅰ) $k=2$일 때, $m=\sqrt{10n}$이므로 $(10, 10)$, $(20, 40)$, $(30, 90)$의 3개

(ⅱ) $k=4$일 때, $m=10\sqrt{n}$이므로

$(10, 1)$, $(20, 4)$, $(30, 9)$, $(40, 16)$, $\cdots$, $(100, 100)$의 10개

(ⅲ) $k=6$일 때, $m=10\sqrt{10n}$이므로 $(100, 10)$의 1개

(ⅳ) $k=8$일 때, $m=100\sqrt{n}$이므로 $(100, 1)$의 1개

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3+10+1+1=15$개

0242

정답 1

STEP Ⓐ 로그의 여러가지 성질을 이용하여 조건을 적절히 변형하여 구하기

$$\begin{aligned}(\log_{12}4)^2+\frac{1+\log_{12}4}{1+\log_3 4}&=(\log_{12}4)^2+\frac{\log_{12}48}{\log_3 12}\\&=(\log_{12}4)^2+\log_{12}48\times\log_{12}3\\&=(\log_{12}4)^2+(2\log_{12}4+\log_{12}3)\times\log_{12}3\\&=(\log_{12}4)^2+2\log_{12}4\times\log_{12}3+(\log_{12}3)^2\\&=(\log_{12}4+\log_{12}3)^2\\&=(\log_{12}12)^2=1\end{aligned}$$

0243

정답 25

STEP Ⓐ 주어진 집합의 조건을 나타내기

$A_n=\{k\,|\,k\in S$이고 $(\log_2 n-\log_2 k)$는 정수$\}$라 할 때,

S가 100 이하의 자연수 전체의 집합이므로

n, $k\in S$에서 n, k는 100 이하의 자연수이다.

$\log_2 n-\log_2 k=\log_2\frac{n}{k}$이 정수이므로 $\frac{n}{k}=2^m$ (m은 정수)이다.

STEP Ⓑ n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 구하기

n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 $f(n)=1$인 n을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) n이 짝수일 때, $k=n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{n}=1=2^0$이므로 $n\in A_n$

$k=\frac{n}{2}$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{\frac{n}{2}}=2=2^1$이므로 $\frac{n}{2}\in A_n$

즉 집합 A_n의 원소의 개수는 2 이상이다.

(ⅱ) $1\leq n\leq 50$인 홀수일 때, $k=n$이면 $\frac{n}{k}=1=2^0$이므로 $n\in A_n$

$k=2n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $2n\in A_n$

즉 집합 A_n의 원소의 개수는 2 이상이다.

(ⅲ) n이 50보다 큰 홀수일 때, $\frac{n}{k}=2^m$이면 $k=\frac{n}{2^m}$ (m은 정수)을

만족시키는 정수 m은 0뿐이다.

즉 집합 A_n의 원소의 개수는 1

STEP Ⓒ 만족하는 n의 개수 구하기

(ⅰ)~(ⅲ)에서 n은 50보다 큰 홀수이므로 $f(n)=1$인 n의 개수는

51, 53, 55, $\cdots$, 99의 25개이다.

mapl YOUR MASTER PLAN

MEMO

03 상용로그

STEP 1 내신정복 기출유형

0244

정답 ④

STEP A 상용로그의 진수를 5.13×10^n꼴로 나타낸 다음 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$$\log x=-1.29=-1-0.29=-2+0.71=\log10^{-2}+\log5.13$$
$$=\log0.0513$$

따라서 $x=0.0513$

0245

정답 ④

STEP A 상용로그의 진수를 5.18×10^n꼴로 나타낸 다음 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$$\log(51.8)^2=2\log51.8=2\log(5.18\times10)$$
$$=2(\log5.18+\log10)$$
$$=2(0.7143+1)$$

이고

$$\log518=\log(5.18\times10^2)=\log5.18+\log10^2$$
$$=0.7143+2$$

STEP B $\log(51.8)^2-\log518$의 값 구하기

$$\log(51.8)^2-\log518=2(0.7143+1)-(0.7143+2)$$
$$=2\times0.7143+2-0.7143-2$$
$$=0.7143$$

다른풀이 로그의 성질을 이용하여 풀이하기

$$\log(51.8)^2-\log518=\log\frac{(51.8)^2}{518}=\log\frac{(51.8)^2}{51.8\times10}=\log5.18=0.7143$$

0246

정답 ⑤

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

$$\log\left(\frac{302}{0.175}\right)=\log302-\log(0.175)$$
$$=\log(3.02\times10^2)-\log(1.75\times10^{-1})$$
$$=\log3.02+\log10^2-(\log1.75+\log10^{-1})$$
$$=a+2-(b-1)$$
$$=a-b+3$$

내신연계 출제문항 095

$\log4.27=a$일 때, 427×0.00427의 상용로그의 값을 a로 나타낸 것으로 옳은 것은?

① $a-1$　② $a+2$　③ $2a-1$
④ $2a$　⑤ $2a+2$

STEP A 상용로그의 진수를 4.27×10^n꼴로 나타낸 다음 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$$\log(427\times0.00427)=\log427+\log0.00427$$
$$=\log(4.27\times10^2)+\log(4.27\times10^{-3})$$
$$=\log4.27+2+\log4.27+(-3)$$
$$=2\log4.27-1$$
$$=2a-1$$

정답 ③

0247

정답 ③

STEP A 상용로그의 진수를 4.17×10^n꼴로 나타낸 다음 로그의 성질을 이용하여 a, b의 값 구하기

$\log417=2.6201=2+0.6201$에서 $\log4.17=0.6201$

즉 $a=4.17$

$$\log b=3.6201=3+0.6201$$
$$=\log10^3+\log4.17$$
$$=\log4170$$

즉 $b=4170$

따라서 $a+b=4.17+4170=4174.17$

0248

정답 ①

STEP A $\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0<\alpha<1$)꼴로 바꾸기

$\log54.3=1.7348=1+0.7348$에서 $\log5.43=0.7348$

$$a=\log5430$$
$$=\log(5.43\times10^3)$$
$$=3+0.7348$$
$$=3.7348$$

$$\log b=-1.2652$$
$$=-2+0.7348 \leftarrow -1-0.2652=-1-1+1-0.2652=-2+0.7348$$
$$=-2+\log5.43$$
$$=\log10^{-2}+\log5.43$$
$$=\log(10^{-2}\times5.43)$$
$$=\log0.0543$$

$\therefore b=0.0543$

STEP B $a+b$의 값 구하기

따라서 $a+b=3.7348+0.0543=3.7891$

내신연계 출제문항 096

다음 조건을 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?
(단, $\log4.73=0.6749$로 계산한다.)

(가) $\log473=a$
(나) $\log b=-1.3251$

① 2.7222　② 2.9249　③ 3.1479
④ 3.2629　⑤ 3.4284

STEP A $\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0<\alpha<1$)꼴로 바꾸기

$$a=\log473=\log(4.73\times10^2)$$
$$=2+0.6749$$
$$=2.6749$$

$$\log b=-1.3251=-2+0.6749 \leftarrow -1-0.3251=-1-1+1-0.3251$$
$$=-2+\log4.73$$
$$=\log10^{-2}+\log4.73$$
$$=\log(10^{-2}\times4.73)$$
$$=\log0.0473$$

$\therefore b=0.0473$

STEP B $a+b$의 값 구하기

따라서 $a+b=2.6749+0.0473=2.7222$

정답 ①

0249

정답 ①

STEP A 로그의 뜻과 성질을 이용하여 로그의 값 구하기

$10^{0.94}=k$에서 $\log k=0.94$

따라서 $\log k^2+\log\frac{k}{10}=2\log k+\log k-\log 10$

$=3\log k-1$

$=3\times0.94-1$

$=2.82-1$

$=1.82$

내신연계 출제문항 097

$\log x\sqrt{x}=0.3$일 때, $\log_{\sqrt{x}}2+\log_x 25$의 값은?

① 3.3 ② 5.3 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

STEP A 로그의 뜻과 성질을 이용하여 로그의 값 구하기

$\log x\sqrt{x}=\log x^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log x=0.3$이므로

$\log x=\frac{2}{3}\times0.3=0.2$

STEP B $\log_{\sqrt{x}}2+\log_x 25$의 값 구하기

따라서 $\log_{\sqrt{x}}2+\log_x 25=\log_{x^{\frac{1}{2}}}2+\log_x 5^2$

$=2\log_x 2+\log_x 5^2$

$=\log_x(2^2\times5^2)$

$=2\log_x 10$

$=\frac{2}{\log x}=\frac{2}{0.2}$

$=10$

정답 ⑤

0250

정답 ⑤

STEP A 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 변형하기

$\log(0.362\times3410)=\log0.362+\log3410$

STEP B 상용로그표를 이용하여 $\log0.362+\log3410$의 값 구하기

상용로그표에서 $\log3.62=0.5587$이므로

$\log0.362=\log3.62\times10^{-1}$

$=\log3.62+\log10^{-1}$

$=-1+0.5587$

상용로그표에서 $\log3.41=0.5328$이므로

$\log3410=\log3.41\times10^3$

$=\log3.41+\log10^3$

$=3+0.5328$

따라서 $\log(0.362\times3410)=(-1+0.5587)+(3+0.5328)$

$=3.0915$

0251

정답 ②

STEP A 로그의 성질을 이용하여 구하려는 상용로그의 진수를 상용로그표에서 구할 수 있는 형태로 나타내기

$\log\sqrt{419}=\frac{1}{2}\log419$ ← $\sqrt{419}=419^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\log(4.19\times100)$

$=\frac{1}{2}(\log4.19+\log100)$

$=\frac{1}{2}(\log4.19+2)$

상용로그표에서 $\log4.19=0.6222$

따라서 $\log\sqrt{419}=\frac{1}{2}(0.6222+2)=1.3111$

0252

정답 ④

STEP A 로그의 성질을 이용하여 $\log k$의 값 구하기

$\log(453\times k)=2.3291$에서 $\log453+\log k=2.3291$

$\log k=2.3291-\log453=2.3291-\log(4.53\times10^2)$

$=2.3291-(2+0.6561)$

$=-0.3270$

$=-1+0.6730$

STEP B 상용로그표를 이용하여 k의 값 구하기

즉 상용로그표로부터 $\log4.71=0.6730$이므로

$\log k=-1+\log4.71=\log(4.71\times10^{-1})=\log0.471$

따라서 $k=0.471$

내신연계 출제문항 098

$\log\frac{262}{k}=1.0186$일 때, 다음 상용로그표를 이용하여 양수 k의 값을 구하면?

수	0	1	2	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200
2.7	.4314	.4330	.4346	.4518
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

① 26.1 ② 25.0 ③ 25.1
④ 26.2 ⑤ 27.2

STEP A 로그의 성질을 이용하여 $\log k$의 값 구하기

$\log\frac{262}{k}=\log262-\log k=1.0186$

$=\log(2.62\times10^2)-\log k$

$=\log2.62+2-\log k$

$=0.4183+2-\log k$

$=-\log k+2.4183$

$=1.0186$

$\therefore \log k=1.3997$

STEP B 상용로그표를 이용하여 k의 값 구하기

$\log k=1.3997=1+0.3997=\log10+\log2.51$

$=\log(10\times2.51)$

$=\log25.1$

따라서 $k=25.1$

정답 ③

0253

정답 ③

STEP A 로그의 성질을 이용하여 $\log 200$의 정수, 소수 부분을 구하기

$\log 200=\log(10^2\times 2)=\log 10^2+\log 2=2+\log 2$

이때 정수부분은 $n=2$와 소수부분은 $\alpha=\log 2$

따라서 $10^n+10^\alpha=10^2+10^{\log 2}=100+2=102$

0254

정답 ③

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 n, α의 관계식 구하기

$\log A=n+\alpha$ (단, n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면

이차방정식 $4x^2-11x+k=0$의 두 근이 n, α이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{11}{4}$, $n\alpha=\frac{k}{4}$

STEP B n이 정수, $0\le\alpha<1$임을 이용하여 n, α의 값 구하기

그런데 n은 정수이고 $0\le\alpha<1$이므로 $\frac{11}{4}=2+\frac{3}{4}$

$n=2$, $\alpha=\frac{3}{4}$

따라서 $k=4n\alpha=4\cdot 2\cdot\frac{3}{4}=6$

내신연계 출제문항 099

이차방정식 $4x^2+13x+k=0$의 두 근이 $\log A$의 정수 부분과 소수 부분일 때, 실수 k의 값은?

① -12 ② -13 ③ -15
④ -17 ⑤ -19

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 n, α의 관계식 구하기

$\log A=n+\alpha$ (단, n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면

이차방정식 $4x^2+13x+k=0$의 두 근이 n, α이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=-\frac{13}{4}$, $n\alpha=\frac{k}{4}$

STEP B n이 정수, $0\le\alpha<1$임을 이용하여 n, α의 값 구하기

이때 $n+\alpha=-\frac{13}{4}=-4+\frac{3}{4}$이므로 $n=-4$, $\alpha=\frac{3}{4}$

따라서 $k=4n\alpha=4\cdot(-4)\cdot\frac{3}{4}=-12$

정답 ①

0255

정답 ②

STEP A 근과 계수의 관계를 이용하여 n, α의 관계식 구하기

$\log A=[\log A]+\log A-[\log A]=n+\alpha$ (단, n은 정수, $0<\alpha<1$)

이차방정식 $5x^2-12x+k=0$의 두 근이 n, α이므로

근과 계수의 관계로부터

$n+\alpha=\frac{12}{5}$, $n\alpha=\frac{k}{5}$

STEP B n이 정수, $0\le\alpha<1$임을 이용하여 n, α의 값 구하기

이때 n은 정수, $0\le\alpha<1$이므로 $\frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}$

$\therefore n=2$, $\alpha=\frac{2}{5}$

따라서 $k=5n\alpha=5\cdot 2\cdot\frac{2}{5}=4$

0256

정답 ②

STEP A 로그의 성질을 이용하여 $\log 300$의 정수, 소수 부분을 구하기

$\log 300=\log(10^2\times 3)=\log 10^2+\log 3=2+\log 3$

이때 정수 부분 $n=2$와 소수 부분 $\alpha=\log 3$이다.

STEP B $9^{\frac{1}{n}}$, $3^{\frac{1}{\alpha}}$의 값을 구하여 근과 계수의 관계 이용하기

$9^{\frac{1}{n}}=9^{\frac{1}{2}}=3$, $3^{\frac{1}{\alpha}}=3^{\frac{1}{\log 3}}=3^{\log_3 10}=10$

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 3, 10이므로 근과 계수의 관계에서

$3+10=-p$, $3\times 10=q$

따라서 $p=-13$, $q=30$이므로 $p+q=17$

내신연계 출제문항 100

$\log 30$의 정수부분과 소수부분을 각각 n, α라 할 때, 3^n, $3^{\frac{1}{\alpha}}$을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2-ax+b=0$일 때, $a+b$의 값은?

① 41 ② 43 ③ 45
④ 47 ⑤ 49

STEP A 로그의 성질을 이용하여 $\log 30$의 정수, 소수 부분을 구하기

$\log 30=\log(10\times 3)=\log 10+\log 3=1+\log 3$이므로

$n=1$, $\alpha=\log 3$

STEP B 3^n, $3^{\frac{1}{\alpha}}$의 값을 구하여 근과 계수의 관계 이용하기

이때 $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\log 3}=\log_3 10$이므로

$3^{\frac{1}{\alpha}}=3^{\log_3 10}=10^{\log_3 3}=10$, $3^n=3^1=3$

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 3, 10이므로 근과 계수의 관계에서

$3+10=a$, $3\times 10=b$

따라서 $a=13$, $b=30$이므로 $a+b=43$

정답 ②

0257

정답 ②

STEP A $\log 6^{10}$의 정수부분을 구하기

$\log 6^{10}=10\log 6$

$=10(\log 2+\log 3)$

$=10(0.3010+0.4771)$

$=7.781$

따라서 $\log 6^{10}$의 정수 부분이 7이므로 6^{10}은 8자리의 정수이다.

0258

정답 ②

STEP A $\log 5^{30}$의 정수부분을 구하기

$\log 5^{30}=30\log 5$

$=30\log\frac{10}{2}$

$=30(\log 10-\log 2)$

$=30(1-0.3010)$

$=30\times 0.699$

$=20.97$

따라서 $\log 5^{30}$의 정수 부분이 20이므로 5^{30}은 21자리의 정수이다.

0259

정답 ④

STEP A **7^{100}이 85자리의 정수임을 이용하여 $\log 7$의 범위 구하기**

7^{100}은 85자리의 정수이므로 $\log 7^{100}$의 정수 부분은 84

즉 $84 \le \log 7^{100} < 85$에서 $84 \le 100\log 7 < 85$

$\therefore 0.84 \le \log 7 < 0.85$ ...... ㉠

STEP B **부등식을 이용하여 $\log 7^{30}$의 정수 부분 구하기**

$\log 7^{30} = 30\log 7$이므로 ㉠의 각 변에 30을 곱하면

이때 $30 \times 0.84 \le 30\log 7 < 30 \times 0.85$이므로 $25.2 \le \log 7^{30} < 25.5$

따라서 $\log 7^{30}$의 정수 부분이 25이므로 7^{30}은 26자리의 정수이다.

내신연계 출제문항 101

23^{100}은 137자리의 정수일 때, 23^{50}은 몇 자리 정수인가?

① 32 ② 35 ③ 47
④ 54 ⑤ 69

STEP A **23^{100}이 137자리의 정수임을 이용하여 $\log 23$의 범위 구하기**

23^{100}은 137자리 정수이므로 $\log 23^{100}$의 정수 부분은 136이다.

즉 $136 \le \log 23^{100} < 137$에서 $136 \le 100\log 23 < 137$

$\therefore 1.36 \le \log 23 < 1.37$ ...... ㉠

STEP B **부등식을 이용하여 $\log 23^{50}$의 정수 부분 구하기**

$\log 23^{50} = 50\log 23$이므로 ㉠의 각 변에 50을 곱하면

$68 \le 50\log 23 < 68.5$이므로 $68 \le \log 23^{50} < 69$

따라서 $\log 23^{50}$의 정수 부분이 68이므로 23^{50}은 69자리의 자연수이다.

정답 ⑤

0260

정답 ①

STEP A **주어진 식에서 x의 값 구하기**

$\log_3\{\log_4(\log_2 x)\} = 1$에서 $\log_4(\log_2 x) = 3$, $\log_2 x = 4^3 = 64$

$\therefore x = 2^{64}$

STEP B **$\log x$의 정수 부분 구하기**

양변에 상용로그를 취하면 $\log x = 64\log 2$, $\log x = 19.2$

따라서 $\log x$의 정수 부분이 19이므로 x는 20자리의 정수이다.

$\therefore n = 20$

0261

정답 ④

STEP A **$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$의 정수 부분 구하기**

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = -50\log 2 = -50 \times 0.3010$$
$$= -15.0500$$
$$= -16 + 0.9500$$

따라서 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$의 정수 부분이 -16이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$은 소수점 아래 16째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

참고 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = -50\log 2 = -50 \cdot 0.3010 = -15.0500$이므로

$-16 < \log\left(\frac{1}{2}\right)^{50} < -15$, 즉 $10^{-16} < \left(\frac{1}{2}\right)^{50} < 10^{-15}$

0262

정답 ④

STEP A **$\log\left(\frac{1}{5}\right)^{9}$의 정수 부분 구하기**

$$\log\left(\frac{1}{5}\right)^{9} = \log 5^{-9}$$
$$= -9\log 5$$
$$= -9\log\frac{10}{2}$$
$$= -9(1 - \log 2)$$
$$= -9 \times 0.699$$
$$= -6.291$$
$$= -7 + 0.709$$

따라서 $\log\left(\frac{1}{5}\right)^{9}$의 정수 부분이 -7이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{9}$은 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

0263

정답 ⑤

STEP A **18^{18}이 23자리의 정수임을 이용하여 $18\log 18$의 범위 구하기**

18^{18}은 23자리의 정수이므로 $\log 18^{18}$의 정수 부분은 22이다.

즉 $22 \le \log 18^{18} < 23$에서

$22 \le 18\log 18 < 23$, $18^{18} \ne 10^{22}$이므로

$22 < 18\log 18 < 23$ ...... ㉠

STEP B **부등식을 이용하여 $\log 18^{-18}$의 정수 부분 구하기**

㉠의 각 변에 -1을 곱하면

$-23 < -18\log 18 < -22$

$-23 < \log 18^{-18} < -22$

따라서 $\log 18^{-18}$의 정수 부분이 -23이므로 18^{-18}은 소수점 아래 23째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

내신연계 출제문항 102

자연수 a에 대하여 a^{20}이 100자리 정수일 때, a^{-10}은 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타날 때, n의 값은?

① 47 ② 48 ③ 49
④ 50 ⑤ 51

STEP A **a^{20}이 100자리의 정수임을 이용하여 $\log a$의 범위 구하기**

a^{20}이 100자리 정수이므로 $\log a^{20}$의 정수 부분은 99이다.

즉 $99 \le \log a^{20} < 100$이므로 $99 \le 20\log a < 100$

$\therefore 4.95 \le \log a < 5$ ...... ㉠

STEP B **부등식을 이용하여 $\log a^{-10}$의 정수 부분 구하기**

한편 $\log a^{-10} = -10\log a$이고

㉠에서 $-50 < -10\log a \le -49.5$

따라서 $\log a^{-10}$의 정수 부분이 -50이므로 a^{-10}은 소수점 아래 50째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore n = 50$

정답 ④

0264

정답 ④

STEP A $\log 5^{15}$의 정수 부분을 구하여 5^{15}의 자릿수 구하기

$\log 5^{15}=15\log 5=15\log\frac{10}{2}=15(\log 10-\log 2)$

$=15(1-0.3010)$

$=10.485$

이때 $\log 5^{15}$의 정수 부분이 10이므로 5^{15}은 11자리 수이다.

STEP B $\log 5^{15}$의 소수 부분의 범위를 이용하여 최고 자리의 숫자 구하기

또, $\log 5^{15}$의 소수 부분이 0.485이므로 $\log 4=2\log 2=0.602$

$\log 3<0.485<\log 4$

$10+\log 3<10.485<10+\log 4$

$\log(3\cdot 10^{10})<\log 5^{15}<\log(4\cdot 10^{10})$

$\therefore 3\cdot 10^{10}<5^{15}<4\cdot 10^{10}$

즉 5^{15}의 최고 자리의 숫자는 3

따라서 $a=11$, $b=3$이므로 $a-b=8$

내/신/연/계/ 출제문항 103

2^{50}은 a자리의 수이고 최고 자리의 숫자는 b라고 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $\log 2=0.3010$)

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

STEP A $\log 2^{50}$의 정수 부분을 구하여 a의 값 구하기

$\log 2^{50}=50\times\log 2=50\times 0.3010=15.05=15+0.05$

$\log 2^{50}$의 정수 부분이 15이므로 2^{50}은 16자리의 정수이다.

$\therefore a=16$

STEP B 2^{50}의 최고 자리의 숫자 구하기

$\log 2=0.3010$이므로 $0<0.05<\log 2$

$15<15+0.05<15+\log 2$

$\log 10^{15}<\log 2^{50}<\log(2\cdot 10^{15})$

$10^{15}<2^{50}<2\cdot 10^{15}$

즉 2^{50}의 최고 자리의 숫자는 1

따라서 $a=16$, $b=1$이므로 $a+b=17$

정답 ④

0265

정답 ②

STEP A $\log 50^{-5}$의 정수 부분을 구하여 n의 값 구하기

$\log\left(\frac{1}{50}\right)^5=5\log\frac{2}{100}=5(\log 2-2)=5(0.3010-2)$

$=-8.495$

$=-9+0.505$

$\log\left(\frac{1}{50}\right)^5$의 정수 부분이 -9이므로 $\left(\frac{1}{50}\right)^5$는 소수점 아래 9째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore n=9$

STEP B $\log 50^{-5}$의 소수 부분의 범위를 이용하여 m의 값 구하기

이때 $\log 3=0.4771$, $\log 4=2\log 2=0.602$이므로 $\log 3<0.505<\log 4$

$-9+\log 3<-9+0.505<-9+\log 4$

$\log(3\times 10^{-9})<\log 50^{-5}<\log(4\times 10^{-9})$

$\therefore 3\times 10^{-9}<50^{-5}<4\times 10^{-9}$

즉 50^{-5}의 소수점 아래 9째 자리의 수는 3 $\therefore m=3$

따라서 $n=9$, $m=3$이므로 $m+n=12$

내/신/연/계/ 출제문항 104

$\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$에 대하여 $\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$은 소수점 아래 a째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 b가 나타날 때, $a+b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

STEP A $\log\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$의 정수 부분을 구하여 a의 값 구하기

$\log\left(\frac{5}{6}\right)^{30}=30\log\frac{10}{2^2\times 3}=30(1-2\log 2-\log 3)$

$=30(1-2\times 0.3010-0.4771)$

$=-2.373=-3+0.627$

$\log\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$의 정수 부분이 -3이므로 $\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$은 소수점 아래 3째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore a=3$

STEP B $\log\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$의 소수 부분의 범위를 이용하여 b의 값 구하기

이때 $\log 4=2\log 2=0.602$, $\log 5=1-\log 5=0.6990$이므로

$\log 4<0.627<\log 5$

$-3+\log 4<-3+0.627<-3+\log 5$

$\log(3\times 10^{-3})<\log\left(\frac{5}{6}\right)^{30}<\log(5\times 10^{-3})$

$\therefore \frac{4}{10^3}<\left(\frac{5}{6}\right)^{30}<\frac{5}{10^3}$

즉 $\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$의 소수점 아래 3째 자리의 수는 4 $\therefore b=4$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로 $a+b=7$

정답 ①

0266

정답 ②

STEP A $\log x^2$의 정수 부분을 구하여 a의 값 구하기

$\log x^2=2\log x=-\frac{8}{5}=-2+\frac{2}{5}=-2+0.4$

즉 $\log x^2$의 정수 부분이 -2이므로 x^2은 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore a=2$

STEP B $\log x^2$의 소수 부분의 범위를 이용하여 b의 값 구하기

한편 $\log 2<0.4<\log 3$이므로 $-2+\log 2<\log x^2<-2+\log 3$

$\log 10^{-2}+\log 2<\log x^2<\log 10^{-2}+\log 3$

$\log\frac{2}{100}<\log x^2<\log\frac{3}{100}$

$\therefore 0.02<x^2<0.03$

즉 x^2은 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 2가 나타난다.

$\therefore b=2$

따라서 $a+b=2+2=4$

0267

정답 ③

STEP A 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차가 정수임을 이해하기

$\log x^2-\log x=2\log x-\log x=\log x$

즉 $\log x$가 정수이다.

STEP B $\log x$의 범위를 구하여 $\log x$의 값 구하기

$10\le x<100$의 각 변에 상용로그를 취하면

$1\le\log x<2$

따라서 $\log x$가 정수이므로 $\log x=1$에서 $x=10$

0268

정답 ⑤

STEP A $\log x$의 범위 구하기

$10 < x < 1000$에서 $\log 10 < \log x < \log 1000$이므로

$1 < \log x < 3$ …… ㉠

STEP B 두 상용로그의 차가 정수임을 이용하여 x의 값 구하기

$\log \sqrt[3]{x}$와 $\log x$의 차가 정수이므로 $\log x - \log \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}\log x$

즉 $\frac{2}{3}\log x$가 정수이므로 ㉠에서 $\frac{2}{3} < \frac{2}{3}\log x < 2$

$\frac{2}{3}\log x = 1$에서 $\log x = \frac{3}{2}$

$\therefore x = 10^{\frac{3}{2}}$

STEP C x^8의 값 구하기

따라서 $x^8 = \left(10^{\frac{3}{2}}\right)^8 = 10^{12}$

0269

정답 ⑤

STEP A 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차가 정수임을 이해하기

조건 (나)에서 $\log x^2$의 소수 부분과 $\log x^5$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^5 - \log x^2 = 5\log x - 2\log x = 3\log x$

즉 $3\log x$는 정수이다.

STEP B $3\log x$의 범위를 구하여 $3\log x$의 값 구하기

조건 (가)에서 $\log x$의 정수부분이 2이므로 $2 \le \log x < 3$

$\therefore 6 \le 3\log x < 9$

이때 $3\log x$가 정수이므로 $3\log x = 6$ 또는 $3\log x = 7$ 또는 $3\log x = 8$

STEP C 양수 x의 값을 구하여 모두 곱하기

$\log x = 2$ 또는 $\log x = \frac{7}{3}$ 또는 $\log x = \frac{8}{3}$

$\therefore x = 10^2$ 또는 $x = 10^{\frac{7}{3}}$ 또는 $x = 10^{\frac{8}{3}}$

따라서 모든 양수 x값의 곱은 $10^2 \times 10^{\frac{7}{3}} \times 10^{\frac{8}{3}} = 10^{2+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}} = 10^7$이므로

$n = 7$

내신연계 출제문항 105

다음 조건을 만족시키는 모든 양수 x의 값의 곱을 k라 할 때, $\log k^3$의 값은?

> (가) $\log x$의 정수 부분이 2이다.
> (나) $\log x^2$의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분이 같다.

① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

STEP A 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차가 정수임을 이해하기

조건 (나)에서 $\log x^2$의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^2 - \log \sqrt{x} = 2\log x - \frac{1}{2}\log x = \frac{3}{2}\log x$

즉 $\frac{3}{2}\log x$는 정수이다.

STEP B $\frac{3}{2}\log x$의 범위를 구하여 $\frac{3}{2}\log x$의 값 구하기

조건 (가)에서 $\log x$의 정수 부분이 2이므로 $2 \le \log x < 3$

$\therefore 3 \le \frac{3}{2}\log x < \frac{9}{2}$

이때 $\frac{3}{2}\log x$가 정수이므로 $\frac{3}{2}\log x = 3$ 또는 $\frac{3}{2}\log x = 4$

STEP C 양수 x의 값을 구하여 모두 곱하기

$\log x = 2$ 또는 $\log x = \frac{8}{3}$

$\therefore x = 10^2$ 또는 $x = 10^{\frac{8}{3}}$

모든 양수 x의 값의 곱 k는

$k = 10^2 \times 10^{\frac{8}{3}} = 10^{2+\frac{8}{3}} = 10^{\frac{14}{3}}$

따라서 $\log k^3 = 3\log k = 3\log 10^{\frac{14}{3}} = 3 \cdot \frac{14}{3} = 14$

정답 ④

0270

정답 ③

STEP A 소수 부분의 합이 1이면 두 상용로그의 합이 정수임을 이해하기

$\log x$의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x + \log \sqrt{x} = \log x + \frac{1}{2}\log x = \frac{3}{2}\log x$

즉 $\frac{3}{2}\log x$가 정수이다.

STEP B $\frac{3}{2}\log x$의 범위를 구하여 x의 값 구하기

$10 \le x < 100$에서 $1 \le \log x < 2$

$\therefore \frac{3}{2} \le \frac{3}{2}\log x < 3$

이때 $\frac{3}{2}\log x$가 정수이므로 $\frac{3}{2}\log x = 2$

따라서 $\log x = \frac{4}{3}$이므로 $x = 10^{\frac{4}{3}}$

0271

정답 ④

STEP A $\log x$의 범위 구하기

$10^3 < x < 10^4$이므로 $3 < \log x < 4$ …… ㉠

STEP B 소수 부분의 합이 1이면 두 상용로그의 합이 정수임을 이해하기

$\log x$와 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x + \log \sqrt[3]{x} = \log x + \log x^{\frac{1}{3}} = \log x + \frac{1}{3}\log x = \frac{4}{3}\log x$

즉 $\frac{4}{3}\log x$가 정수이다.

STEP C $\frac{4}{3}\log x$의 범위를 구하여 x의 값 구하기

㉠으로부터

$4 < \frac{4}{3}\log x < \frac{16}{3} = 5.33$이므로 $\frac{4}{3}\log x = 5$

이때 $\log x = \frac{15}{4}$이므로 $x = 10^{\frac{15}{4}}$

STEP D $\log \sqrt{x}$의 소수 부분을 구하기

즉 $\log \sqrt{x} = \log 10^{\frac{15}{8}} = \frac{15}{8} = 1 + \frac{7}{8}$

$\log \sqrt{x}$의 소수 부분은 $\frac{7}{8}$

따라서 $p = 8$, $q = 7$이므로 $p + q = 15$

0272

정답 ③

STEP ① 소수 부분의 합이 1이면 두 상용로그의 합이 정수임을 이해하기

조건 (나)에서 $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이므로
$\log x^2+\log x=2\log x+\log x=3\log x$에서 $3\log x$가 정수이다.

STEP ② $3\log x$의 범위를 구하여 x의 값 구하기

조건 (가)에서 $\log x$의 정수 부분이 2이므로 $2 \le \log x < 3$
$\therefore\ 6 \le 3\log x < 9$
이때 $3\log x$는 정수이므로
$3\log x=6$ 또는 $3\log x=7$ 또는 $3\log x=8$
$\log x=2$ 또는 $\log x=\dfrac{7}{3}$ 또는 $\log x=\dfrac{8}{3}$
$\therefore\ x=10^2$ 또는 $x=10^{\frac{7}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{8}{3}}$

STEP ③ 소수 부분의 합이 1이 되지 않는 x의 값 제외하기

그런데 $x=10^2$이면 $\log x=2$, $\log x^2=4$가 되어 $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 0이 된다. 즉 $x \neq 10^2$

STEP ④ 모든 x의 값의 곱을 구하여 $\log k$의 값 구하기

따라서 $x=10^{\frac{7}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{8}{3}}$이므로 $k=10^{\frac{7}{3}}\times 10^{\frac{8}{3}}=10^{\frac{7}{3}+\frac{8}{3}}=10^5$
$\therefore\ \log k=\log 10^5=5$

내신연계 출제문항 106

$10^2 < x < 10^4$인 x에 대하여 $\log x$의 소수부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수부분의 합이 1이 되는 x를 모두 곱한 값을 k라 할 때, $\log k$의 값은?

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

STEP ① $\log x$의 범위 구하기

$10^2 < x < 10^4$이므로 $2 < \log x < 4$　…… ㉠

STEP ② 소수 부분의 합이 1이면 두 상용로그의 합이 정수임을 이해하기

$\log x$와 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로 $\log x+\log\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}\log x$
즉 $\dfrac{3}{2}\log x$는 정수이다.

STEP ③ $\dfrac{3}{2}\log x$의 범위를 구하여 x의 값 구하기

㉠으로부터 $3 < \dfrac{3}{2}\log x < 6$이므로 $\dfrac{3}{2}\log x=4$ 또는 $\dfrac{3}{2}\log x=5$
(ⅰ) $\dfrac{3}{2}\log x=4$일 때, $\log x=\dfrac{8}{3}$　$\therefore\ x=10^{\frac{8}{3}}$
(ⅱ) $\dfrac{3}{2}\log x=5$일 때, $\log x=\dfrac{10}{3}$　$\therefore\ x=10^{\frac{10}{3}}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 x의 값의 곱은 $k=10^{\frac{8}{3}}\times 10^{\frac{10}{3}}=10^{\frac{18}{3}}=10^6$
따라서 $\log k=\log 10^6=6$

정답 ④

0273

정답 ⑤

STEP ① 정수 n의 범위에 따라 $[\log n]$의 값 구하기

자연수 N에 대하여 $[\log \mathrm{N}]$은 $\log \mathrm{N}$의 정수부분이다.
N이 n 자리의 자연수이면 $\log \mathrm{N}$의 정수부분은 $n-1$이다.
자연수 1, 2, 3, $\cdots$, 100에 대하여
$[\log 1]=[\log 2]=[\log 3]=\cdots=[\log 9]=0$
$[\log 10]=[\log 11]=[\log 12]=\cdots=[\log 99]=1$
$[\log 100]=2$

STEP ② 주어진 식의 값 구하기

$[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+[\log 4]+\cdots+[\log 100]$
$=0\cdot 9+1\cdot 90+2\cdot 1$
$=92$

0274

정답 ⑤

STEP ① N이 두 자리의 자연수일 때, $[\log \mathrm{N}]$의 값 구하기

N이 두 자리의 자연수이므로
$10 \le \mathrm{N} < 100$에서 $1 \le \log \mathrm{N} < 2$
즉 모든 두 자리의 자연수 N에 대하여 $[\log \mathrm{N}]=1$

STEP ② 조건을 만족하는 N의 값 구하기

따라서 $\log_4 \mathrm{N}=[\log \mathrm{N}]+2=3$이므로 $\mathrm{N}=4^3=64$

0275

정답 ③

STEP ① 정수 k의 범위에 따라 $[\log_2 k]$의 값 구하기

$1 \le k \le 50$인 정수 k에 대하여
$2^0 \le k < 2$에서 $0 \le \log_2 k < 1$, $[\log_2 k]=0$
$2 \le k < 2^2$에서 $1 \le \log_2 k < 2$, $[\log_2 k]=1$
$2^2 \le k < 2^3$에서 $2 \le \log_2 k < 3$, $[\log_2 k]=2$
$2^3 \le k < 2^4$에서 $3 \le \log_2 k < 4$, $[\log_2 k]=3$
$2^4 \le k < 2^5$에서 $4 \le \log_2 k < 5$, $[\log_2 k]=4$
$2^5 \le k \le 50$에서 $5 \le \log_2 k < 6$, $[\log_2 k]=5$

STEP ② 주어진 식의 값 구하기

$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+[\log_2 4]+\cdots+[\log_2 50]$
$=0+1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 8+4\cdot 16+5\cdot 19$
$=0+2+8+24+64+95$
$=193$

내신연계 출제문항 107

$[\log_3 1]+[\log_3 2]+[\log_3 3]+[\log_3 4]+\cdots+[\log_3 100]$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 272　② 276　③ 280
④ 284　⑤ 288

STEP ① 정수 n의 범위에 따라 $[\log_3 n]$의 값 구하기

$1 \le n \le 100$인 정수 n에 대하여
$1 \le n < 3$에서 $0 \le \log_3 n < 1$, $[\log_3 n]=0$
$3 \le n < 9$에서 $1 \le \log_3 n < 2$, $[\log_3 n]=1$
$9 \le n < 27$에서 $2 \le \log_3 n < 3$, $[\log_3 n]=2$
$27 \le n < 81$에서 $3 \le \log_3 n < 4$, $[\log_3 n]=3$
$81 \le n \le 100$에서 $4 \le \log_3 n < 5$, $[\log_3 n]=4$

STEP ② 주어진 식의 값 구하기

$[\log_3 1]+[\log_3 2]+[\log_3 3]+[\log_3 4]+\cdots+[\log_3 100]$
$=0\cdot 2+1\cdot 6+2\cdot 18+3\cdot 54+4\cdot 20$
$=0+6+36+162+80$
$=284$

정답 ④

0276

정답 ③

STEP A $\log x^2$과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같음을 이해하기

조건 (나)에서

$\log x^2-[\log x^2]$은 $\log x^2$의 소수 부분이고

$\log \frac{1}{x}-\left[\log \frac{1}{x}\right]$은 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이므로

$\log x^2$의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같다.

STEP B 두 상용로그의 차가 정수임을 이용하여 x의 값 구하기

즉 $\log x^2-\log \frac{1}{x}=2\log x+\log x=3\log x$에서

$3\log x$가 정수이다.

조건 (가)에서

$3\le \log x<4$이므로 $9\le 3\log x<12$

이때 $3\log x$가 정수이므로

$3\log x=9$ 또는 $3\log x=10$ 또는 $3\log x=11$

$\log x=3$ 또는 $\log x=\frac{10}{3}$ 또는 $\log x=\frac{11}{3}$

$\therefore x=10^3$ 또는 $x=10^{\frac{10}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{11}{3}}$

STEP C 모든 x의 값을 곱하여 $\log M$의 값 구하기

$M=10^3\times 10^{\frac{10}{3}}\times 10^{\frac{11}{3}}=10^{3+\frac{10}{3}+\frac{11}{3}}=10^{10}$

따라서 $\log M=\log 10^{10}=10$

내신연계 출제문항 108

다음 조건을 만족하는 자연수 N의 값은?
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

(가) $[\log N]=[\log 225]$
(나) $\log N-[\log N]=\log 32-[\log 20]$

① 32 ② 230 ③ 320
④ 2250 ⑤ 3200

STEP A 조건 (가)에서 $\log N$의 정수 부분 구하기

조건 (가)에서 $[\log 225]=2$이므로 $\log N$의 정수 부분은 2이다.

STEP B 조건 (나)에서 $\log N$의 소수 부분 구하기

조건 (나)에서 $\log 32-[\log 20]=\log 32-1=\log 3.2$이므로

$\log N$의 소수 부분은 $\log 3.2$

STEP C $\log N$의 값을 구하여 N의 값 구하기

$$\begin{aligned}\log N&=2+\log 3.2\\&=\log 10^2+\log 3.2\\&=\log(3.2\times 10^2)\\&=\log 320\end{aligned}$$

따라서 $N=320$

정답 ③

0277

정답 ④

STEP A 주어진 음향 출력, 음향 파워 레벨 값을 이용하여 k의 값 구하기

음향 출력이 $\frac{1}{10^4}$W일 때, 음향 파워 레벨은 80dB이므로

$80=10\log \frac{\frac{1}{10^4}}{k}$, $8=\log 10^{-4}-\log k$

$\log k=-12$

$\therefore k=10^{-12}$

STEP B 음향 출력이 200W일 때, 주어진 식에 대입하여 음향 파워 레벨의 값 구하기

이때 음향 출력이 200W일 때, 이 스피커의 음향 파워 레벨은

$$\begin{aligned}y=10\log \frac{200}{10^{-12}}&=10\log 200+120\\&=10\log(2\times 10^2)+120\\&=10(0.3+2)+120\\&=143\end{aligned}$$

0278

정답 ④

STEP A 주어진 식에 $I=600$, $S=0.7$을 대입하여 k의 값 구하기

$I=600$, $S=0.7$이므로

$$\begin{aligned}0.7=k\log 600&=k\log(10^2\times 6)\\&=k(\log 10^2+\log 6)\\&=2.8k\end{aligned}$$

즉 $0.7=2.8k$에서 $k=\frac{1}{4}$

STEP B 자극의 세기가 60일 때, 감각의 세기 구하기

따라서 자극의 세기가 60일 때, 구하는 감각의 세기는

$\frac{1}{4}\log 60=\frac{1}{4}\log(10\times 6)=\frac{1}{4}(\log 10+\log 6)=0.45$

내신연계 출제문항 109

금속에 열을 가했을 때, 금속의 온도는 시간이 흐름에 따라 변한다.
어느 금속의 처음 온도를 T_0°C, 열을 가한 지 t분 후 온도를 T°C라고 하면

$3^{T-T_0}=(7t+6)^k$ (k는 상수)

이라고 한다. 이 금속의 처음 온도가 30°C이고 열을 가한 지 3분 후 온도가 300°C일 때, 480°C가 되는 것은 열을 가한지 몇 분 후인가?

① $\frac{235}{7}$분 ② $\frac{236}{7}$분 ③ $\frac{237}{7}$분
④ $\frac{239}{7}$분 ⑤ $\frac{240}{7}$분

STEP A 주어진 식에 $T_0=30$, $t=3$, $T=300$ 을 대입하여 k의 값 구하기

$T_0=30$이고 $t=3$일 때, $T=300$이므로

$3^{300-30}=(7\times 3+6)^k$, $3^{270}=3^{3k}$

$\therefore k=90$

STEP B $T=480$일 때, t의 값 구하기

따라서 $t=a$일 때, $T=480$이라 하면

$3^{480-30}=(7a+6)^{90}$, $3^{45}=(7a+6)^9$, $7a+6=243$

$\therefore a=\frac{237}{7}$(분)

정답 ③

0279 정답 ④

STEP A $C_2=2C_1$임을 이용하여 상수 k의 값 구하기

$C_2=2C_1$이므로 $0.42=k(\log 2C_1-\log C_1)$

$$=k\log\frac{2C_1}{C_1}$$
$$=k\log 2$$
$$=0.3k$$

$\therefore k=1.4$

STEP B $C_2=8C_1$임을 이용하여 필요한 에너지 구하기

이때 $C_2=8C_1$이므로 $E=1.4(\log 8C_1-\log C_1)$

$$=1.4\times\log\frac{8C_1}{C_1}$$
$$=1.4\times\log 8$$
$$=1.4\times\log 2^3$$
$$=1.4\times 3\log 2$$
$$=1.4\times 0.9$$
$$=1.26$$

따라서 구하는 에너지는 1.26kcal

내신연계 출제문항 110

소리의 세기가 $I(W/m^2)$인 음원으로부터 $r(m)$만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기 P(데시벨)는

$$P=10\left(12+\log\frac{I}{r^2}\right)$$

이다. 어떤 음원으로부터 1m만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기가 80(데시벨)일 때, 같은 음원으로부터 10m만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기가 a(데시벨)이다. a의 값은?

① 50　② 55　③ 60
④ 65　⑤ 70

STEP A 주어진 조건에서 $\log I$ 구하기

음원으로부터 $r=1$m만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기가 $P=80$(데시벨)이므로 조건식에 대입하면

$80=10\left(12+\log\frac{I}{1^2}\right)=120+10\log I$에서

$10\log I=-40$

즉 $\log I=-4$이므로 $I=10^{-4}$

STEP B $\log I$를 주어진 조건에 대입하여 a 구하기

이때 같은 음원으로부터 $r=10$m일 때,
소리의 상대적 세기가 a(데시벨)이므로
$I=10^{-4}$, $r=10$, $P=a$를 주어진 식에 대입하면

$$a=10\left(12+\log\frac{10^{-4}}{10^2}\right)$$
$$=10(12+\log 10^{-6})$$
$$=10(12-6)$$
$$=60$$

따라서 $a=60$ 정답 ③

0280 정답 ③

STEP A 일상적인 대화 소리의 크기를 I_a라 두고 I_0로 표현하기

일상적인 대화 소리의 크기를 I_a, 일상적인 대화 소리의 세기를 L_a라고 하면

$L_a=60=10\log\frac{I_a}{I_0}$, $\frac{I_a}{I_0}=10^6$

$\therefore I_a=10^6 I_0$

STEP B I_b가 I_a의 1000배임을 이용하여 L_b의 값 구하기

번잡한 곳의 소리의 크기를 I_b, 번잡한 곳의 소리의 세기를 L_b라고 하면

$L_b=10\log\frac{I_b}{I_0}$

이때 I_b는 I_a의 1000배이므로 $I_b=1000I_a=10^3\times10^6I_0=10^9I_0$

즉 $L_b=10\log\frac{I_b}{I_0}=10\log\frac{10^9I_0}{I_0}=90$

따라서 번잡한 곳의 소리의 세기는 $90dB$

0281 정답 ③

STEP A 주어진 식에 값을 대입하여 C_1, C_2의 값 구하기

가용 대역폭이 $B(H_z)$로 일정하고 수신 신호 전력이 1.2W일 때,
잡음 전력이 0.4W인 채널 용량을 C_1(bps)이라 하면

$C_1=B\log_2\left(1+\frac{1.2}{0.4}\right)=B\log_2 4=2B$

가용 대역폭이 $B(Hz)$로 일정하고 수신 신호 전력이 1.2W일 때,
잡음 전력이 a(W)인 채널 용량을 C_2(bps)라 하면

$C_2=B\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)$

STEP B $C_2=3C_1$임을 이용하여 a의 값 구하기

$C_2=3C_1$이므로 $B\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)=3\times 2B$

즉 $\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)=6$에서 로그의 정의에 의하여

$1+\frac{1.2}{a}=2^6$, $\frac{1.2}{a}=63$

$\therefore a=\frac{1.2}{63}=\frac{2}{105}$

따라서 $p=105$, $q=2$이므로 $p+q=107$

0282 정답 ④

STEP A 매질 A에서 매질 B로 투과시킬 때의 투과손실 구하기

매질 A에서 매질 B로 투과시킬 때,
입사되는 음파의 에너지가 투과된 음파의 에너지의 a배이므로 $I=aT$

이때 투과손실 $TL_1=10\log\frac{aT}{T}=10\log a$ …… ㉠

STEP B 매질 A에서 매질 C로 투과시킬 때의 투과손실 구하기

매질 A에서 매질 C로 투과시킬 때,
입사되는 음파의 에너지가 투과된 음파의 에너지의 4배이므로 $I=4T$

이때 투과손실 $TL_2=10\log\frac{4T}{T}=10\log 4$ …… ㉡

STEP C $\frac{TL_1}{TL_2}=\frac{5}{2}$임을 이용하여 a의 값 구하기

㉠÷㉡에서

$\frac{TL_1}{TL_2}=\frac{10\log a}{10\log 4}=\log_4 a=\frac{5}{2}$

따라서 $a=4^{\frac{5}{2}}=2^5=32$

내신연계 출제문항 111

도로용량이 C인 어느 도로구간의 교통량을 V, 통행시간을 t라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log\left(\frac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{V}{C}\ (t>t_0)$$

(단, t_0은 도로 특성 등에 따른 기준통행시간이고, k는 상수이다.)
이 도로구간의 교통량이 도로용량의 2배일 때, 통행시간은 기준통행시간 t_0의 $\frac{7}{2}$배이다. k의 값은?

① $-4\log 2$ ② $1-7\log 2$ ③ $-3\log 2$
④ $1-6\log 2$ ⑤ $1-5\log 2$

STEP A 문제의 조건에서 V와 C, t와 t_0의 비를 확인하여 주어진 관계식에 대입하여 k의 값 구하기

도로구간의 교통량이 도로용량의 2배이므로 $V=2C$
또, 통행시간은 기준 통행시간 t_0의 $\frac{7}{2}$배이므로 $t=\frac{7}{2}t_0$
따라서 이 값을 $\log\left(\frac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{V}{C}$에 대입하면

$$k=\log\left(\frac{7}{2}-1\right)-4\log\frac{2C}{C}=\log\frac{5}{2}-4\log 2=\log\frac{5}{32}$$
$$=\log\frac{10}{64}$$
$$=1-\log 64$$
$$=1-6\log 2$$

정답 ④

0283

정답 ②

STEP A 주어진 식을 이용하여 E_1, E_2의 값 구하기

규모 8의 지진의 에너지를 E_1, 규모 6의 지진의 에너지를 E_2라고 하면
$\log E_1=11.4+1.5\times 8$ …… ㉠
$\log E_2=11.4+1.5\times 6$ …… ㉡

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\frac{E_1}{E_2}$의 값 구하기

㉠−㉡을 하면
$\log E_1-\log E_2=3$, $\log\frac{E_1}{E_2}=3$이므로 $\frac{E_1}{E_2}=10^3=1000$
따라서 규모 8의 지진은 규모 6의 지진에 비하여 에너지가 10^3배 더 강하다.

내신연계 출제문항 112

지진의 규모가 M인 지진의 진원지에서 에너지의 크기를 E라고 하면
$$\log E=11.8+1.5M$$
인 관계가 성립한다. 지진의 규모가 9인 진원지에서의 에너지의 크기를 E_1, 지진의 규모가 5.5인 진원지에서의 에너지의 크기를 E_2라고 한다.
E_1은 E_2의 k배일 때, k의 값은? (단, $\log 1.77=0.25$)

① 17.7 ② 177 ③ 1770
④ 17700 ⑤ 177000

STEP A 주어진 식을 이용하여 E_1, E_2의 값 구하기

규모 9.0의 지진의 에너지를 E_1, 규모 5.5의 지진의 에너지를 E_2라고 하면
$\log E_1=11.8+1.5\times 9$ …… ㉠
$\log E_2=11.8+1.5\times 5.5$ …… ㉡

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\frac{E_1}{E_2}$의 값 구하기

㉠−㉡을 하면 $\log E_1-\log E_2=5.25$

$\log\frac{E_1}{E_2}=5.25=5+0.25$이므로 $\frac{E_1}{E_2}=177000$
따라서 $E_1=177000E_2$이므로 $k=177000$

정답 ⑤

0284

정답 ①

STEP A 오렌지 주스와 포도 주스의 수소 이온 농도를 구하기

pH가 2.3인 오렌지 주스와 pH가 3.4인 포도 주스의 수소 이온 농도를 각각 a, b로 놓으면
$2.3=-\log a$ …… ㉠
$3.4=-\log b$ …… ㉡

STEP B 로그의 성질을 이용하여 a, b의 관계식 구하기

㉡−㉠을 하면 $1.1=\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}=10^{1.1}$
$\therefore a=10^{1.1}b$
따라서 pH가 2.3인 오렌지 주스의 수소 이온 농도는 pH가 3.4인 포도 주스의 수소 이온 농도의 $10^{1.1}$배이다.

내신연계 출제문항 113

어떤 용액의 수소이온 농도를 $[H^+]$라 할 때, 이 용액의 산성도를 나타내는 pH는
$$pH=-\log[H^+]$$
로 정의된다. 사탕 한 개를 먹은 직후 타액의 pH는 6.6이었다.
10분 후 채취한 타액의 수소 이온 농도가 처음 채취한 타액의 50배이었다면 이때의 pH는? (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

① 3.7 ② 4.0 ③ 4.3
④ 4.6 ⑤ 4.9

STEP A 처음 채취한 타액의 수소 이온 농도를 구하기

처음 채취한 타액의 수소 이온 농도를 k라 하면
$-\log k=6.6$ $\therefore \log k=-6.6$

STEP B 10분 후에 채취한 타액의 pH 구하기

10분후 채취한 타액의 수소 이온 농도가 처음 채취한 타액의 50배이므로
이때의 pH는 $-\log 50k=-\log k-\log 50=6.6-(2-\log 2)$
$$=6.6-(2-0.3)$$
$$=6.6-1.7=4.9$$
따라서 10분 후에 채취한 타액의 pH는 4.9

정답 ⑤

0285

정답 ③

STEP A 조건을 만족하는 각각의 추진체의 분사속력을 식으로 표현하기

두 로켓 A, B의 추진체의 분사속력을 각각 $v_A$km/s, $v_B$km/s라고 하면
$9=v_A\log_a 16$ …… ㉠
$3=v_B\log_a 10$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{9}{3}=\frac{v_A\log_a 16}{v_B\log_a 10}$

$$3=\frac{v_A}{v_B}\log 16=\frac{v_A}{v_B}\log(10\times 1.6)=\frac{v_A}{v_B}(\log 10+\log 1.6)=\frac{v_A}{v_B}\times 1.2$$

즉 $\frac{v_A}{v_B}=2.5$이므로 $v_A=2.5v_B$
따라서 로켓 A의 추진체의 분사속력은 로켓 B의 추진체의 분사속력의 2.5배이다.

0286

정답 ①

STEP A 주어진 값을 식에 대입하여 전파 감쇠비를 구하기

세기가 100와트(W)인 전파가 어떤 벽을 투과하여 세기가 25.2와트(W)인 전파로 바뀌었을 때, 이 벽의 전파 감쇠비는

$$\begin{aligned}10\log\frac{y}{x}\text{dB}=10\log\frac{25.2}{100}\text{dB}&=10(\log 25.2-\log 100)\text{dB}\\&=10(\log 2.52\times 10-\log 100)\text{dB}\\&=10(\log 2.52+\log 10-\log 10^2)\text{dB}\\&=10(0.4014+1-2)\text{dB}\\&=10\times(-0.5986)\text{dB}\\&=-5.986\text{ dB}\end{aligned}$$

0287

정답 ④

STEP A 2004년도와 2014년도의 노동 및 자본 투입량과 산업 생산량을 문자로 정리하기

2004년도 노동 및 자본의 투입량을 각각 x, y라고 하면

2014년도 노동 및 자본의 투입량은 각각 $4x$, $2y$

또, 2004년도 산업 생산량을 z라고 하면 2014년도 산업 생산량은 $3z$

STEP B 지수법칙과 로그의 성질을 이용하여 α의 값 구하기

$3z=2\cdot(4x)^{\alpha}\cdot(2y)^{1-\alpha}=2^{\alpha+1}\cdot 2x^{\alpha}y^{1-\alpha}=2^{\alpha+1}\cdot z$

$2^{\alpha+1}=3$이므로 $\alpha+1=\log_2 3$

즉 $\alpha=\log_2 3-1=\dfrac{\log 3}{\log 2}-1=0.6$

따라서 $\alpha=0.6$

내신연계 출제문항 114

UHD패널을 생산하는 어느 공장의 연간 생산량 P는 다음과 같다.

$$P=2a^k b^{1-k}$$

(단, a는 인력 투입량, b는 자본 투입량, $0<k<1$인 상수)

올해의 인력 투입량과 자본 투입량은 10년 전보다 각각 2배, 4배가 증가하였으며 생산량은 3.125배 증가하였다. 이때 상수 k의 값은?

(단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 2

STEP A 10년 전과 올해의 인력 투입량과 자본 투입량을 정리하기

10년 전의 인력과 자본 투입량, 연간 생산량을 각각 a, b, P라고 하면

올해의 인력과 자본 투입량은 각각 $2a$, $4b$이고 생산량은 3.125P이므로

$$\begin{aligned}3.125P=2(2a)^k(4b)^{1-k}&=2\times 2^k a^k\times 4^{1-k}b^{1-k}\\&=2\times 2^k a^k\times 2^{2-2k}b^{1-k}\\&=2^k\times 2^{2-2k}\times 2a^k b^{1-k}\\&=2^{2-k}P\end{aligned}$$

곧 $3.125=2^{2-k}$이므로 $2^k=\dfrac{4}{3.125}=1.28$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } k=\log_2 1.28=\frac{\log 1.28}{\log 2}&=\frac{\log 128-\log 100}{\log 2}\\&=\frac{7\log 2-2}{\log 2}\\&=\frac{2.1-2}{0.3}\\&=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

정답 ③

0288

정답 ④

STEP A 주어진 조건을 이용하여 관계식 구하기

지반 A, B의 유효수직응력을 각각 S_A, S_B, 저항력을 각각 R_A, R_B

상대밀도를 각각 D_A, D_B라 하면

$S_A=1.44S_B$, $R_A=1.5R_B$, $D_B=65$이므로

$D_A=-98+66\log\dfrac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}}$ …… ㉠

$D_B=-98+66\log\dfrac{R_B}{\sqrt{S_B}}$ …… ㉡

이때 $D_B=65$이므로 ㉡에서

$65=-98+66\log\dfrac{R_B}{\sqrt{S_B}}$, $66\log\dfrac{R_B}{\sqrt{S_B}}=163$

$\therefore \log\dfrac{R_B}{\sqrt{S_B}}=\dfrac{163}{66}$

STEP B 지반 A의 상대밀도 구하기

$$\begin{aligned}\text{따라서 ㉠에서 } D_A&=-98+66\log\frac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}}\\&=-98+66\log\frac{1.5R_B}{1.2\sqrt{S_B}}\\&=-98+66\log\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}\right)\\&=-98+66\left(\log\frac{5}{4}+\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}\right)\\&=-98+66\left(0.1+\frac{163}{66}\right)\\&=-98+6.6+163\\&=71.6\end{aligned}$$

다른풀이 D_A에 D_B를 대입하여 풀이하기

STEP A 주어진 조건을 이용하여 관계식 구하기

지반 A, B의 유효수직응력을 각각 S_A, S_B

시험기가 지반 A, B에 들어가면서 받는 저항력을 각각 R_A, R_B라 하면

$S_A=1.44S_B$, $R_A=1.5R_B$

또, 지반 A, B의 상대밀도를 각각 D_A, D_B라 하면

$D_A=-98+66\log\dfrac{R_A}{\sqrt{S_A}}=-98+66\log\dfrac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}}$ …… ㉠

$D_B=-98+66\log\dfrac{R_B}{\sqrt{S_B}}=65$ …… ㉡

STEP B 지반 A의 상대밀도 구하기

$$\begin{aligned}\text{따라서 ㉠에서 } D_A&=-98+66\log\frac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}}\\&=-98+66\log\frac{1.5R_B}{1.2\sqrt{S_B}}\\&=-98+66\log\left(\frac{5}{4}\times\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}\right)\\&=-98+66\left(\log\frac{5}{4}+\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}\right)\\&=-98+66\log\frac{5}{4}+66\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}\\&=D_B+66(1-3\log 2)\ (\because ㉡)\\&=65+66\times 0.1\ (\because \log 2=0.3)\\&=71.6\end{aligned}$$

0289

정답 ③

STEP A 주어진 식을 이용하여 I_2, I_4에 관한 식 구하기

2등성의 별의 밝기와 4등성의 별의 밝기를 각각 I_2, I_4라고 하면

$2=-\frac{5}{2}\log_{10}I_2+C$ ...... ㉠

$4=-\frac{5}{2}\log_{10}I_4+C$ ...... ㉡

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\frac{I_2}{I_4}$의 값 구하기

㉠-㉡을 하면

$-2=-\frac{5}{2}(\log_{10}I_2-\log_{10}I_4)$

$2=\frac{5}{2}\log\frac{I_2}{I_4}$, $\frac{4}{5}=\log\frac{I_2}{I_4}$

$\therefore \frac{I_2}{I_4}=10^{\frac{4}{5}}$

따라서 2등성인 별의 밝기는 4등성인 별의 밝기의 $10^{\frac{4}{5}}$배이다.

0290

정답 ⑤

STEP A 주어진 식을 이용하여 I_1, I_3에 관한 식 구하기

1등성인 별의 밝기를 I_1, 3등성인 별의 밝기를 I_3라고 하면

$1=-\frac{5}{2}\log I_1+C$ ...... ㉠

$3=-\frac{5}{2}\log I_3+C$ ...... ㉡

STEP B 로그의 성질을 이용하여 $\frac{I_1}{I_3}$의 값 구하기

㉠-㉡을 하면

$-2=-\frac{5}{2}(\log I_1-\log I_3)=-\frac{5}{2}\log\frac{I_1}{I_3}$

$\log\frac{I_1}{I_3}=\frac{4}{5}=0.8$

$\log 6.31=0.8$이므로 $\frac{I_1}{I_3}=6.31$

따라서 1등성인 별의 밝기는 3등성인 별의 밝기의 6.31배이다.

0291

정답 ④

STEP A 주어진 조건을 만족하는 식을 표현하기

1등급인 별의 밝기를 m이라 하고 6등급인 별의 밝기를 n이라 하면

$\log n-\log m=\frac{2}{5}(1-6)=-2$

STEP B 1등급인 별의 밝기와 6등급인 별의 밝기의 관계식 구하기

$\log\frac{n}{m}=-2$에서 $\frac{n}{m}=10^{-2}=\frac{1}{100}$

$\therefore m=100n$

따라서 1등급인 별의 밝기는 6등급인 별의 밝기의 100배이다.

0292

정답 ②

STEP A 주어진 식에 겉보기등급, 거리, 절대등급을 대입하여 식 구하기

별 A의 겉보기등급이 1, 별 A까지의 거리가 d_A, 별 A의 절대등급이 M_A이므로 $M_A=1-5(\log d_A-1)$

별 A와 절대등급이 같은 별 B의 겉보기등급이 6, 별 B까지의 거리가 d_B이므로 $M_A=6-5(\log d_B-1)$

STEP B 두 별의 절대등급이 같음을 이용하여 $\frac{d_A}{d_B}$의 값 구하기

즉 $1-5(\log d_A-1)=6-5(\log d_B-1)$

$5(\log d_A-1)-5(\log d_B-1)=-5$

$\log d_A-\log d_B=-1$ $\therefore \log\frac{d_A}{d_B}=-1$

따라서 $\frac{d_A}{d_B}=10^{-1}=\frac{1}{10}$

0293

정답 ①

STEP A $m-M=-2.86=-5+5\log r$임을 이용하여 r의 값 구하기

$m=-1.46$, $M=1.4$에서 $m-M=-1.46-1.4=-2.86$

$-2.86=-5+5\log r$이므로 $2.14=5\log r$, $\log r=\frac{2.14}{5}=0.428$

로그의 정의에 의하여 $r=2.68(\text{pc})$

따라서 시리우스는 지구로부터 2.68pc 떨어진 거리에 있다.

내신연계 출제문항 115

별의 밝기는 지구에서 그 별을 볼 때 밝기인 겉보기 등급과 그 별이 지구에서 10파섹의 거리에 있다고 가정했을 때 밝기인 절대 등급으로 나타낸다. 지구까지 거리가 x파섹인 별의 겉보기 등급을 m, 절대등급을 M이라 하면

$m-M=5\log x-5$

인 관계가 성립한다고 한다. 겉보기 등급이 4, 절대등급이 -5인 별의 지구까지 거리는 몇 파섹인가? (단, $\log 6.31=0.8$로 계산한다.)

① 6.31 ② 63.1 ③ 631
④ 6310 ⑤ 63100

STEP A 주어진 식에 대입하여 상용로그의 성질을 이용하여 구하기

$m=4$, $M=-5$이므로 $4-(-5)=5\log x-5$

$\log x=2.8=2+0.8=\log 10^2+\log 6.31$

$=\log 631$

따라서 $x=631$이므로 631파섹이다.

정답 ③

0294

정답 ④

STEP A 주어진 식에 겉보기등급, 절대등급을 대입하여 $\log r$의 값 구하기

어느 별의 겉보기 등급이 -1.36, 절대 등급이 1.32이므로 대입하면

$-1.36-1.32=-5+5\log\frac{r}{3.25}$

$5-2.68=5\log\frac{r}{3.25}$

$2.32=5\log\frac{r}{3.25}$, $0.464=\log\frac{r}{3.25}$

$0.464=\log r-\log 3.25$

이때 $\log 3.25=0.5119$이므로 $0.464=\log r-0.5119$

$\therefore \log r=0.9759$

STEP B 상용로그표를 이용하여 r의 값 구하기

즉 $\log 9.46=0.9759$이므로 $\log r=\log 9.46$

따라서 $r=9.46$

0295

정답 ①

STEP A n년 후의 외국인 관광객의 수를 식으로 표현하기

외국인 관광객의 수를 a라 하면 n년 후의 관광객의 수는

$a(1+0.18)^n=5a$

$(1.18)^n=5$

STEP B 양변에 상용로그를 취하여 n의 값 구하기

양변에 상용로그를 취하면

$\log(1.18)^n=\log 5$

$n\log 1.18=\log 5$

$0.07n=\log\frac{10}{2}=1-\log 2=0.7$

따라서 $n=10$

0296

정답 ③

STEP A n분 후 후각의 강도를 식으로 표현하기

정상인의 후각의 강도가 1분마다 10%씩 감소하고 처음 반응하는 후각의 강도가 P이므로 n분후 P의 30%가 되는 순간의 후각의 강도는

$P(1-0.1)^n=0.3P$

$0.9^n=0.3$

STEP B 상용로그를 취하여 n의 값 구하기

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log 0.9=\log 0.3$

$n(\log 3^2-\log 10)=\log 3-\log 10$

$n(2\cdot 0.48-1)=0.48-1$

$-0.04n=-0.52$

따라서 $n=13$(분)

0297

정답 ③

STEP A n년 후의 농도를 식으로 표현하기

현재 미세먼지 농도를 a라 하고 매년 r%씩 감소시킨다고 하면

10년 후의 농도는 $\frac{1}{3}a$이므로

$a\left(1-\frac{r}{100}\right)^{10}=\frac{1}{3}a$

$\therefore \left(1-\frac{r}{100}\right)^{10}=\frac{1}{3}$

STEP B 양변에 상용로그를 취하여 r의 값 구하기

양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1-\frac{r}{100}\right)^{10}=\log\frac{1}{3}$, $10\log\left(1-\frac{r}{100}\right)=-\log 3$

$\log\left(1-\frac{r}{100}\right)=-\frac{0.48}{10}=-0.048=-1+0.952$

이때 $\log 8.96=0.952$이므로

$1-\frac{r}{100}=0.896$

$\therefore r=10.4$

따라서 매년 10.4%씩 감소시켜야 한다.

내신연계 출제문항 116

어느 산유국에서 매년 일정한 비율로 산유량을 증가시켜 20년 후의 산유량이 올해 산유량의 2배가 되도록 하려고 한다. 산유량을 매년 몇 %씩 증가시켜야 하는가? (단, $\log 1.035=0.015$, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

① 3.4% ② 3.5% ③ 3.6% ④ 3.7% ⑤ 3.8%

STEP A 20년 후의 산유량을 식으로 표현하기

올해의 산유량이 a이고 산유량을 매년 r%씩 증가시킨다고 하면

20년 후의 산유량은 $a\left(1+\frac{r}{100}\right)^{20}$

이것이 올해의 산유량의 2배가 되어야 하므로 $a\left(1+\frac{r}{100}\right)^{20}=2a$

STEP B 상용로그를 취하여 r의 값 구하기

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$20\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 2$

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{0.3}{20}=0.015$

이때 $\log 1.035=0.015$이므로 $1+\frac{r}{100}=1.035$

$\therefore \frac{r}{100}=0.035$

따라서 매년 산유량을 3.5%씩 증가시켜야 한다. 정답 ②

0298

정답 ③

STEP A 30년 후의 매출액을 식으로 표현하기

현재 매출액을 a라 하고 매년 r%씩 늘었다고 하면

30년 후의 매출액은 $a\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}$

STEP B 기업의 매출액이 2배가 되는 경우를 식으로 표현하기

이것이 30년 만에 2배가 되어야 하므로

$a\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}=2a$이므로 $\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}=2$

STEP C 상용로그를 취하여 r의 값 구하기

양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}=\log 2$

$30\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=0.30$, $\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{0.30}{30}=0.01$

이때 $\log 1.03=0.01$이므로 $1+\frac{r}{100}=1.03$

$\therefore r=3$

따라서 매년 3%씩 늘었다.

내신연계 출제문항 117

어느 광고 기획사에서 기획한 화장품 광고의 인지도는 광고를 시작한 후 일정한 비율로 늘어나 5주 후면 처음 인지도의 2배가 될 것으로 예상했다. 광고의 인지도는 매주 몇 %씩 늘어나는가?
(단, $\log 2=0.3$, $\log 1.15=0.06$으로 계산한다.)

① 12% ② 15% ③ 18% ④ 20% ⑤ 22%

STEP A 5주 후 화장품 광고의 인지도를 식으로 표현하기

처음 화장품 광고의 인지도를 a라 하고 매주 인지도가 r%씩 늘어난다고 하면

5주 후 화장품 광고의 인지도는 $a\left(1+\frac{r}{100}\right)^5$

STEP B 화장품 광고의 인지도가 2배가 되는 경우를 식으로 표현하기

5주 후 처음 인지도의 2배가 되는 경우를 나타내면

$a\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=2a$이므로 $\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=2$

STEP C 상용로그를 취하여 a의 값 구하기

양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=\log 2$, $5\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 2$

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{0.3}{5}=0.06$

이때 $\log 1.15=0.06$이므로 $1+\frac{r}{100}=1.15$

$\therefore r=15$

따라서 화장품의 광고의 인지도는 매주 15%씩 늘어날 것으로 예상되었다.

정답 ②

0299

정답 ④

STEP A 미생물의 개체 수를 식으로 표현하기

11시간 후의 개체 수가 처음의 k배라 하면

$k=\left(1+\frac{30}{100}\right)^{11}=\left(\frac{13}{10}\right)^{11}$

STEP B 상용로그를 취하여 k의 값 구하기

양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log k=\log\left(\frac{13}{10}\right)^{11}&=11(\log 13-1)\\&=11(1+\log 1.3-1)\\&=11\times 0.1139\\&=1.2529\end{aligned}$$

이때 $\log 1.79=0.2529$이므로

$$\begin{aligned}\log k=1.2529&=1+0.2529\\&=\log 10+\log 1.79\\&=\log 17.9\end{aligned}$$

에서 $k=17.9$

따라서 11시간 후의 개체 수는 처음의 약 18배가 된다.

0300

정답 ⑤

STEP A 24시간 후의 물질 M의 양을 x라 두고 식으로 표현하기

처음 이 물질 M의 양이 10이었을 때, 24시간 후의 물질 M의 양

$$\begin{aligned}x&=10(1+0.40)^{12}(1-0.1)^{12}\\&=10(1.40)^{12}(0.9)^{12}\\&=10(1.26)^{12}\end{aligned}$$

STEP B 상용로그를 취하여 $\log x$의 값 구하기

이때

$$\begin{aligned}\log x&=\log 10(1.26)^{12}\\&=\log 10+\log(1.26)^{12}\\&=1+12\log 1.26\\&=1+12\cdot 0.1004\\&=2.2048\\&=2+0.2048\\&=\log 10^2+\log 1.6\\&=\log 100\cdot 1.6\\&=\log 160\end{aligned}$$

따라서 $x=160$

STEP 2 서술형 기출유형

0301

정답 해설참조

1단계 $\log a=3.7505$를 만족하는 a의 값을 구한다. ◀ 50%

$\log 5.63$과 $\log a$의 소수 부분이 같으므로

$$\begin{aligned}\log a&=3+0.7505\\&=3+\log 5.63\\&=\log 1000+\log 5.63\\&=\log 1000\times 5.63\\&=\log 5630\end{aligned}$$

$\therefore a=5630$

2단계 $\log 0.0563=b$를 만족하는 b의 값을 구한다. ◀ 50%

$$\begin{aligned}\log 0.0563&=\log(10^{-2}\times 5.63)\\&=-2+\log 5.63\\&=-2+0.7505\\&=-1.2495\end{aligned}$$

$\therefore b=-1.2495$

0302

정답 해설참조

1단계 $\log 3^{30}$의 값을 구한다. ◀ 20%

$$\begin{aligned}\log 3^{30}&=30\log 3\\&=30\times 0.4771\\&=14.3130\end{aligned}$$

2단계 $3^{30}=a\times 10^n$ $(1\le a<10$, n은 정수$)$로 나타냈을 때, n과 $\log a$의 값을 구한다. ◀ 20%

$$\begin{aligned}\log 3^{30}&=14+0.3130\\&=\log 10^{14}+\log a\\&=\log(a\times 10^{14})\end{aligned}$$

이때 $\log a=0.3130$이므로 $3^{30}=a\times 10^{14}$

$\therefore n=14$, $\log a=0.3130$

3단계 3^{30}이 몇 자리 자연수인지 구한다. ◀ 20%

$\log 3^{30}=30\log 3=14+0.3130$

정수 부분이 14이므로 3^{30}은 15자리 정수이다.

4단계 3^{30}의 최고자리의 숫자를 구한다. ◀ 40%

$14+0.3010<14+0.313<14+0.4771$이므로

$\log 10^{14}+\log 2<\log 3^{30}<\log 10^{14}+\log 3$

$\log(2\times 10^{14})<\log 3^{30}<\log(3\times 10^{14})$

$2\times 10^{14}<3^{30}<3\times 10^{14}$

따라서 3^{30}의 최고자리 숫자는 2이다.

0303

정답 해설참조

1단계 $\log x=3.378$일 때, x의 값을 구한다. ◀ 30%

$\log x=3.378=3+0.378$

$=\log 10^3+\log 2.39$

$=\log 10^3\times 2.39$

$\therefore x=2390$

2단계 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{22}$의 값을 구한다. ◀ 20%

$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{22}=-22\log 2$

$=-22\times 0.3010$

$=-6.622$

$=-7+0.378$

3단계 $\left(\frac{1}{2}\right)^{22}$의 어림값을 $a\times 10^n(1\le a<10,\ n$은 정수$)$꼴로 나타낸다. ◀ 30%

$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{22}=-7+0.378$

$=\log 10^{-7}+\log 2.39$

$=\log 2.39\times 10^{-7}$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{22}=2.39\times 10^{-7}$이므로 $a=2.39,\ n=-7$

4단계 $\left(\frac{1}{2}\right)^{22}$이 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는지 구하여라. ◀ 20%

$\left(\frac{1}{2}\right)^{22}$이 소수점 아래 일곱번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다.

0304

정답 해설참조

1단계 밝기가 a인 빛이 이 유리판을 n장 통과하였을 때의 밝기를 식으로 나타내어 본다. ◀ 40%

1장을 통과할 때, 빛의 밝기 $a(1-0.05)=0.95a$

2장을 통과할 때, 빛의 밝기 $a(1-0.05)^2=0.95^2a$

3장을 통과할 때, 빛의 밝기 $a(1-0.05)^3=0.95^3a$

⋮

n장을 통과할 때, 빛의 밝기 $a(1-0.05)^n=0.95^na$

2단계 밝기가 1000인 빛이 이 유리판을 10장 통과하였을 때의 밝기를 구한다. ◀ 60%

10장을 통과할 때, 빛의 밝기가

$1000(1-0.05)^{10}=1000\cdot 0.95^{10}$이므로

$\log 1000\cdot 0.95^{10}=\log 1000+\log 0.95^{10}$

$=\log 10^3+10\log 0.95$

$=3+10(-1+0.9777)$ ← $\log 9.5=0.9777$

$=3+10\cdot(-0.02230)$

$=3-0.223$

$=2.777$

$=2+0.777$

$=\log 10^2+\log 5.984$

$=\log(100\cdot 5.984)$

$=\log 598.4$

따라서 $1000\cdot 0.95^{10}=598.4$

0305

정답 해설참조

1단계 주어진 등식에 흡수 계수와 엑스레이의 처음 세기를 대입하여 로그의 성질을 이용하여 d에 대한 관계식을 구한다. ◀ 50%

흡수 계수가 0.69인 어떤 물질에 엑스레이를 쏘았더니 이 물질을 통과한 후의 엑스레이의 세기는 처음 세기의 $\frac{1}{5}$이므로

$k=0.69,\ \mathrm{I}=\frac{1}{5}\mathrm{I}_0$을 $\log\mathrm{I}=\log\mathrm{I}_0-\frac{k}{2.3}d$에 대입하면

$\log\left(\frac{1}{5}\mathrm{I}_0\right)=\log\mathrm{I}_0-\frac{0.69}{2.3}d$

$\log\frac{1}{5}+\log\mathrm{I}_0=\log\mathrm{I}_0-\frac{0.69}{2.3}d$

$\therefore 0.3d=\log 5$

2단계 [1단계]에서 구한 식에 $\log 5$를 대입한다. ◀ 30%

$\log 2=0.3$에서 $\log 5=\log\frac{10}{2}=1-\log 2=1-0.3=0.7$이므로

$0.3d=\log 5=0.7$

3단계 물질의 두께 d를 구한다. ◀ 20%

즉 $d=\frac{7}{3}$

따라서 구하는 물질의 두께는 $\frac{7}{3}$

0306

정답 해설참조

1단계 음원에서 떨어진 거리가 d_1m, d_2m인 두 지점에서 소리의 크기를 각각 S_1dB, S_2dB이라고 할 때, $\mathrm{S}_2=\mathrm{S}_1+20\log\frac{d_1}{d_2}$이 성립함을 보인다. ◀ 40%

음원에서 떨어진 거리가 d_1m, d_2m인 두 지점에서

소리의 세기를 각각 $\mathrm{I}_1\mathrm{W/m^2}$, $\mathrm{I}_2\mathrm{W/m^2}$라고 하면

$\mathrm{S}_2-\mathrm{S}_1=10\log\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_0}-10\log\frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_0}$

$=10\log\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}=10\log\frac{\frac{k}{d_2^2}}{\frac{k}{d_1^2}}$

$=10\log\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2=20\log\frac{d_1}{d_2}$

$\therefore \mathrm{S}_2=\mathrm{S}_1+20\log\frac{d_1}{d_2}$

2단계 공연장의 스피커에서 2m 떨어진 곳의 소리의 크기가 100dB이라고 할 때, 이 스피커에서 10m 떨어진 곳의 소리의 크기는 얼마인지 구한다. (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.) ◀ 30%

$d_1=2,\ \mathrm{S}_1=100,\ d_2=10$이므로

$\mathrm{S}_2=100+20\log\frac{2}{10}=100+20(\log 2-\log 10)=86$

따라서 86dB

3단계 전투기가 이착륙할 때, 소음원에서 1m 떨어진 곳의 소리의 크기를 120dB, 그 소음원의 소리의 크기가 60dB인 곳을 경계선으로 하여 그 외부를 주거지역으로 설정하려고 할 때, 경계선은 그 소음원에서 몇 m떨어져 있는지 구한다. ◀ 30%

전투기가 이착륙할 때, 소음원에서 1m 떨어진 곳의 소리의 크기를 120dB, xm 떨어진 곳의 소리의 크기를 60dB이라고 하면

$60=120+20\log\frac{1}{x},\ -60=-20\log x$

$\log x=3$에서 $x=1000$

따라서 1000m 떨어져 있어야 한다.

STEP 3 행복한 1등급 문제

0307

정답 10

STEP A 상용로그의 정수 부분과 소수 부분을 구하여 A, B의 값 구하기

$A=10^{-1.3980}$에서

$\log A=-1.3980=-2+0.6020=-2+2\times0.3010$

$=-2+2\log 2$

$=\log 10^{-2}+2\log 2$

$=\log 0.04$

$\therefore A=0.04$

$B=10^{-1.2219}$에서

$\log B=-1.2219=-2+0.7781$

$=-2+0.3010+0.4771$

$=\log 10^{-2}+\log 2+\log 3$

$=\log 0.06$

$\therefore B=0.06$

STEP B $100(A+B)$의 값 구하기

따라서 $100(A+B)=100(0.04+0.06)=10$

0308

정답 7

STEP A n^{10}이 9자리 정수임을 이용하여 $\log n^{10}$의 정수 부분 구하기

n^{10}이 9자리 정수이므로 $\log n^{10}$의 정수 부분이 8이다.

STEP B n^{10}이 9자리 정수이므로 $8\le \log n^{10}<9$임을 이용하기

$8\le \log n^{10}<9$

$8\le 10\log n<9$, $0.8\le \log n<0.9$

즉 $0.3010+0.4771<0.8\le \log n<0.9<0.9030$

$\log 2+\log 3<\log n<3\log 2$

$\log(2\times3)<\log n<\log 2^3$

따라서 $6<n<8$이므로 정수 $n=7$

0309

정답 3

STEP A 상용로그의 정수 부분의 성질을 이용하여 $\log n$의 값의 범위 구하기

$\left(\dfrac{n}{10}\right)^{10}$이 소수 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로

$\log\left(\dfrac{n}{10}\right)^{10}$의 정수 부분은 -6

즉 $-6\le \log\left(\dfrac{n}{10}\right)^{10}<-5$이므로

$-6\le 10(\log n-1)<-5$

$0.4\le \log n<0.5$

STEP B $\log n$의 범위에서 n의 범위 구하기

이때 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$, $\log 4=2\log 2=2\times0.3010=0.6020$

이므로 $\log 2<0.4\le \log n<0.5<\log 4$

$\therefore 2<n<4$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 3

0310

정답 19

STEP A $f(n)$이 0, 1, 2일 때로 나누어 n의 개수 구하기

$f(n+10)=f(n)+1$을 만족시키려면 $n+10$의 자릿수가 n의 자릿수보다 1만큼 커야 한다.

$1\le n\le 100$이므로 $0\le f(n)\le 2$

(i) n이 한 자리의 자연수일 때,

$f(n)=0$, 즉 $1\le n\le 9$일 때, $f(n+10)=1$이어야 하므로

$10\le n+10<100$ $\quad\therefore 1\le n\le 9$

(ii) n이 두 자리의 자연수일 때,

$f(n)=1$, 즉 $10\le n\le 99$일 때, $f(n+10)=2$이어야 하므로

$100\le n+10<1000$ $\quad\therefore 90\le n\le 99$

(iii) $f(n)=2$, 즉 $n=100$일 때,

$f(n+10)=f(110)=2$이므로 $f(n+10)=3$을 만족하지 않는다.

(i)~(iii)에서 구하는 자연수 n의 개수는 $9+10=19$

0311

정답 304

STEP A 상용로그의 정수부분을 이용하여 k 구하기

(i) $1\le x<10$일 때, $0\le \log x<1$이므로 $[\log x]=0$

$\therefore [\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 9]=0$

(ii) $10\le x<100$일 때, $1\le \log x<2$이므로 $[\log x]=1$

$\therefore [\log 10]+[\log 11]+[\log 12]+\cdots+[\log 99]=1\cdot 90=90$

(iii) $100\le x<k$ $(100\le k<1000)$일 때,

$2\le \log x<3$이므로 $[\log x]=2$

$\therefore [\log 100]+[\log 101]+[\log 102]+\cdots+[\log k]=2(k-99)$

$k-100+1=k-99$

(i)~(iii)에서 $[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+[\log 4]+\cdots+[\log k]=500$

이므로 $0+90+2(k-99)=500$

따라서 $k-99=205$이므로 $k=304$

0312

정답 12

STEP A 6^{12}의 상용로그의 정수 부분의 성질을 이용하여 자릿수 구하기

$\log 6^{12}=12\log 6=12\times0.7781=9.3372$

$\log 6^{12}$의 정수 부분이 9이므로 6^{12}은 10자리 정수이므로 $a=10$

STEP B $\log 6^{12}$의 소수 부분의 범위를 이용하여 최고자리 숫자 구하기

이때 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$에서

$\log 2=0.3010<0.3372<\log 3=0.4771$이므로

$9+\log 2<9.3372<9+\log 3$

$\log 2\cdot 10^9<\log 6^{12}<\log 3\cdot 10^9$

$\therefore 2\cdot 10^9<6^{12}<3\cdot 10^9$

즉 6^{12}의 최고 자리의 숫자는 $b=2$

따라서 $a+b=12$

0313

정답 19자리

STEP A 7^{100}가 85자리의 정수임을 이용하여 $\log 7$의 범위 구하기

7^{100}은 85자리의 정수이므로 $\log 7^{100}$의 정수 부분은 84

즉 $84\le \log 7^{100}<85$에서 $84\le 100\log 7<85$

$\therefore 0.84\le \log 7<0.85$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

STEP B 11^{100}가 105자리의 정수임을 이용하여 $\log 11$의 범위 구하기

또, 11^{100}은 105자리의 정수이므로 $\log 11^{100}$의 정수 부분은 104

즉 $104 \le \log 11^{100} < 105$에서 $104 \le 100\log 11 < 105$

$\therefore 1.04 \le \log 11 < 1.05$ ······ ㉡

STEP C $\log 77^{10}$의 범위를 구하여 자릿수 구하기

이때 $\log 77^{10} = 10\log 77 = 10(\log 7 + \log 11)$이므로

$10 \times$(㉠+㉡)을 하면 $18.8 \le 10(\log 7 + \log 11) < 19$

$\therefore 18.8 \le \log 77^{10} < 19$

따라서 $\log 77^{10}$의 정수 부분이 18이므로 77^{10}은 19자리의 정수이다.

0314

정답 21

STEP A 조건 (가)에서 $2 \le \log x < 3$임을 구하기

조건 (가)에서 상용로그의 가우스함수는 정수 부분이므로

$[\log x] = [\log 365] = 2$에서 $2 \le \log x < 3$

STEP B 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차가 정수임을 이용하기

조건 (나)에서 $\log x^3$과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^3 - \log \frac{1}{x} = 4\log x$는 정수이다.

$8 \le 4\log x < 12$이므로 $4\log x = 8, 9, 10, 11$

STEP C 모든 x의 값의 곱을 구하기

$x = 10^2, 10^{\frac{9}{4}}, 10^{\frac{5}{2}}, 10^{\frac{11}{4}}$이므로 모든 양의 실수 x의 곱은

$10^{2+\frac{9}{4}+\frac{5}{2}+\frac{11}{4}} = 10^{\frac{19}{2}}$이므로 $p=19$, $q=2$

따라서 $p+q=21$

0315

정답 5

STEP A 소수 부분의 합이 1이면 두 상용로그의 합이 정수임을 이해하기

(나)에서 $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x^2 + \log x = 2\log x + \log x = 3\log x$에서 $3\log x$가 정수이다.

STEP B 조건 (가)에서 $3\log x$의 범위 구하기

(가)에서 $\log x$의 정수 부분이 2이므로 $2 \le \log x < 3$

$\therefore 6 \le 3\log x < 9$

STEP C 모든 x의 값의 곱을 구하기

이때 $3\log x$는 정수이므로

$3\log x = 6$ 또는 $3\log x = 7$ 또는 $3\log x = 8$

$\log x = 2$ 또는 $\log x = \frac{7}{3}$ 또는 $\log x = \frac{8}{3}$

$\therefore x = 10^2$ 또는 $x = 10^{\frac{7}{3}}$ 또는 $x = 10^{\frac{8}{3}}$

그런데 $x = 10^2$이면 $\log x = 2$, $\log x^2 = 4$가 되어 $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 0이 된다.

따라서 $x = 10^{\frac{7}{3}}$ 또는 $x = 10^{\frac{8}{3}}$이므로 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^{\frac{7}{3}} \times 10^{\frac{8}{3}} = 10^{\frac{7}{3}+\frac{8}{3}} = 10^5$ $\therefore n=5$

0316

정답 26

STEP A L을 m_0f_0을 이용한 식으로 나타내기

주파수가 f_0인 영역에서 벽의 단위 면적당 질량을 m_0이라 하고

그때의 음향 투과 손실을 L_0이라고 하면 $L_0 = 20\log m_0f_0 - 48$

이때 주파수가 일정하므로 벽의 단위 면적당 질량이 20배가 되었을 때

음향 투과 손실 L은 $L = 20\log 20m_0f_0 - 48$

STEP B 로그의 성질을 이용하여 L과 L_0의 관계식 구하기

$$\begin{aligned} L &= 20(\log 20 + \log m_0f_0) - 48 = 20(1 + \log 2 + \log m_0f_0) - 48 \\ &= 20 \times 1.3 + 20\log m_0f_0 - 48 \\ &= 26 + 20\log m_0f_0 - 48 \\ &= 26 + L_0 \end{aligned}$$

STEP C a의 값 구하기

따라서 음향 투과 손실은 $26dB$만큼 늘어나므로 $a=26$

0317

정답 4

STEP A 약물 A, B의 흡수율과 배설률의 관계식 세우기

약물 A의 흡수율과 배설률을 각각 K_A, E_A라 하고

약물 B의 흡수율과 배설률을 각각 K_B, E_B라 하자. 주어진 조건에 의하여

$K_A = K_B$, $E_A = \frac{1}{2}K_A$, $E_B = \frac{1}{4}K_B$

STEP B 주어진 조건을 만족하는 관계식 구하기

약물 A의 혈중 농도가 최고치에 도달하는 시간이 3시간이므로

$$\begin{aligned} 3 = c \times \frac{\log K_A - \log E_A}{K_A - E_A} &= c \times \frac{\log K_A - \log \frac{1}{2}K_A}{K_A - \frac{1}{2}K_A} = c \times \frac{\log 2}{\frac{1}{2}K_A} \\ &= c \times \frac{2\log 2}{K_A} \end{aligned}$$

이므로 $\frac{c}{K_A} = \frac{3}{2\log 2}$

STEP C 약물 B의 혈중 농도가 최고치에 도달하는 시간 구하기

약물 B의 혈중 농도가 최고치에 도달하는 시간은

$$\begin{aligned} c \times \frac{\log K_B - \log E_B}{K_B - E_B} &= c \times \frac{\log K_A - \log \frac{1}{4}K_A}{K_A - \frac{1}{4}K_A} = c \times \frac{\log 4}{\frac{3}{4}K_A} \\ &= \frac{c}{K_A} \times \frac{8\log 2}{3} \\ &= \frac{3}{2\log 2} \times \frac{8\log 2}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

따라서 $a=4$

0318

정답 10

STEP A 주어진 수를 관계식에 대입한 후 k 구하기

물 1mL당 초기 박테리아 수가 8×10^5이고 약품을 투여한 지 3시간이 지나는 순간 1mL당 박테리아 수는 2×10^5이 되므로 $C_0 = 8 \times 10^5$이고 $t=3$,

$C = 2 \times 10^5$를 주어진 관계식에 대입하면

$\log \frac{2 \times 10^5}{8 \times 10^5} = -3k$에서 $3k = -\log \frac{1}{4} = 2\log 2 = 0.6$

$\therefore k = 0.2$ ($\because \log 2 = 0.3$)

STEP B 주어진 조건과 로그의 성질을 이용하여 a의 값 구하기

$\log \frac{C}{8 \times 10^5} = -0.2t$에서 약품을 투여한 지 a시간 후에 처음으로 1mL당

박테리아의 수가 8×10^3 이하가 되므로

$\log \frac{8 \times 10^3}{8 \times 10^5} = -0.2a$에서 $0.2a = -\log \frac{1}{100} = 2$

따라서 $a=10$

04 STEP 1 내신정복기출유형 지수함수와 로그함수

0319

정답 ⑤

STEP Ⓐ 지수함수의 성질 이해하기

① $f(x)=a^x$에서 $f(x+y)=a^{x+y}=a^x\times a^y=f(x)f(y)$ [참]

② $f(x)=a^x$에서 $f(-x)=a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}=\dfrac{1}{f(x)}$ [참]

③ $f(x)=a^x$에서 $f(2x)=(a^x)^2$이므로 $\sqrt{f(2x)}=f(x)$ [참]

④ $f(x)=a^x$에서 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=a^{\frac{x}{2}}=\sqrt{a^x}=\sqrt{f(x)}$ [참]

⑤ $f(x)=a^x$에서 $f(x^n)=a^{x^n}\neq(a^x)^n=\{f(x)\}^n$ [거짓]

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0320

정답 ⑤

STEP Ⓐ $3^a=b$와 지수법칙을 이용하여 참, 거짓 판별하기

$(a,\ b)\in \mathrm{A}$이므로 $3^a=b$

ㄱ. $3^{2a}=(3^a)^2=b^2$이므로 $(2a,\ b^2)\in \mathrm{A}$ [참]

ㄴ. $3^{\frac{a}{2}}=(3^a)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b}$이므로 $\left(\dfrac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)\in \mathrm{A}$

$\therefore \left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{9}\right)\notin \mathrm{A}$ [거짓]

ㄷ. $3^{-a}=(3^a)^{-1}=b^{-1}=\dfrac{1}{b}$이므로 $\left(-a,\ \dfrac{1}{b}\right)\in \mathrm{A}$ [참]

ㄹ. $3^{a+1}=3\cdot3^a=3b$이므로 $(a+1,\ 3b)\in \mathrm{A}$ [참]

따라서 집합 A의 원소인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0321

정답 ④

STEP Ⓐ $b=0$을 대입하여 $g(0)$의 값 구하기

ㄱ. $b=0$을 대입하면 $g(a)=g(a)g(0)$

이때 $g(a)>0$이므로 $g(0)=1$ [참]

STEP Ⓑ $a=x,\ b=-x$를 대입하여 $g(x)$와 $g(-x)$의 관계식 구하기

ㄴ. $a=x,\ b=-x$를 대입하면

$g(x-x)=g(x)g(-x)$

$g(0)=g(x)g(-x)$

즉 $g(0)=1$이므로 $g(-x)=\dfrac{1}{g(x)}$ [참]

STEP Ⓒ b 대신 $-b$를 대입하여 $g(a-b)$의 값 구하기

ㄷ. b 대신 $-b$를 대입하면

$g(a-b)=g(a)g(-b)=\dfrac{g(a)}{g(b)}$ [거짓]

STEP Ⓓ b 대신 a를 대입하여 $g(a)=\sqrt{g(2a)}$ 증명하기

ㄹ. b 대신 a를 대입하면

$g(a+b)=g(a+a)=g(a)g(a)$

$g(2a)=\{g(a)\}^2,\ g(a)=\pm\sqrt{g(2a)}$

이때 $g(x)>0$이므로 $g(a)=\sqrt{g(2a)}$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

내신연계 출제문항 118

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f는 함숫값이 항상 양수이고 임의의 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $f(a+b)=f(a)f(b)$인 성질을 만족시킨다.
이때 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. $f(0)=1$
ㄴ. $f(-a)=\dfrac{1}{f(a)}$
ㄷ. $f(a)=\sqrt{f(2a)}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

STEP Ⓐ $f(a+b)=f(a)f(b)$의 성질을 이용하여 진위판단하기

ㄱ. $f(0+0)=f(0)f(0)$에서 $f(0)>0$이므로 $f(0)=1$ [참]

ㄴ. $f(-a+a)=f(-a)f(a)$에서 $1=f(-a)f(a)$이므로

$f(-a)=\dfrac{1}{f(a)}$ [참]

ㄷ. $f(a+a)=f(a)f(a)$에서 $f(2a)=\{f(a)\}^2$

$f(a)>0$이므로 $f(a)=\sqrt{f(2a)}$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

0322

정답 ②

STEP Ⓐ $f(0)=8$임을 이용하여 k의 값 구하기

$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-k}$에서 $f(0)=8$이므로

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-k}=8,\ 2^k=8$

$\therefore k=3$

STEP Ⓑ $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-3}=2$

0323

정답 ⑤

STEP Ⓐ $f(2)=7$임을 이용하여 $a+a^{-1}$의 값 구하기

$f(2)=\dfrac{a^2+a^{-2}}{2}=7$에서 $a^2+a^{-2}=14$이므로

$(a+a^{-1})^2=a^2+a^{-2}+2=16$

이때 $a>0$이므로 $a+a^{-1}=4$

STEP Ⓑ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$를 이용하여 $f(3)$의 값 구하기

따라서 $a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3\cdot a\cdot a^{-1}(a+a^{-1})=4^3-3\cdot4=52$이므로

$f(3)=\dfrac{a^3+a^{-3}}{2}=\dfrac{52}{2}=26$

내신연계 출제문항 119

1이 아닌 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$과 실수 p에 대하여 $f(p)=1$일 때, $f(2p)$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

STEP A 곱셈공식 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$를 이용하여 a^p+a^{-p}의 값 구하기

$f(p)=1$에서 $\frac{a^p-a^{-p}}{2}=1$이므로 $a^p-a^{-p}=2$

$\therefore (a^p+a^{-p})^2=(a^p-a^{-p})^2+4=2^2+4=8$

그런데 $a^p+a^{-p}>0$이므로 $a^p+a^{-p}=2\sqrt{2}$

STEP B $a^{2p}-a^{-2p}=(a^p+a^{-p})(a^p-a^{-p})$을 이용하여 값 구하기

따라서 $f(2p)=\frac{a^{2p}-a^{-2p}}{2}=\frac{(a^p+a^{-p})(a^p-a^{-p})}{2}$

$=\frac{2\sqrt{2}\cdot 2}{2}=2\sqrt{2}$

정답 ②

0324

정답 ③

STEP A 지수함수의 성질을 이용하여 a, b의 값 구하기

$f(2a)f(b)=4$에서 $2^{-2a}\times 2^{-b}=2^{-2a-b}=2^2$

$\therefore -2a-b=2$ …… ㉠

$f(a-b)=2$에서 $2^{-a+b}=2$

$\therefore -a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=0$

STEP B $2^{3a}+2^{3b}$의 값 구하기

$\therefore 2^{3a}+2^{3b}=2^{-3}+2^0=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}$

따라서 $p=8$, $q=9$이므로 $p+q=17$

다른풀이 지수법칙을 이용하여 풀이하기

$f(2a)f(b)=4$에서 $2^{-2a}\times 2^{-b}=4$ …… ㉠

$f(a-b)=2$에서 $2^{-(a-b)}=2^{-a}\times 2^b=2$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $2^{-3a}=8$, $2^{3a}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

즉 $2^a=\frac{1}{2}$이므로 $a=-1$

$2^a=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $2\cdot 2^b=2$

즉 $2^b=1$이므로 $b=0$

$\therefore 2^{3a}+2^{3b}=2^{-3}+2^0=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}$

따라서 $p=8$, $q=9$이므로 $p+q=17$

0325

정답 ②

STEP A 지수함수의 그래프의 성질 이해하기

$f(x)=a^x$에서 $f(2)=a^2=9$이므로 $a=3$ $(a>0)$

즉 지수함수 $f(x)=3^x$의 그래프의 성질은 다음과 같다.

① 점 $(0, 1)$을 지난다. [참]
② 점근선은 x축이다. [거짓]
③ $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이다. [참]
④ 그래프가 제 1, 2사분면을 지난다. [참]
⑤ 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. [참]

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

0326

정답 ⑤

STEP A 지수함수의 그래프의 성질 이해하기

① 정의역은 실수전체의 집합이고 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. [참]
② 점근선은 $y=0$이다. [참]
③ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. [참]
④ 그래프가 제 1, 2사분면을 지난다. [참]
⑤ 그래프는 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 일치한다. [거짓]

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

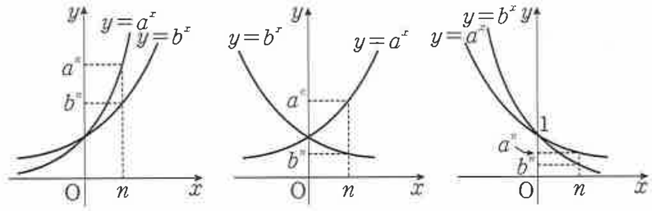
0327

정답 ③

STEP A a, b의 범위에 따라 $f(n)>g(n)$의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $f(n)=a^n$, $g(n)=b^n$이므로

(ⅰ) $1<b<a$ (ⅱ) $0<b<1<a$ (ⅲ) $0<b<a<1$



즉 위 그래프에서 양수 n에 대하여 항상 $a^n>b^n$이므로
$f(n)>g(n)$ [참]

STEP B $f(n)<g(-n)$에서 반례를 이용하여 거짓임을 판별하기

ㄴ. $f(n)<g(-n)$일 때, $0<b<a<1$인 것이 존재한다.

반례 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $n=1$이면

$f(1)=\frac{1}{2}$, $g(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

$f(1)<g(-1)$이지만 $a<1$이다. [거짓]

STEP C $f(n)=g(-n)$에서 a, b 사이의 관계를 구하여 참임을 판별하기

ㄷ. $f(n)=g(-n)$이면 $a^n=b^{-n}$이므로 $a=\frac{1}{b}$

$f\left(\frac{1}{n}\right)=a^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=(b^{-1})^{\frac{1}{n}}=b^{-\frac{1}{n}}=g\left(-\frac{1}{n}\right)$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0328

정답 ③

STEP A 지수법칙을 이용하여 $a+b$의 값 구하기

$4^a=\alpha$, $4^b=\beta$이므로 $\alpha\beta=4^a\times 4^b=4^{a+b}$

$\therefore 4^{a+b}=64=4^3$

따라서 $a+b=3$

0329

정답 ④

STEP A 지수법칙을 이용하여 k의 값 구하기

$f(1)=p$에서 $a=p$, $f(5)=q$에서 $a^5=q$이므로

$f(k)=\frac{q^2}{p^3}=\frac{(a^5)^2}{a^3}=\frac{a^{10}}{a^3}=a^7$

$\therefore f(k)=a^k=a^7$

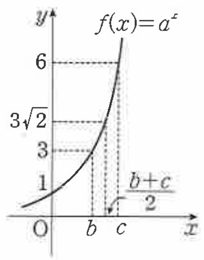
따라서 $k=7$

0330

정답 ③

STEP A 지수법칙을 이용하여 $f\left(\frac{b+c}{2}\right)$의 값 구하기

$f(b)=a^b=3$, $f(c)=a^c=6$
이므로
$a^b\times a^c=a^{b+c}=18$
따라서 $f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^{b+c})^{\frac{1}{2}}$
$=18^{\frac{1}{2}}$
$=3\sqrt{2}$

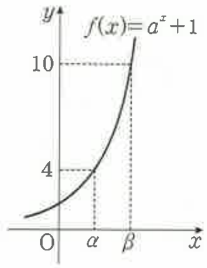


다른풀이 로그의 성질을 이용하여 풀이하기

$f(b)=a^b=3$, $f(c)=a^c=6$에서 $b=\log_a 3$, $c=\log_a 6$
이때 $b+c=\log_a 3+\log_a 6=\log_a(3\times 6)=\log_a 18$이므로
$f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^{b+c})^{\frac{1}{2}}=(a^{\log_a 18})^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$

내신연계 출제문항 120

함수 $f(x)=a^x+1\,(a>1)$의 그래프가
오른쪽 그림과 같고
$f(\alpha)=4$, $f(\beta)=10$
을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)$의 값은?
(단, α, β는 상수이다.)



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

STEP A 지수법칙을 이용하여 $f\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)$의 값 구하기

$f(\alpha)=a^\alpha+1=4$에서 $a^\alpha=3$
$f(\beta)=a^\beta+1=10$에서 $a^\beta=9$
$f\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)=a^{\frac{\alpha+\beta}{3}}+1=\sqrt[3]{a^{\alpha+\beta}}+1=\sqrt[3]{a^\alpha a^\beta}+1=\sqrt[3]{3\times 9}+1$
$=\sqrt[3]{3^3}+1=3+1=4$

참고 $f\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)=a^{\frac{\alpha+\beta}{3}}+1=(a^{\alpha+\beta})^{\frac{1}{3}}+1=(a^\alpha\times a^\beta)^{\frac{1}{3}}+1$
$=(3\times 9)^{\frac{1}{3}}+1$
$=3+1=4$

정답 ②

0331

정답 ③

STEP A 점 A의 x좌표를 a로 놓고 점 B, C의 좌표 구하기

점 A의 좌표를 $(a, 3^{-a})$이라 하면
점 A와 점 B는 y좌표가 같으므로 점 B의 y좌표는 3^{-a}이다.
점 B는 함수 $y=9^x$의 그래프 위의 점이므로
$9^x=3^{-a}$에서 $3^{2x}=3^{-a}$, $2x=-a$ $\therefore x=-\frac{a}{2}$
$\therefore \mathrm{B}\left(-\frac{a}{2}, 3^{-a}\right)$
또, 점 B와 점 C는 x좌표가 같으므로 점 C의 x좌표는 $-\frac{a}{2}$이고
점 C는 함수 $y=3^{-x}$의 그래프 위의 점이므로 $y=3^{\frac{a}{2}}$이다.
$\therefore \mathrm{C}\left(-\frac{a}{2}, 3^{\frac{a}{2}}\right)$

STEP B $\overline{\mathrm{AB}}=3$을 이용하여 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이 구하기

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=3$이므로 $-\frac{a}{2}-a=3$ $\therefore a=-2$
따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=3^{-a}-3^{\frac{a}{2}}=3^2-3^{-1}=\frac{26}{3}$

0332

정답 ③

STEP A 두 점 C, D의 x좌표를 a에 관한 식으로 표현하기

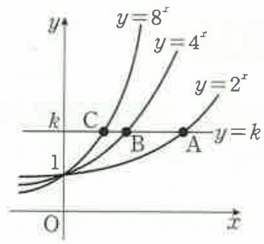
$\mathrm{A}(a, 9^a)$, $\mathrm{B}(a, 3^a)$이므로 두 점 C, D의 x좌표를 각각 x_1, x_2라고 하면
$3^{x_1}=9^a=3^{2a}$에서 $x_1=2a$
$9^{x_2}=3^a$에서 $3^{2x_2}=3^a$이므로 $x_2=\frac{a}{2}$

STEP B 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{a-\frac{a}{2}}{2a-a}=\frac{1}{2}$

내신연계 출제문항 121

오른쪽 그림과 같이 세 함수
$y=2^x$, $y=4^x$, $y=8^x$의 그래프가
직선 $y=k\ (k>1)$와 만나는 점을
각각 A, B, C라 할 때, $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값은?



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$
⑤ 1

STEP A 점 A의 x좌표를 a로 놓고 점 B, C의 좌표 구하기

점 A의 좌표를 $(a, 2^a)$이라 하면
점 B와 점 A의 y좌표가 같으므로 점 B의 y좌표는 2^a이다.
점 B는 함수 $y=4^x$의 그래프 위의 점이므로
$4^x=2^a$에서 $2^{2x}=2^a$, $2x=a$ $\therefore x=\frac{a}{2}$
$\therefore \mathrm{B}\left(\frac{a}{2}, 2^a\right)$
또, 점 C와 점 A의 y좌표가 같으므로 점 C의 y좌표는 2^a이고
점 C는 함수 $y=8^x$의 그래프 위의 점이므로
$8^x=2^a$에서 $2^{3x}=2^a$, $3x=a$ $\therefore x=\frac{a}{3}$
$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{a}{3}, 2^a\right)$

STEP B 주어진 식의 값 구하기

따라서 $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{3}}{a-\frac{a}{3}}=\frac{\frac{a}{6}}{\frac{2a}{3}}=\frac{1}{4}$

정답 ②

0333

정답 ①

STEP A 그래프에서 a, b, c를 p, q로 표현하기

$\left(\frac{1}{2}\right)^p=a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-q}=b$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-p-q}=c$

STEP B 지수법칙을 이용하여 a, b, c의 관계식 구하기

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-q}\div\left(\frac{1}{2}\right)^p=\left(\frac{1}{2}\right)^{-q-p}$이므로 $\frac{b}{a}=c$
따라서 $b=ac$

0334

정답 ②

STEP A 그래프에서 점 A와 B의 좌표 구하기

점 A의 좌표를 $(a,\ 4)$, 점 B의 좌표를 $(b,\ 4)$라고 하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=4$에서 $a=-2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^b=4$에서 $b=-1$

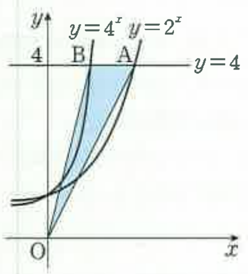
$\therefore$ A$(-2,\ 4)$, B$(-1,\ 4)$

STEP B 삼각형 AOB의 넓이 구하기

따라서 삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot1\cdot4=2$

내신연계 출제문항 122

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=2^x$, $y=4^x$의 그래프와 직선 $y=4$와의 교점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

STEP A 그래프에서 점 A와 B의 좌표 구하기

점 A의 좌표를 $(a,\ 4)$, 점 B의 좌표를 $(b,\ 4)$라고 하면

$2^a=4$에서 $a=2$이고 $4^b=4$에서 $b=1$

$\therefore$ A$(2,\ 4)$, B$(1,\ 4)$

STEP B 삼각형 OAB의 넓이 구하기

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot4=2$

정답 ②

0335

정답 ②

STEP A 삼각형 ABC의 넓이가 16임을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이 구하기

$y=a$, $y=b$ 사이의 거리가 16이므로

$b-a=16$ …… ㉠

또한, 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로 $\frac{1}{2}\cdot16\cdot\overline{BC}=16$

$\therefore \overline{BC}=2$

STEP B a, b의 값 구하기

즉 B$(\log_4 a,\ a)$, C$(\log_2 a,\ a)$이므로 $\log_2 a-\log_4 a=2$

$\log_2 a-\frac{1}{2}\log_2 a=\frac{1}{2}\log_2 a=2$

$\therefore \log_2 a=4$

이때 $a=2^4=16$이므로 ㉠에서 $b=32$

STEP C 삼각형 ACD의 넓이 구하기

A$(\log_4 b,\ b)$, D$(\log_2 b,\ b)$이므로 A$\left(\frac{5}{2},\ 32\right)$, D$(5,\ 32)$

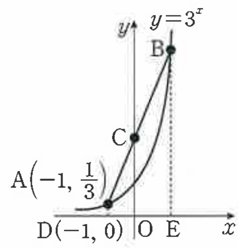
따라서 삼각형 ACD의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot(b-a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot16=20$

0336

정답 ⑤

STEP A 점 A의 좌표 구하기

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 D,
점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E
라 하면
점 A는 $y=3^x$의 그래프 위의 점이고
y좌표가 $\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}=3^x$, $x=-1$
즉 A$\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$이므로 점 D$(-1,\ 0)$



STEP B 내분점의 성질을 이용하여 점 B의 y좌표 구하기

y축 위의 점 C는 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{AC}:\overline{CB}=1:2$에서 $\overline{DO}:\overline{OE}=1:2$가 된다.

점 E$(2,\ 0)$이므로 B$(2,\ 3^2)$, 즉 B$(2,\ 9)$

따라서 점 B의 y좌표는 9

다른풀이 내분점을 이용하여 풀이하기

점 A는 $y=3^x$의 그래프 위의 점이고 y좌표가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{3}=3^x$, $x=-1$

$\therefore$ A$\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$

점 B의 x좌표를 b라 놓으면 점 B$(b,\ 3^b)$이고

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C$\left(\frac{1\cdot b+2\cdot(-1)}{1+2},\ \frac{1\cdot3^b+2\cdot\frac{1}{3}}{1+2}\right)$에 대하여 점 C는 y축 위에 있으므로 x좌표가 0이므로 $\frac{b-2}{3}=0$

$\therefore b=2$

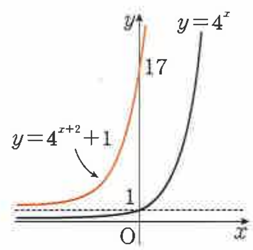
따라서 점 B의 y좌표는 $3^2=9$

0337

정답 ②

STEP A 지수함수 $y=16\cdot4^x+1$의 그래프 그리기

$y=16\cdot4^x+1=4^{x+2}+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



STEP B 그래프를 이용하여 참, 거짓 판별하기

① 밑 4는 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. [참]

② 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y\,|\,y>1\}$이다. [거짓]

③ 함수 $y=4^{x+2}+1$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 겹쳐진다. [참]

④ $x=-2$일 때, $y=4^{-2+2}+1=2$이므로 $y=4^{x+2}+1$의 그래프는 점 $(-2,\ 2)$를 지난다. [참]

⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 $y=1$이다. [참]

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

0338

정답 ⑤

STEP A 지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+3$의 그래프의 이동 경로 구하기

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+3$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하여 얻어진다.

STEP B 지수함수의 그래프의 참, 거짓 판별하기

① 점근선은 직선 $y=3$이다. [거짓]
② 정의역은 실수 전체이다. [거짓]
③ 치역은 $\{y\,|\,y>3\}$이다. [거짓]
④ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. [거짓]
⑤ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하여 얻어진다. [참]

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

내신연계 출제문항 123

함수 $y=\frac{1}{3}\cdot 3^{-x}+2$에 대하여 [보기]에서 옳은 것은?

> ㄱ. 치역은 $\{y\,|\,y\geq 2$인 모든 실수$\}$이다.
> ㄴ. x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
> ㄷ. 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

STEP A 지수함수 $y=\frac{1}{3}\cdot 3^{-x}+2$의 그래프의 이동 경로 구하기

$y=\frac{1}{3}\cdot 3^{-x}+2=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+2$이므로 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하여 얻어진다.

STEP B 지수함수의 그래프의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 치역은 $\{y\,|\,y>2$인 모든 실수$\}$이다. [거짓]
ㄴ. x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. [참]
ㄷ. 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다. [참]

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답 ④

0339

정답 ④

STEP A $y=2^{-x}+3$가 얻어지는 경로 구하기

$y=2^{-x}+3$의 그래프는 $y=2^{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

STEP B 지수함수의 그래프의 참, 거짓 판별하기

① 점근선은 $y=3$이다. [참]
② $x=0$일 때, $y=2^{0}+3=4$이므로 점 $(0,\ 4)$를 지난다. [참]
③ 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역은 $y>3$인 집합이다. [참]
④ 함수 $y=2^{x}-3$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프는 $y=-2^{-x}+3$이다. [거짓]
⑤ 함수 $y=2^{x}$의 그래프를 y축으로 3만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 그래프와 같다. [참]

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0340

정답 ①

STEP A x축에 대하여 대칭이동한 함수식 구하기

함수 $y=-5^{x-2}+3$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면
$y=5^{x-2}-3$

STEP B $y=5^{x}$를 이용하여 $y=5^{x-2}-3$의 그래프의 점근선 구하기

$y=5^{x}$의 그래프를 x축으로 2만큼, y축으로 -3만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선이 $y=-3$
따라서 그래프의 개형은 ①이다.

0341

정답 ③

STEP A 각 함수식이 얻어지는 경로를 구하여 [보기]의 진위판단하기

ㄱ. $y=5^{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=-5^{x}+1$의 그래프가 된다. [참]
ㄴ. $y=5^{x}$의 그래프를 x축으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y=5^{x+1}-3$의 그래프가 된다. [참]
ㄷ. $y=5^{2x-1}$의 그래프는 $y=25^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동하여 얻을 수 있으나 $y=5^{x}$의 그래프로부터는 얻을 수 없다. [거짓]
ㄹ. $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}+1$의 그래프는 $y=5^{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다. [참]

따라서 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

0342

정답 ③

STEP A 각 함수식이 얻어지는 경로를 구하여 [보기]의 진위판단하기

ㄱ. $y=\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-1$의 그래프는 함수 $y=9^{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다. [참]
ㄴ. $y=3^{2x-1}=\frac{1}{3}\cdot 9^{x}=9^{x-\frac{1}{2}}$의 그래프는 함수 $y=9^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동하여 겹쳐질 수 있다. [참]
ㄷ. $y=3^{3x+1}=3\cdot 27^{x}=27^{x+\frac{1}{3}}$의 그래프는 함수 $y=27^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 겹쳐질 수 있다. [거짓]
ㄹ. $y=\frac{9^{x}+1}{9}=9^{x-1}+\frac{1}{9}$이므로 함수 $y=9^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{9}$만큼 평행이동하여 겹쳐질 수 있다. [참]

따라서 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

내신연계 출제문항 124

다음 [보기]의 함수의 그래프 중 함수 $y=3^{x}$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것을 모두 고른 것은?

> ㄱ. $y=-3^{x}+2$
> ㄴ. $y=9\times 3^{x}-1$
> ㄷ. $y=\frac{3^{x}-1}{3}$
> ㄹ. $y=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

STEP A 각 함수식이 얻어지는 경로를 구하여 [보기]의 진위판단하기

ㄱ. 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다. [참]

ㄴ. $y=9\times3^x-1=3^{x+2}-1$이므로 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다. [참]

ㄷ. $y=\frac{3^x-1}{3}=3^{x-1}-\frac{1}{3}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$만큼 평행이동한 것과 같다. [참]

ㄹ. $y=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}=3^{-(x+2)}$이므로 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식을 x축으로 -2만큼 평행이동한 것과 같다. [참]

따라서 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 정답 ⑤

0343

정답 ④

STEP A 지수함수 $y=3^x$의 그래프를 조건에 따라 이동한 그래프의 식 구하기

$y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=3^{x-m}+n$

STEP B 평행이동한 식과 주어진 식을 비교하여 m, n의 값 구하기

이때 $y=\frac{1}{9}\cdot3^x+3=3^{-2}\cdot3^x+3=3^{x-2}+3$이므로 $m=2$, $n=3$

따라서 $mn=2\times3=6$

0344

정답 ⑤

STEP A 지수함수 $y=2^{2x}$의 그래프를 조건에 따라 이동한 그래프의 식 구하기

함수 $y=2^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2^{2(x-p)}+q$

STEP B 평행이동한 식과 주어진 식을 비교하여 p, q의 값 구하기

이때 $y=\frac{1}{16}\cdot2^{2x}+\frac{5}{2}=2^{2(x-2)}+\frac{5}{2}$이므로

$y=2^{2(x-p)}+q$이 $y=2^{2(x-2)}+\frac{5}{2}$와 일치하므로 $p=2$, $q=\frac{5}{2}$

따라서 $pq=5$

0345

정답 ②

STEP A $y=3\cdot2^x+4$가 얻어지는 경로를 구하여 m, n의 값 구하기

$y=3\cdot2^x+4=2^{\log_2 3}\cdot2^x+4=2^{x+\log_2 3}+4$이므로 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_2 3$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

즉 $m=-\log_2 3$, $n=4$

STEP B n^m의 값 구하기

따라서 $n^m=4^{-\log_2 3}=3^{-\log_2 4}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

내신연계 출제문항 125

함수 $y=3\cdot2^x+\frac{1}{4}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것일 때 b^a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

STEP A $y=3\cdot2^x+\frac{1}{4}$가 얻어지는 경로를 구하여 a, b의 값 구하기

$y=3\times2^x+\frac{1}{4}=2^{x+\log_2 3}+\frac{1}{4}$이므로 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_2 3$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 그래프의 식이다.

즉 $a=-\log_2 3$, $b=\frac{1}{4}$

STEP B b^a의 값 구하기

따라서 $b^a=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\log_2 3}=4^{\log_2 3}=3^{\log_2 4}=3^2=9$ 정답 ⑤

0346

정답 ③

STEP A 함수 $y=2^x$의 그래프를 조건에 따라 이동한 그래프의 식 구하기

$y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ …… ㉠

다시 ㉠을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}+n=2^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+n$

STEP B 두 함수식을 비교하여 m, n의 값 구하기

$y=2^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+n$이 $y=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+4$와 일치하므로 $m=3$, $n=4$

따라서 $m+n=7$

0347

정답 ②

STEP A 함수 $y=a^x$의 그래프를 조건에 따라 이동한 그래프의 식 구하기

함수 $y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-a^x$ …… ㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-a^{x-1}+2$

STEP B 점 $(3, -3)$을 대입하여 a의 값 구하기

함수 $y=-a^{x-1}+2$의 그래프가 점 $(3, -3)$을 지나므로

$-3=-a^2+2$, $a^2=5$

따라서 $a=\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

0348

정답 ③

STEP A $y=a\cdot3^x$의 그래프를 조건에 따라 이동한 그래프의 식 구하기

함수 $y=a\cdot3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-a\cdot3^{-x}$ …… ㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-a\cdot3^{-x+2}+3$

STEP B 점 $(1, -6)$을 대입하여 a의 값 구하기

함수 $y=-a\cdot3^{-x+2}+3$의 그래프가 점 $(1, -6)$을 지나므로

$-6=-a\cdot3^{-1+2}+3$, $-9=-3a$

따라서 $a=3$

내신연계 출제문항 126

함수 $y=3^{x-1}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프가 점 $(2,\ p)$를 지날 때, p의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

STEP A $y=3^{x-1}$의 그래프를 조건에 따라 이동한 그래프의 식 구하기

함수 $y=3^{x-1}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-3^{x-1}$ …… ㉠

㉠의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-3^{x-1}+2$

STEP B 점 $(2,\ p)$를 대입하여 p의 값 구하기

따라서 함수 $y=-3^{x-1}+2$의 그래프가 점 $(2,\ p)$를 지나므로

$p=-3^{2-1}+2=-1$ 정답 ①

0349 정답 ①

STEP A 점근선의 방정식을 이용하여 b의 값 구하기

함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프의 점근선은 $y=b$

주어진 그래프의 점근선이 직선 $y=-1$이므로 $b=-1$

STEP B 점 $(0,\ 1)$을 대입하여 a의 값 구하기

또한, 함수 $y=2^{x-a}-1$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=2^{-a}-1,\ 2^{-a}=2$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $a=-1,\ b=-1$이므로 $a+b=-2$

0350 정답 ②

STEP A 점근선의 방정식을 이용하여 b의 값 구하기

함수 $y=3^{x+a}+b$의 그래프의 점근선은 직선 $y=b$

주어진 그래프의 점근선이 직선 $y=-3$이므로 $b=-3$

STEP B 점 $(0,\ 0)$을 대입하여 a의 값 구하기

또한, $y=3^{x+a}-3$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=3^{a}-3$에서 $a=1$

따라서 $a+b=1-3=-2$

0351 정답 ①

STEP A 점근선의 방정식을 이용하여 b의 값 구하기

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}+b$의 그래프의 점근선은 $y=b$

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-1$이므로 $b=-1$

STEP B 점 $(-3,\ 1)$을 대입하여 a의 값 구하기

또한, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}+b$의 그래프가 점 $(-3,\ 1)$을 지나므로

$1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+a}-1,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3+a}=2$

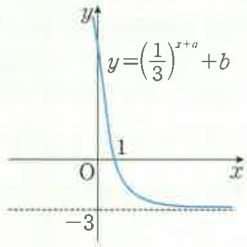
$-3+a=-1$

$\therefore\ a=2$

따라서 $a+b=2+(-1)=1$

내신연계 출제문항 127

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=-3$이 이 그래프의 점근선일 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?



① -6 ② -5
③ -4 ④ -3
⑤ -2

STEP A 점근선의 방정식을 이용하여 b의 값 구하기

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}+b$의 점근선은 $y=b$

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-3$이므로 $b=-3$

STEP B 점 $(1,\ 0)$을 대입하여 a의 값 구하기

또한, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}-3$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\left(\frac{1}{3}\right)^{1+a}-3,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1+a}=3$

$1+a=-1$에서 $a=-2$

따라서 $a=-2,\ b=-3$이므로 $a+b=-5$ 정답 ②

0352 정답 ①

STEP A 점근선의 방정식을 이용하여 b의 값 구하기

함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은

$y=b$이므로 $b=1$

STEP B 점 $(2,\ 0)$을 대입하여 a의 값 구하기

또한, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}+1$의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$-\left(\frac{1}{2}\right)^{2+a}+1=0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2+a}=1$

$2+a=0$에서 $a=-2$

따라서 $a=-2,\ b=1$이므로 $a+b=-1$

0353 정답 ③

STEP A 치역은 $\{y\,|\,y>1\}$임을 이용하여 b의 값 구하기

함수 $y=3^{x}$의 치역은 $\{y\,|\,y>0\}$이므로 함수 $y=3^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 함수 $y=3^{x+a}+b$의 치역은 $\{y\,|\,y>b\}$이므로 $b=1$

STEP B 점 $(0,\ 10)$을 대입하여 a의 값 구하기

함수 $y=3^{x+a}+1$의 그래프가 점 $(0,\ 10)$을 지나므로

$3^{0+a}+1=10$

$3^{a}=9=3^{2}$

$\therefore\ a=2$

따라서 $a+b=2+1=3$

0354

정답 ④

STEP A 두 함수 $f(x)=2^x+k$, $g(x)=-3^x+6$의 점근선을 구하기

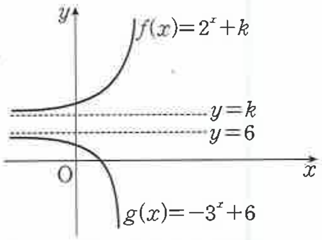
함수 $f(x)=2^x+k$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 점근선은 $y=k$

함수 $g(x)=-3^x+6$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이므로 점근선은 $y=6$

STEP B 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\geq g(x_2)$가 성립할 때, 실수 k의 범위 구하기

즉 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\geq g(x_2)$가 성립하려면

두 그래프의 위치 관계는 그림과 같아야 한다.



따라서 $k\geq 6$이어야 하므로 자연수 k의 최솟값은 6

0355

정답 ④

STEP A 조건 (가)에서 점 $(1,\ 7)$을 대입하여 a, b의 관계식 구하기

함수 $f(x)=2^{ax}+b$의 그래프가 점 $(1,\ 7)$을 지나므로

$2^a+b=7$ …… ㉠

STEP B 조건 (나)를 이용하여 b의 값 구하기

함수 $f(x)=2^{ax}+b$의 그래프의 점근선은 직선 $y=b$이고

함수 $f(x)=2^{ax}+b$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 점근선은 직선 $y=b+2$이므로

$b+2=5$에서 $b=3$

$b=3$를 ㉠에 대입하면 $2^a=7-3=4$

$\therefore a=2$

STEP C ab의 값 구하기

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $ab=6$

0356

정답 ②

STEP A $|3^x-3|=k$의 실근의 개수는 $y=|3^x-3|$와 $y=k$의 교점의 개수임을 이해하기

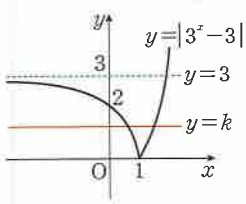
방정식 $|3^x-3|=k$의 실근의 개수는

$y=|3^x-3|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

STEP B 그래프를 이용하여 k의 범위 구하기

$y=|3^x-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는

$0<k<3$



STEP C 정수 k의 합 구하기

따라서 정수 k는 1, 2이므로 합은 $1+2=3$

내/신/연/계/ 출제문항 128

x에 대한 방정식 $|5^x-25|=k$가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 개수는?

① 22　② 23　③ 24
④ 25　⑤ 26

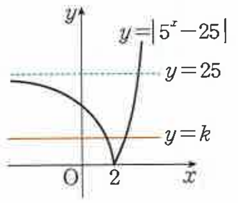
STEP A $|5^x-25|=k$의 실근의 개수는 $y=|5^x-25|$와 $y=k$의 교점의 개수임을 이해하기

방정식 $|5^x-25|=k$의 실근의 개수는

$y=|5^x-25|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

STEP B 그래프를 이용하여 k의 범위 구하기

그런데 $y=|5^x-25|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는 $0<k<25$



STEP C 정수 k의 개수 구하기

따라서 정수 k는 1, 2, 3, …, 24이므로 개수는 24개이다.

다른풀이 절댓값의 성질을 이용하여 풀이하기

방정식 $|5^x-25|=k$에서

$5^x-25=-k$ 또는 $5^x-25=k$

$5^x=25-k$ 또는 $5^x=25+k$

이때 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$25-k>0$, $25+k>0$, $k>0$

따라서 $0<k<25$

정답 ③

0357

정답 ②

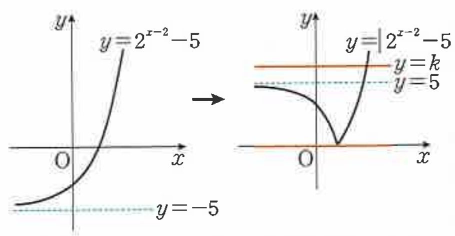
STEP A $|2^{x-2}-5|=k$의 실근의 개수는 $y=|2^{x-2}-5|$와 $y=k$의 교점의 개수임을 이해하기

방정식 $|2^{x-2}-5|=k$의 실근의 개수는

$y=|2^{x-2}-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

STEP B 그래프를 이용하여 k의 범위 구하기

$y=2^{x-2}-5$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이고 이 그래프의 x축 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동하면 $|2^{x-2}-5|=k$의 그래프는 다음과 같다.



이때 직선 $y=k$가 함수 $y=|2^{x-2}-5|$의 그래프와 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k=0$ 또는 $k\geq 5$

따라서 10보다 작은 정수 k는 0, 5, 6, 7, 8, 9이므로 6개이다.

0358

정답 ⑤

STEP A 조건을 만족하는 2^k의 범위 구하기

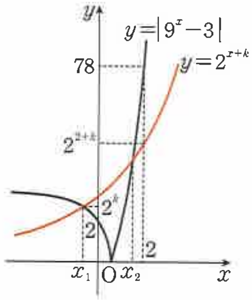
$x_1<0$이므로 함수 $y=2^{x+k}$의 그래프의 y절편은 2보다 커야 하므로

$2^k>2$ …… ㉠

$0<x_2<2$이므로 함수 $y=2^{x+k}$의 $x=2$일 때의 함숫값은 함수 $y=|9^x-3|$의 $x=2$일 때의 함숫값 78보다 작아야 하므로

$2^{2+k}<78$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2<2^k<\frac{39}{2}$



STEP B 자연수 k의 합 구하기

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k의 합은 $2+3+4=9$

0359

정답 ③

STEP A (밑)> 1일 때, 증가하는 함수임을 이해하기

함수 $y=3^{x-1}+2$는 밑 3이 1보다 크므로

x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

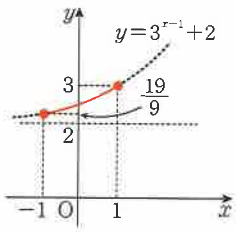
STEP B 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값 구하기

$-1\le x\le 1$에서

$x=-1$일 때, 최솟값은 $m=3^{-2}+2=\frac{19}{9}$

$x=1$일 때, 최댓값은 $M=1+2=3$

따라서 $Mm=3\cdot\frac{19}{9}=\frac{19}{3}$



0360

정답 ④

STEP A 함수 $f(x)$가 $0<$(밑)<1일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

지수함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$은 밑 $\frac{1}{2}$이 1보다 작으므로

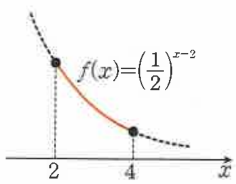
x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

STEP B 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값 구하기

$2\le x\le 4$에서

$x=2$일 때, 최댓값은 $f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2}=1$

$x=4$일 때, 최솟값은 $f(4)=\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{1}{4}$



0361

정답 ⑤

STEP A 함수 $f(x)$가 $0<$(밑)<1일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

지수함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+2$은 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

STEP B 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값 구하기

$-2\le x\le 1$에서

$x=-2$일 때, 최댓값 $M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+2=4$

$x=1$일 때, 최솟값 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+2=\frac{9}{4}$

따라서 $M+m=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$

0362

정답 ⑤

STEP A 주어진 식을 지수법칙을 이용하여 정리하기

$f(x)=2^{x+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x=2^{x+1}\cdot 2^{-2x}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

STEP B 함수 $f(x)$가 $0<$(밑)<1일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

지수함수 $f(x)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

STEP C 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값 구하기

$-2\le x\le 1$에서

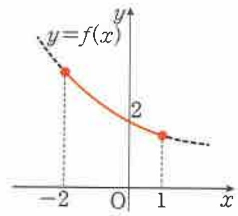
$x=-2$일 때,

최댓값은 $M=f(-2)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=8$

$x=1$일 때,

최솟값은 $m=f(1)=2\times\frac{1}{2}=1$

따라서 $Mm=8\times 1=8$



내/신/연/계/ 출제문항 129

$-1\le x\le 2$에서 정의된 함수 $y=2^{x-1}\cdot 3^{-x+1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, Mm의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

STEP A 주어진 식을 지수법칙을 이용하여 정리하기

$y=2^{x-1}\cdot 3^{-x+1}=2^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$

STEP B $0<$(밑)<1일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

지수함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$은 밑 $\frac{2}{3}$가 1보다 작으므로

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

STEP C 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값 구하기

$x=-1$일 때, 최댓값 $M=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{4}$

$x=2$일 때, 최솟값 $m=\left(\frac{2}{3}\right)^{2-1}=\frac{2}{3}$

따라서 $Mm=\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$

정답 ③

0363

정답 ⑤

STEP A 함수 $f(x)$가 $0<$(밑)<1일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

함수 $f(x)=a^x$은 $0<a<1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

STEP B 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값 구하기

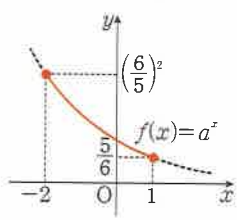
$-2\le x\le 1$에서

$x=1$일 때, 최솟값은 $a^1=\frac{5}{6}$

$x=-2$일 때, 최댓값은

$M=a^{-2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{6}{5}\right)^2$

따라서 $a\times M=\frac{5}{6}\times\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{6}{5}$



0364

정답 ②

STEP A 0 <(밑)< 1일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+b$에서 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로
x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

STEP B 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값을 이용하여 a, b의 값 구하기

$-3 \le x \le a$에서
$x=-3$일 때, 최대이고 y의 최댓값은 24이므로
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+b=24$, $16+b=24$
$\therefore b=8$
또, $x=a$일 때, 최소이고 최솟값은 16이므로
$\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}+8=16$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}=8$, $2^{-a+1}=2^3$
$-a+1=3$
$\therefore a=-2$
따라서 $a=-2$, $b=8$이므로 $a+b=6$

내/신/연/계/ 출제문항 130

$-1 \le x \le 2$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-a}+b$의 최댓값이 56, 최솟값이 4일 때,
두 상수 a, b에 대하여 3^{ab}의 값은?

① 322 ② 324 ③ 326
④ 328 ⑤ 330

STEP A 함수 $f(x)$가 0 <(밑)< 1일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-a}+b$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로
x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

STEP B 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값 구하기

$-1 \le x \le 2$에서
$x=-1$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-a-1}+b$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-a-1}+b=56$에서 $3 \cdot 3^a+b=56$ …… ㉠
$x=2$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-a+2}+b$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-a+2}+b=4$에서 $\left(\frac{1}{9}\right)\cdot 3^a+b=4$ …… ㉡

STEP C 3^{ab}의 값 구하기

㉠−㉡을 하면
$\left(3-\frac{1}{9}\right)\times 3^a=52$
$\frac{26}{9}\times 3^a=52$
$\therefore 3^a=18$
$3^a=18$을 ㉠에 대입하면 $b=2$
따라서 $3^{ab}=(3^a)^b=18^2=324$

정답 ②

0365

정답 ①

STEP A 함수 $f(x)=4^x$의 최댓값 구하기

함수 $f(x)=4^x$은 x의 값이 증가하면 함숫값도 증가하므로
$-1 \le x \le 3$에서 $x=3$일 때, $f(x)$의 최댓값은 $M=4^3=64$

STEP B 함수 $g(x)$의 최솟값 구하기

함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 함숫값은 감소하므로
$-1 \le x \le 3$에서 $x=3$일 때, $g(x)$의 최솟값은 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$
따라서 $Mm=64\cdot\frac{1}{8}=8$

0366

정답 ①

STEP A $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 밑이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로
x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.
$\frac{1}{3}\le x\le 3$에서
$x=3$일 때, $f(x)$의 최솟값은 $m=f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

STEP B $g(x)$의 최댓값 구하기

$g(x)=\log_9 x$에서 밑이 1보다 크므로
x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가한다.
$\frac{1}{3}\le x\le 3$에서
$x=3$일 때, $g(x)$의 최댓값은 $M=g(3)=\log_9 3=\frac{1}{2}$
$\therefore M=\frac{1}{2}$
따라서 $Mm=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$

0367

정답 ②

STEP A 지수함수의 밑이 1보다 클 때, a의 값 구하기

$f(x)=3\left(\frac{3}{a}\right)^x$에서
(ⅰ) $\frac{3}{a}>1$, 즉 $0<a<3$일 때,
x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 $-2\le x\le 1$에서
$x=1$일 때, $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=\frac{9}{a}=12$
$\therefore a=\frac{3}{4}$

STEP B 지수함수의 밑이 1보다 작을 때, a의 값 구하기

(ⅱ) $\frac{3}{a}=1$, 즉 $a=3$일 때,
$f(x)=3$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 12가 아니다.
(ⅲ) $0<\frac{3}{a}<1$, 즉 $a>3$일 때,
x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 $-2\le x\le 1$에서
$x=-2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 $f(-2)=\frac{a^2}{3}=12$
$\therefore a=6$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 $a=\frac{3}{4}$ 또는 $a=6$
따라서 구하는 모든 양수 a의 값의 합은 $\frac{3}{4}+6=\frac{27}{4}$

내신연계 출제문항 131

정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$인 함수 $f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 곱은?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

STEP A 지수함수의 밑이 1보다 클 때, a의 값 구하기

$f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$에서

(i) $\frac{3}{a}>1$, 즉 $0<a<3$일 때,

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 $-1 \le x \le 2$에서

$x=2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=\left(\frac{3}{a}\right)^2=4$

즉 $a^2=\frac{9}{4}$에서 $a=\frac{3}{2}$ ($\because 0<a<3$)

STEP B 지수함수의 밑이 1보다 작을 때, a의 값 구하기

(ii) $\frac{3}{a}=1$, 즉 $a=3$일 때,

$f(x)=1$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 4가 아니다.

(iii) $0<\frac{3}{a}<1$, 즉 $a>3$일 때,

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 $-1 \le x \le 2$에서

$x=-1$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(-1)=\left(\frac{3}{a}\right)^{-1}=\frac{a}{3}=4$

즉 $a=12$

STEP C 양수 a의 값의 곱을 구하기

(i)~(iii)에서 $a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=12$

따라서 구하는 모든 양수 a의 값의 곱은 $\frac{3}{2}\cdot 12=18$

정답 ②

0368

정답 ①

STEP A 함수 $f(x)$가 $0<(\text{밑})<1$일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+a}$에서

$f(x)=x^2-2x+a$라고 하면 $f(x)=(x-1)^2+a-1$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 1보다 작으므로

$f(x)$가 최소일 때, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 최대이다.

STEP B $f(x)$의 최솟값을 구하여 주어진 함수의 최댓값 구하기

따라서 $f(x)=a-1$일 때, 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}=16$이므로 $a=-3$

0369

정답 ③

STEP A 함수 $f(x)$가 $0<(\text{밑})<1$일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

함수 $y=a^{-2x^2+4x-4}$에서

$f(x)=-2x^2+4x-4$라 하면 $0<a<1$이므로

$f(x)$가 최대일 때, y는 최솟값을 가진다.

STEP B $f(x)$의 최댓값을 구하여 주어진 함수의 최솟값 구하기

이때 $f(x)=-2x^2+4x-4=-2(x-1)^2-2$에서

$f(x)$의 최댓값은 -2이므로 y의 최솟값은 a^{-2}

따라서 $a^{-2}=16$이고 $0<a<1$이므로 구하는 a의 값은 $\frac{1}{4}$

0370

정답 ⑤

STEP A 함수 $f(x)$가 $(\text{밑})>1$일 때, 증가하는 함수임을 이해하기

지수함수 $y=2^{x^2+2x+3}$의 밑이 1보다 크므로 x^2+2x+3이

최소일 때, 최솟값을 갖고

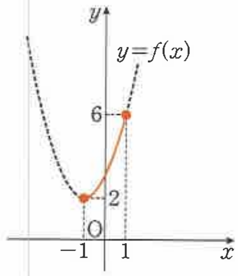
최대일 때, 최댓값을 가진다.

STEP B $-1 \le x \le 1$에서 지수의 범위 구하기

$f(x)=x^2+2x+3$이라 하면

$f(x)=(x+1)^2+2$이므로

$-1 \le x \le 1$에서 $2 \le f(x) \le 6$



STEP C 함수의 최댓값 M, 최솟값 m의 값 구하기

$-1 \le x \le 1$에서 함수 $y=2^{x^2+2x+3}=2^{f(x)}$는

$f(x)=6$일 때, 최대이고 최댓값은 $\mathrm{M}=2^6=64$

$f(x)=2$일 때, 최소이고 최솟값은 $m=2^2=4$

따라서 $\mathrm{M}+m=64+4=68$

0371

정답 ④

STEP A 함수 $f(x)$가 $0<(\text{밑})<1$일 때, 감소하는 함수임을 이해하기

지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3}$의 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로

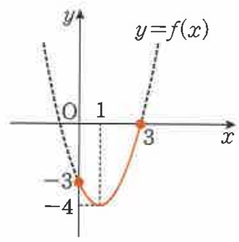
x^2-2x-3이 최소일 때, 최댓값을 갖고 최대일 때, 최솟값을 가진다.

STEP B $0 \le x \le 3$에서 지수의 범위 구하기

$f(x)=x^2-2x-3$이라 하면

$f(x)=(x-1)^2-4$이므로

$0 \le x \le 3$에서 $-4 \le f(x) \le 0$



STEP C $f(x)$의 최댓값, 최솟값을 구하여 M+m의 값 구하기

$0 \le x \le 3$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$는

$f(x)=0$일 때, 최소이고 최솟값은 $m=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$

$f(x)=-4$일 때, 최대이고 최댓값은 $\mathrm{M}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=3^4=81$

따라서 $\mathrm{M}+m=81+1=82$