

2023학년도 대학수학능력시험
수학영역 정답 및 풀이

[공통: 수학 I·수학 II]

01. ⑤ 02. ④ 03. ① 04. ③ 05. ⑤
 06. ② 07. ④ 08. ④ 09. ③ 10. ④
 11. ① 12. ② 13. ③ 14. ① 15. ⑤
 16. 10 17. 15 18. 22 19. 7
 20. 17 21. 33 22. 13

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{2\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}} &= (2^2 \div 2^{\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} \\ &= (2^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} \\ &= 2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0} \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r > 0)$ 이라 하자.

$$a_2 + a_4 = 30 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{한편, } a_4 + a_6 = \frac{15}{2}$$

에서

$$r^2(a_2 + a_4) = \frac{15}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$r^2 \times 30 = \frac{15}{2}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}$$

$r > 0$ 이므로

$$r = \frac{1}{2}$$

㉠에서

$$a_1 r + a_1 r^3 = 30$$

$$a_1 \times \frac{1}{2} + a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 30$$

$$a_1 \times \frac{5}{8} = 30$$

따라서

$$a_1 = 30 \times \frac{8}{5} = 48$$

정답 ①

4. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x) = x^2 f(x)$ 에서 미분하면

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

이때, $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(2) &= 4f(2) + 4f'(2) \\ &= 4 \times 1 + 4 \times 3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

정답 ③

5. 출제의도 : 조건을 만족시키는 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \text{이므로}$$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\tan\theta < 0$, $\sin\theta < 0$ 이므로 θ 는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta > 0$ 이다.

그리고

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= 1 - \sin^2\theta \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

에서

$$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $\cos\theta > 0$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

정답 ⑤

6. 출제의도 : 함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 두 상수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극대이므로

$$f'(1) = 6 - 18 + a = 0$$

$$a = 12$$

이때,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로

$$b = 2$$

$$\text{따라서 } a + b = 12 + 2 = 14$$

정답 ②

7. 출제의도 : 등차수열의 일반항과 \sum 의 정의를 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1 = a$ 라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1) \times a \\ &= an \end{aligned}$$

한편

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2$$

에서

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}}{a} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}) \\ &= \frac{1}{a} \{(\sqrt{2a} - \sqrt{a}) + (\sqrt{3a} - \sqrt{2a}) + \dots \\ & \quad \dots + (\sqrt{16a} - \sqrt{15a})\} \\ &= \frac{1}{a} (4\sqrt{a} - \sqrt{a}) \\ &= \frac{3\sqrt{a}}{a} \\ &= \frac{3}{\sqrt{a}} = 2 \end{aligned}$$

이때,

$$2\sqrt{a} = 3$$

$$a = \frac{9}{4}$$

따라서,

$$a_4 = 4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$

정답 ④

8. 출제의도 : 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = x^3 - x + 2 \text{에서}$$

$$y' = 3x^2 - 1$$

이때 곡선 $y = x^3 - x + 2$ 위의 점

$(t, t^3 - t + 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - t + 2) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

이 직선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 - (t^3 - t + 2) = (3t^2 - 1)(0 - t)$$

정리하면 $t^3 = -1$ 이므로

$$t = -1$$

따라서 점 $(0, 4)$ 에서 곡선 $y = x^3 - x + 2$

에 그은 접선의 방정식은

$$y - 2 = 2(x + 1)$$

$$y = 2x + 4$$

그러므로 직선 $y = 2x + 4$ 의 x 절편은 -2

이다.

정답 ④

9. 출제의도 : 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x) = a - \sqrt{3}\tan 2x$ 의 그래프의 주

기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$$-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4}$$

이다.

한편, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 구간

$\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$ 에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 7을 가지므로

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = a - \sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 7 \text{에서}$$

$$a + \sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3} = 7$$

$$a+3=7$$

$$a=4$$

함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 최솟값 3을 가지
므로

$$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3\text{에서}$$

$$\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때, $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$2b=\frac{\pi}{6}$$

$$b=\frac{\pi}{12}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

정답 ③

10. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$A=B$ 이므로

$$\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx$$

$$= \int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - kx \right]_0^2$$

$$= 4 + \frac{16}{3} - 2k$$

$$= \frac{28}{3} - 2k = 0$$

따라서,

$$2k = \frac{28}{3}$$

$$k = \frac{14}{3}$$

정답 ④

11. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$ 라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

$$= 25 + 45 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta$$

$$= 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

$$= 49 + 45 - 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta$$

$$= 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta$$

이때 $\angle BAC = \angle CAD$ 이므로

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$$

$$70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta \text{에서}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta$$

$$= 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= 10$$

$$\text{즉, } \overline{BC} = \sqrt{10}$$

한편,

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\text{이므로 } \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2R$$

$$\frac{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}}{\frac{5}{5}} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

$$\text{즉, } R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

정답 ①

12. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속
이므로

$$n-1 \leq x \leq n \text{ 일 때,}$$

$$f(x) = 6(x-n+1)(x-n)$$

또는

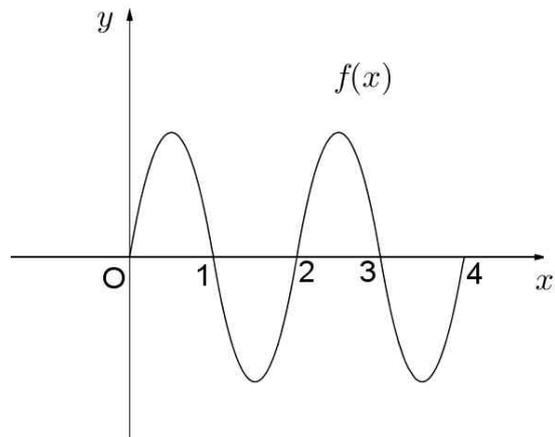
$$f(x) = -6(x-n+1)(x-n)$$

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 최솟값 0를 가지므로

$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = 0$$

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_2^4 f(t)dt$$

이때, 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 최솟값을 가져야 하므로 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ & \quad + \int_3^4 f(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ & \quad - \int_0^1 f(x)dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\}dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (6x^2 - 6x)dx \\ &= [2x^3 - 3x^2]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

13. 출제의도 : 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

m^{12} 의 n 제곱근은 x 에 대한 방정식

$$x^n = m^{12} \quad \text{-----} \textcircled{7}$$

의 근이다.

이때, m 의 값에 따라 $\textcircled{7}$ 의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $m=2$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 의 방정식은

$$x^n = 2^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$$2, 3, 4, 6, 12$$

이므로

$$f(2) = 5$$

(ii) $m=3$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 의 방정식은

$$x^n = 3^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$$2, 3, 4, 6, 12$$

이므로

$$f(3) = 5$$

(iii) $m=4$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 의 방정식은

$$x^n = 4^{12}$$

즉,

$$x^n = 2^{24}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

이므로

$$f(4) = 7$$

(iv) $m=5$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 의 방정식은

$$x^n = 5^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$$2, 3, 4, 6, 12$$

이므로

$$f(5) = 5$$

(v) $m=6$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 의 방정식은

$$x^n = 6^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$$2, 3, 4, 6, 12$$

이므로

$$f(6) = 5$$

(vi) $m=7$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 의 방정식은

$$x^n = 7^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$$2, 3, 4, 6, 12$$

이므로

$$f(7) = 5$$

(vii) $m=8$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 의 방정식은

$$x^n = 8^{12}$$

즉,

$$x^n = 2^{36}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$$2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

이므로

$$f(8) = 8$$

(viii) $m=9$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 의 방정식은

$$x^n = 9^{12}$$

즉,

$$x^n = 3^{24}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

이므로

$$f(9) = 7$$

따라서,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=2}^9 f(m) \\ &= f(2) + f(3) + \dots + f(9) \\ &= 5 + 5 + 7 + 5 + 5 + 5 + 8 + 7 \\ &= 5 \times 5 + 7 \times 2 + 8 \\ &= 47 \end{aligned}$$

정답 ③

14. 출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

$x > 1$ 에서 $g(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned} h(1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} g(1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2^+} g(1+t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2^+} (1+t) \\ &= 1 \times 3 \\ &= 3 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄴ.

$$h(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2^+} g(x+t)$$

이므로

$$x < -3 \text{ 일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

$$x = -3 \text{ 일 때 } h(-3) = -3 \times f(-1)$$

$-3 < x < -1$ 일 때

$$h(x) = x \times f(x+2)$$

$$x = -1 \text{ 일 때 } h(-1) = f(-1) \times 1$$

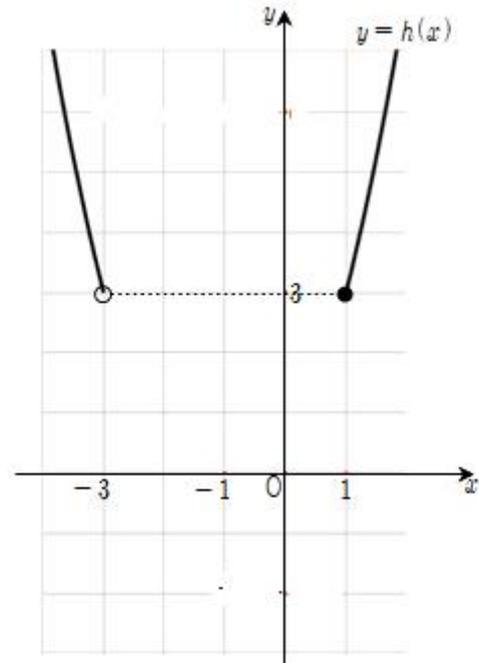
$-1 < x < 1$ 일 때

$$h(x) = f(x) \times (x+2)$$

$$x = 1 \text{ 일 때 } h(1) = 1 \times 3$$

$$x > 1 \text{ 일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

즉, $x < -3$ 또는 $x \geq 1$ 일 때, 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

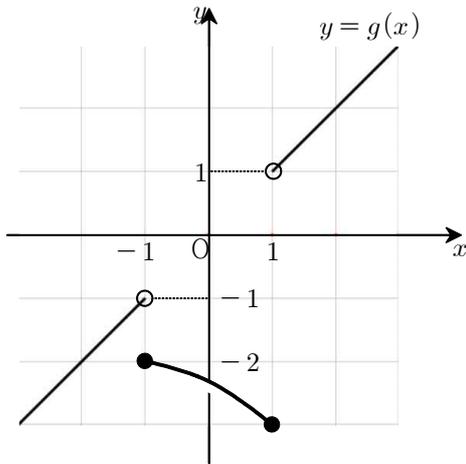


$f(-3) \neq 3$ 이면 함수 $h(x)$ 는 $x = -3$ 에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ.

함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하고 $g(-1) = -2$ 일 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$$h(-3) = -3 \times f(-1) = -3 \times (-2) = 6$$

$$h(-1) = f(-1) \times 1 = -2 \times 1 = -2$$

이다.

$$-3 < x < -1 \text{에서 } h(x) > 0$$

또 $-1 < x < 1$ 에서

$$h(x) = f(x) \times (x+2) \text{이므로}$$

$$h'(x) = f'(x) \times (x+2) + f(x)$$

$$f'(x) < 0, x+2 > 0, f(x) < 0 \text{이므로}$$

$$h'(x) < 0$$

즉, $-1 < x < 1$ 에서 함수 $h(x)$ 는 감소하고, $f(1) = 3$ 이므로

함수 $h(x)$ 는 최솟값을 갖지 않는다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답 ①

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$f(x) = 2$ 라 하자.

$$-3 < x < -1 \text{일 때, } h(x) = x \times 2 = 2x$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(x) = 2 \times 1 = 2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때, } h(x) = 2(x+2)$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 2(x+2) = 2$$

$$h(-1) = 2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$$

이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$f(x) = -x - 3$ 이라 하자.

$$x < -3 \text{일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$x = -3 \text{일 때, } h(x) = -3 \times (-2) = 6$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때,}$$

$$h(x) = x \times \{-(x+2) - 3\} = -x(x+5)$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(-1) = -2 \times 1 = -2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때,}$$

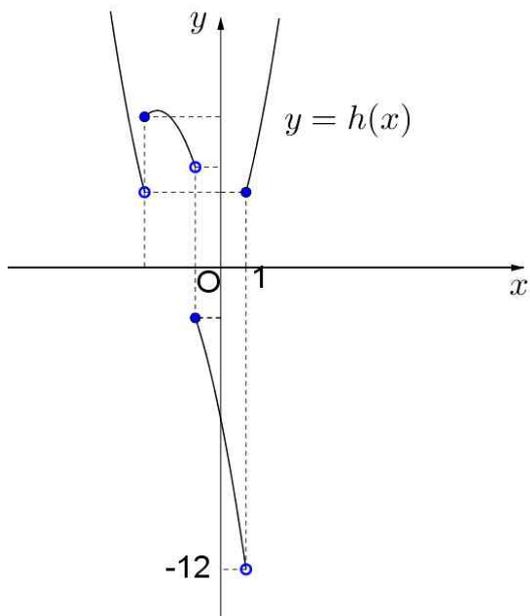
$$h(x) = (-x - 3) \times (x+2) = -(x+3)(x+2)$$

$$x = 1 \text{일 때, } h(x) = 1 \times 3 = 3$$

$$x > 1 \text{일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -12, h(1) = 3 \text{이므로}$$

함수 $h(x)$ 의 최솟값은 없다. (거짓)



15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 a_9 의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) a_6 이 3의 배수인 경우

$$a_7 = 40 \text{이므로}$$

$$\frac{a_6}{3} = a_7$$

$$a_6 = 3a_7 = 3 \times 40 = 120$$

$a_7 = 40$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_8 = a_6 + a_7 = 120 + 40 = 160$$

$a_8 = 160$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 160 = 200$$

(ii) $a_6 = 3k - 2$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_7 - a_6 \\ &= 40 - (3k - 2) \\ &= 42 - 3k \\ &= 3(14 - k) \end{aligned}$$

a_5 는 자연수이므로

$$3(14 - k) > 0 \text{에서}$$

$$k < 14$$

한편, a_5 는 3의 배수이므로

$$a_6 = \frac{a_5}{3}$$

$$\text{즉, } 3k - 2 = \frac{3(14 - k)}{3} \text{에서}$$

$$4k = 16$$

$$k = 4$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 4 - 2 = 10$$

이므로

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 + a_7 \\ &= 10 + 40 \\ &= 50 \end{aligned}$$

$a_8 = 50$ 이 3의 배수가 아니므로

$$\begin{aligned} a_9 &= a_7 + a_8 \\ &= 40 + 50 \\ &= 90 \end{aligned}$$

(iii) $a_6 = 3k - 1$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_7 - a_6 \\ &= 40 - (3k - 1) \\ &= 41 - 3k \end{aligned}$$

a_5 는 자연수이므로

$$41 - 3k > 0 \text{에서}$$

$$k < \frac{41}{3} \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

한편, a_5 는 3의 배수가 아니므로

$$a_4 + a_5 = a_6 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_6 - a_5 \\ &= (3k - 1) - (41 - 3k) \\ &= 6k - 42 \\ &= 3(2k - 14) \end{aligned}$$

a_4 가 자연수이므로

$$3(2k - 14) > 0 \text{에서}$$

$$k > 7 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 에서

$$7 < k < \frac{41}{3}$$

한편, a_4 는 3의 배수이므로

$$a_5 = \frac{a_4}{3}$$

$$\text{즉, } 41 - 3k = \frac{3(2k - 14)}{3} \text{에서}$$

$$5k = 55$$

$$k = 11$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 11 - 1 = 32$$

이므로

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 + a_7 \\ &= 32 + 40 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$a_8 = 72$ 가 3의 배수이므로

$$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 a_9 의 최댓값은 $M=200$ 이고 최솟값은 $m=24$ 이다.

따라서

$$M+m = 200 + 24 = 224$$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2(3x+2) = 2 + \log_2(x-2)$$

에서

$$\log_2(3x+2) = \log_2 2^2 + \log_2(x-2)$$

$$\log_2(3x+2) = \log_2\{4 \times (x-2)\}$$

이므로

$$3x+2 = 4(x-2)$$

$$3x+2 = 4x-8$$

$$x = 10$$

정답 10

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (4x^3 - 2x) dx$$

$$= x^4 - x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

따라서

$$f(x) = x^4 - x^2 + 3 \text{이므로}$$

$$f(2) = 16 - 4 + 3 = 15$$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^5 (3a_k + 5) = 55 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^5 a_k + 25 = 55$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 10$$

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = 32 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 32$$

따라서

$$\sum_{k=1}^5 b_k = - \sum_{k=1}^5 a_k + 32$$

$$= -10 + 32$$

$$= 22$$

정답 22

19. 출제의도 : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수 k 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식

$$2x^3 - 6x^2 + k = 0 \quad \text{----} \textcircled{7}$$

에서

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + k$$

라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표이다.

한편,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 12x \\ &= 6x(x-2) \end{aligned}$$

이므로

$$f'(x) = 0$$

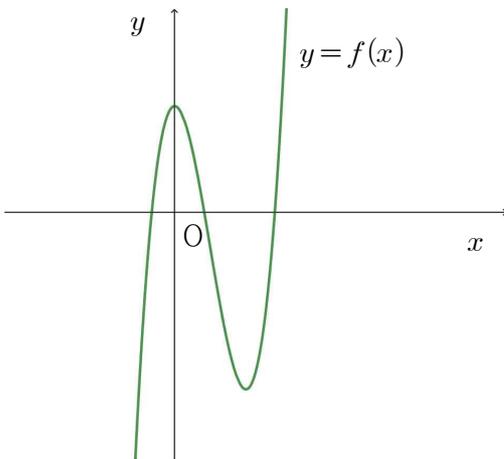
에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

그러므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	k	↘	$k-8$	↗

이때, ㉠이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 양수이어야 하고 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 음수이어야 한다.

그러므로

$$k > 0 \text{ 이고 } k-8 < 0$$

이므로

$$0 < k < 8$$

따라서, 정수 k 는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 그 개수는 7이다.

정답 7

20. 출제의도 : 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t \geq 2$ 일 때

$$v(t) = 3t^2 + 4t + C \text{ (} C \text{는 적분상수)}$$

이때 $v(2)=0$ 이므로

$$12 + 8 + C = 0 \text{에서 } C = -20$$

즉, $0 \leq t \leq 3$ 에서

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^3 |v(t)| dt \\ &= \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^3 |v(t)| dt \\ &= -\int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt \\ &= -\int_0^2 (2t^3 - 8t) dt + \int_2^3 (3t^2 + 4t - 20) dt \\ &= -\left[\frac{1}{2}t^4 - 4t^2\right]_0^2 + [t^3 + 2t^2 - 20t]_2^3 \\ &= -(-8) + 9 \\ &= 17 \end{aligned}$$

정답 17

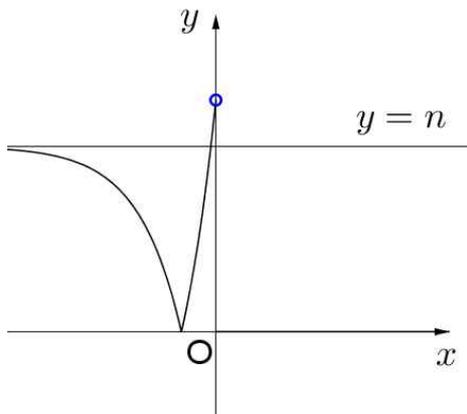
21. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

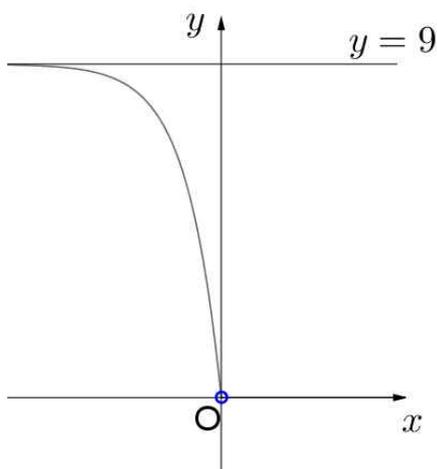
함수 $y = 3^{x+2} - n$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |9-n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $y = n$ 이다.

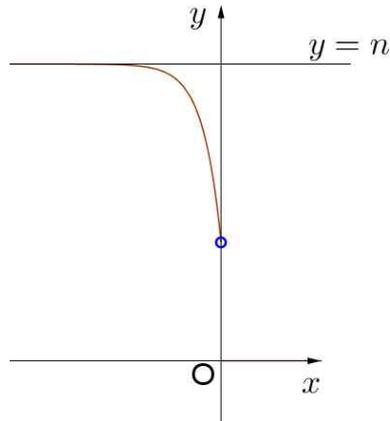
$x < 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.
 $1 \leq n < 9$ 일 때,



$n = 9$ 일 때,



$n > 9$ 일 때,

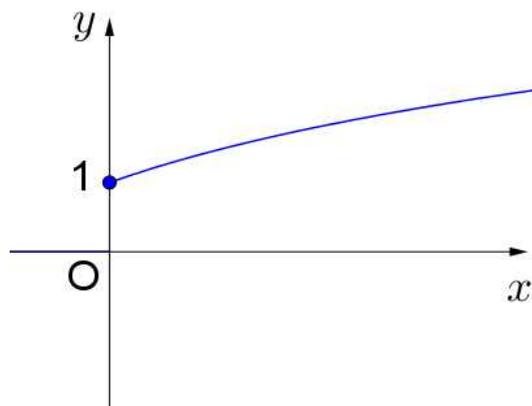


또, 함수 $y = \log_2(x+4) - n$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

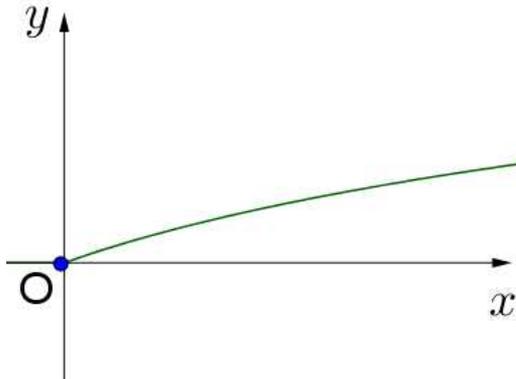
함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |2-n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $x = -4$ 이다.

$x \geq 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

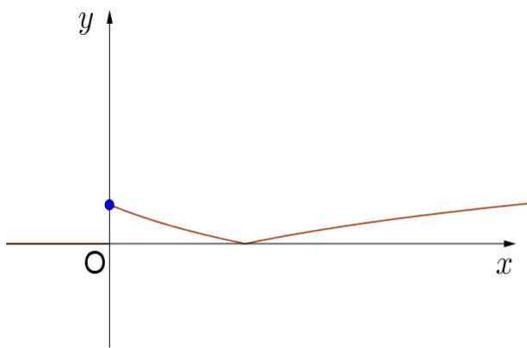
$n = 1$ 일 때,



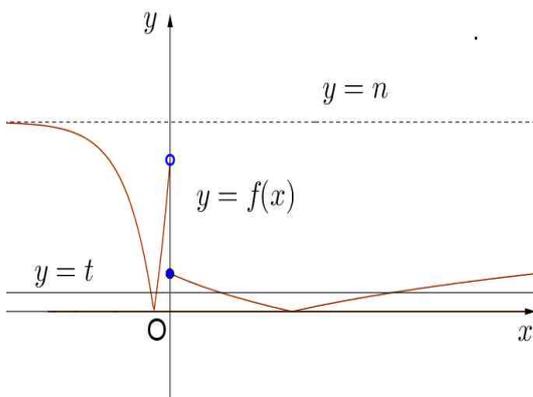
$n = 2$ 일 때,



$n > 2$ 일 때,



x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$ 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4이므로 $9 - n > 0$ 이고 $2 - n < 0$ 이어야 한다. 즉, $2 < n < 9$ 이다.

따라서 자연수 n 의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 합은

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$$

이다.

정답 33

22. 출제의도 : 미분계수의 정의와 연속성을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (다)에서 $f(0) = -3$ 이므로 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$$

한편, 조건 (가)에서

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x \neq 1$ 일 때,

$$f'(g(x)) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \frac{(x^3 + ax^2 + bx - 3) - (a + b - 2)}{x - 1}$$

$$= \frac{(x^3 - 1) + a(x^2 - 1) + b(x - 1)}{x - 1}$$

$$= (x^2 + x + 1) + a(x + 1) + b$$

$$= x^2 + (a+1)x + a + b + 1 \quad \text{----} \textcircled{\ominus}$$

조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 최솟값 $\frac{5}{2}$ 를

가지므로 이 값을 갖는 x 의 값을 α 라 하자. 이때, $f'(x)$ 는 이차함수이고 $\textcircled{\ominus}$ 의 우변의 이차함수의 그래프가 대칭이므로 $g(x)$ 도 $x = \alpha$ 에 대하여 대칭이어야 한다. 이때, 함수 $y = f'(g(x))$ 의 그래프는 $x = \alpha$ 에 대하여 대칭이다.

한편, $\textcircled{\ominus}$ 의 우변의 함수

$$y = x^2 + (a+1)x + a + b + 1$$

의 그래프는 직선

$$x = -\frac{a+1}{2}$$

에 대하여 대칭이다.

그러므로

$$\alpha = -\frac{a+1}{2}$$

한편, ㉠의 식에 $x = \alpha$ 를 대입하면

$$f'(g(\alpha)) = \alpha^2 + (a+1)\alpha + a + b + 1$$

이때, $g(\alpha) = \frac{5}{2}$ 이므로 대입하면

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = \alpha^2 + (a+1)\alpha + a + b + 1$$

한편, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이므로

$$\frac{75}{4} + 5a + b = \alpha^2 + (a+1)\alpha + a + b + 1$$

즉,

$$\frac{75}{4} + 5a = \alpha^2 + (a+1)\alpha + a + 1$$

이때, $\alpha = -\frac{a+1}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{75}{4} + 5a = \frac{(a+1)^2}{4} - \frac{(a+1)^2}{2} + a + 1$$

$$\frac{75}{4} + 5a = -\frac{(a+1)^2}{4} + a + 1$$

$$75 + 20a = -(a^2 + 2a + 1) + (4a + 4)$$

$$a^2 + 18a + 72 = 0$$

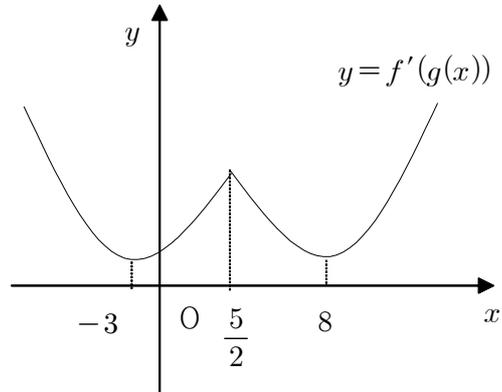
$$(a+6)(a+12) = 0$$

$$a = -6 \text{ 또는 } a = -12$$

한편, $a = -12$ 일 때,

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + b$$

이고 이 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 8$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y = f'(g(x))$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



즉, 함수 $y = f'(g(x))$ 의 그래프의 개형은 이차함수의 그래프의 개형이 아니다.

그러므로

$$a = -6 \text{이고 } \alpha = \frac{5}{2}$$

이어야 한다.

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + bx - 3 \quad \text{----} \text{㉠}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + b \quad \text{----} \text{㉡}$$

한편, ㉠에서 $f'(x)$ 와 $g(x)$ 가 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$f'(g(1)) = f'(1)$$

이때, $g(1) = k$ 라 하면 ㉡으로 부터

$$3k^2 - 12k + b = -9 + b$$

$$3k^2 - 12k + 9 = 0$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k-1)(k-3) = 0$$

$$k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

즉,

$$g(1) = 1 \text{ 또는 } g(1) = 3$$

이때, $g(1) = 1$ 은 $g(x)$ 가 최솟값 $\frac{5}{2}$ 를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$$g(1) = 3$$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1)) = 6$ 이므로

$$f(3) = 6$$

이때, ㉠에 대입하면

$$27 - 54 + 3b = 9$$

$$3b = 36$$

$$b = 12$$

따라서,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

이므로

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

정답 13

■ [선택: 확률과 통계]

23. ③ 24. ② 25. ⑤ 26. ③ 27. ②
28. ④ 29. 49 30. 100

23. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다항식 $(x^3 + 3)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (x^3)^{5-r} 3^r = {}_5C_r 3^r x^{15-3r}$$

$$(r=0, 1, 2, \dots, 5)$$

이므로 x^9 항은

$$15 - 3r = 9,$$

즉

$$r = 2$$

일 때이다.

따라서 x^9 의 계수는

$${}_5C_2 \times 3^2 = 10 \times 9$$

$$= 90$$

정답 ③

24. 출제의도 : 중복순열과 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

네 자리의 자연수가 4000 이상인 홀수이려면

천의 자리의 수는 4, 5 중의 하나이고,

일의 자리의 수는 1, 3, 5 중의 하나이며,

십의 자리와 백의 자리의 수는 각각 1, 2, 3, 4, 5 중의 하나이어야 한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_1 \times {}_3\Pi_1 \times {}_5\Pi_2 = 2 \times 3 \times 25$$

$$= 150$$

정답 ②

25. 출제의도 : 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

14개의 마스크 중에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크가 모두 검은색일 확률은

$$\frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3} = \frac{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times 1}}$$

$$= \frac{3}{13}$$

따라서 여사건의 확률에 의하여 구하는 확률은

$$1 - \frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3} = 1 - \frac{3}{13}$$

$$= \frac{10}{13}$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) A는 흰 공 1개와 검은 공 2개가 나오는 사건이므로

$$P(A) = \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_2}{{}_6C_3}$$

$$= \frac{2 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1}}{6 \times 5 \times 4}$$

$$= \frac{12}{20}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3}{5}$$

(ii) B 는 2가 적혀 있는 공이 3개 나오는 사건이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{{}_4C_3}{{}_6C_3} \\ &= \frac{4}{20} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(iii) $A \cap B$ 는 2가 적혀 있는 흰 공 1개와 2가 적혀 있는 검은 공 2개가 나오는 사건이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{{}_1C_1 \times {}_3C_2}{{}_6C_3} \\ &= \frac{1 \times 3}{20} \\ &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량을 X (mL)라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다.

표본의 크기가 16일 때의 표본평균을 \bar{x}_1 이라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이므로

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 755.9 - 746.1$$

즉,

$$0.98\sigma = 9.8$$

따라서

$$\sigma = 10$$

이다.

표본의 크기가 n 일 때의 표본평균을 \bar{x}_2 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{51.6}{\sqrt{n}}$$

이때 $\frac{51.6}{\sqrt{n}} \leq 6$, 즉

$$\sqrt{n} \geq \frac{51.6}{6} = 8.6$$

이어야 하므로

$$n \geq 8.6^2 = 73.96$$

이다.

따라서 자연수 n 의 최솟값은 74이다.

정답 ②

28. 출제의도 : 연속확률변수의 확률밀도함수의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$P(0 \leq X \leq a) = 1$ 이므로 확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프로부터

$$\frac{1}{2}ac = 1, \text{ 즉 } ac = 2$$

한편,

$$P(0 \leq X \leq a) = P(X \leq b) + P(X \geq b) = 1$$

이고

$$P(X \leq b) - P(X \geq b) = \frac{1}{4}$$

이므로

$$P(X \leq b) = \frac{5}{8} \text{ 이고 } P(X \geq b) = \frac{3}{8}$$

이다.

따라서 확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프로부터

$$\frac{1}{2} \times b \times c = \frac{5}{8}$$

이다.

한편,

$$P(X \leq b) > \frac{1}{2}$$

이므로

$$0 < \sqrt{5} < b$$

이다.

이때 두 점 $(0,0)$, (b,c) 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{c}{b}x$$

이므로 $P(X \leq \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \left(\frac{c}{b} \times \sqrt{5}\right) &= \frac{5c}{2b} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉,

$$b = 5c$$

이다.

이때 $bc = 5c^2 = \frac{5}{4}$ 이므로

$$c = \frac{1}{2} (\because c > 0)$$

따라서 $b = \frac{5}{2}$, $a = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 사건을 A , 주사위의 1의 눈이 한 번만 나오는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

(i) 사건 A 가 일어날 확률

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 보이는 카드의 개수가 0 또는 2이어야 하므로 주사위를 3번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수가 3 또는 1이어야 한다.

이때 독립시행의 확률에 의하여 홀수의 눈이 3번 나올 확률은

$$\begin{aligned} {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= 1 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

홀수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{8} \dots \textcircled{C}$$

⑦, ⑧의 두 사건은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \\ = \frac{1}{2}$$

(ii) 사건 $A \cap B$ 가 일어날 확률

⑦에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 3 또는 5의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2C_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{9} \\ = \frac{1}{18}$$

⑧에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 짝수의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{4} \\ = \frac{1}{8}$$

따라서

$$P(A \cap B) = \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{13}{72}$$

(i), (ii)에서 구하는 조건부확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ = \frac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{36}$$

이므로

$$p+q = 36 + 13 \\ = 49$$

정답 49

30. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$$f(1) = 1, f(10) = 10$$

이다.

(i) $f(5) = 1, f(6) = 7$ 인 경우

$f(5) = 1$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$ 는 $(1, 1, 1)$

의 1개가 존재한다.

$f(6) = 7$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를

만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$ 는 $(7, 8, 9), (7, 8, 10), (7, 9, 9), (7, 9, 10), (7, 10, 10),$

$(8, 8, 9), (8, 8, 10), (8, 9, 9), (8, 9, 10),$

$(8, 10, 10),$

$(9, 9, 9), (9, 9, 10), (9, 10, 10),$

$(10, 10, 10)$

의 14개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f 의 개수는

$$1 \times 14 = 14$$

이다.

(ii) $f(5) = 2, f(6) = 8$ 인 경우

$f(5) = 2$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$ 는

$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 2)$

의 4 ($= {}_2H_3 = {}_4C_3$)개가 존재한다.

$f(6) = 8$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를

만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$ 는

$(8, 8, 9), (8, 8, 10),$

(8,9,9), (8,9,10), (8,10,10),
 (9,9,9), (9,9,10), (9,10,10), (10,10,10)
 의 9개가 존재한다.
 따라서 이 경우의 함수 f 의 개수는
 $4 \times 9 = 36$
 이다.

(iii) $f(5) = 3, f(6) = 9$ 인 경우
 $f(5) = 3$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를
 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$ 는
 (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3),
 (1,2,2), (1,2,3), (1,3,3),
 (2,2,2), (2,2,3), (2,3,3)
 의 9개가 존재한다.
 $f(6) = 9$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를
 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$ 는
 (9,9,9), (9,9,10), (9,10,10), (10,10,10)
 의 4 ($= {}_2H_3 = {}_4C_3$)개가 존재한다.
 따라서 이 경우의 함수 f 의 개수는
 $9 \times 4 = 36$
 이다.

(iv) $f(5) = 4, f(6) = 10$ 인 경우
 $f(5) = 4$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를
 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$ 는
 (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4),
 (1,2,2), (1,2,3), (1,2,4),
 (1,3,3), (1,3,4),
 (2,2,2), (2,2,3), (2,2,4),
 (2,3,3), (2,3,4)
 의 14개가 존재한다.
 $f(6) = 10$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를
 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$ 는
 (10,10,10)
 의 1개가 존재한다.
 따라서 이 경우의 함수 f 의 개수는
 $14 \times 1 = 14$

이다.
 (i), (ii), (iii), (iv)에서 구하는 함수 f
 의 개수는
 $14 + 36 + 36 + 14 = 100$

정답 100

[다른 풀이]
 조건 (나)에서
 $f(1) = 1, f(10) = 10$
 이다.

(i) $f(5) = 1, f(6) = 7$ 인 경우
 $f(5) = 1$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를
 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$ 는
 (1,1,1)
 의 1개가 존재한다.
 $f(6) = 7$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를
 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$ 의 개
 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} f(9) = 9 \text{일 때} \\ {}_3H_2 - 1 = {}_4C_2 - 1 \\ = 6 - 1 \\ = 5 \end{aligned}$$

($f(7) = f(8) = 7$ 인 경우를 제외함)

$$\begin{aligned} \textcircled{2} f(9) = 10 \text{일 때} \\ {}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 \\ = 10 - 1 \\ = 9 \end{aligned}$$

($f(7) = f(8) = 7$ 인 경우를 제외함)
 따라서 이 경우의 함수 f 의 개수는
 $5 + 9 = 14$
 이다.

(ii) $f(5) = 2, f(6) = 8$ 인 경우
 $\textcircled{1} f(5) = 2$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)
 를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$ 의

개수는

$$\begin{aligned} {}_2H_3 &= {}_4C_3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

② $f(6)=8$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$ 의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_3 - 1 &= {}_5C_3 - 1 \\ &= 10 - 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

($f(7)=f(8)=f(9)=8$ 인 경우를 제외함)
따라서 이 경우의 함수 f 의 개수는
 $4 \times 9 = 36$
이다.

(iii) 조건 (나)와 조건 (다)에서 함수 f 의
 $1 \leq x \leq 5$ 일 때의 규칙성과
 $6 \leq x \leq 10$ 일 때의 규칙성이 서로 대칭
적이므로

$f(5)=3, f(6)=9$ 인 함수 f 의 개수는
(ii)의 함수의 개수와 같고,
 $f(5)=4, f(6)=10$ 인 함수 f 의 개수는
(i)의 함수의 개수와 같음을 추론할 수
있다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개
수는
 $2 \times (14 + 36) = 2 \times 50 = 100$
이다.

■ [선택: 미적분]

23. ④ 24. ③ 25. ⑤ 26. ④ 27. ②
28. ② 29. 26 30. 31

23. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \ln(x+1) \times \frac{1}{\sqrt{x+4}-2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \right. \\ & \quad \left. \times \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \times (\sqrt{x+4}+2) \right\} \\ &= 1 \times (2+2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

24. 출제의도 : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{3k}{n}} \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+3x} dx \\ &= \left[\frac{2}{9} (1+3x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{9} (8-1) \end{aligned}$$

$$= \frac{14}{9}$$

정답 ③

25. 출제의도 : 등비수열이 포함된 식의 극한값을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_n = ar^{n-1}$ 이다.

이때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \times \frac{r^{n-1}}{4^n} + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}}$$

이고 극한값이 존재하므로

$$r=4$$

따라서,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{a}{4} + 0}{0 + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{a}{2} = 3$$

에서 $a=6$ 이므로

$$a_2 = 6 \times 4 = 24$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $x=t$ 를 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면 $S(t) = (\sqrt{\sec^2 t + \tan t})^2 = \sec^2 t + \tan t$ 이므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t + \tan t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec^2 x + \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \sec^2 x - \frac{(\cos x)'}{\cos x} \right\} dx \\ &= [\tan x - \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \tan \frac{\pi}{3} - \ln \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \sqrt{3} - \ln \frac{1}{2} = \sqrt{3} + \ln 2 \end{aligned}$$

정답 ④

27. 출제의도 : 무한히 반복되는 도형에서 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{OC_1} = 3t$, $\overline{OD_1} = 4t$ ($t > 0$)라 하면

$\overline{OP_1} = 5t$ 이므로

$$5t = 1 \text{ 에서 } t = \frac{1}{5}$$

따라서, $\overline{OC_1} = \frac{3}{5}$ 에서 $\overline{A_1C_1} = \frac{2}{5}$ 이고

$$\overline{C_1P_1} = \overline{OD_1} = \frac{4}{5}$$

이므로

$$\overline{A_1P_1} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이때 삼각형 $P_1Q_1A_1$ 은 직각이등변삼각형 이므로

$$\overline{A_1Q_1} = \overline{P_1Q_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

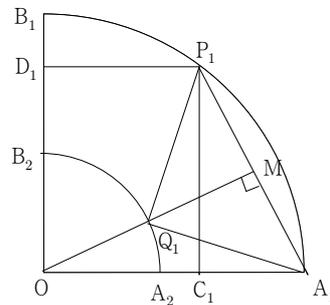
따라서

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{1}{5}$$

또한, 선분 A_1P_1 의 중점을 M이라 하면

$$\overline{A_1P_1} \perp \overline{Q_1M}, \overline{A_1P_1} \perp \overline{OM}$$

이므로 세 점 O, Q_1 , M은 한 직선 위에 있다.



이때,

$$\overline{OM} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\overline{Q_1M} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\overline{OQ_1} = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

따라서 두 도형(부채꼴) OA_1B_1 , OA_2B_2

의 닮음비는 $1 : \frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로 넓이의 비

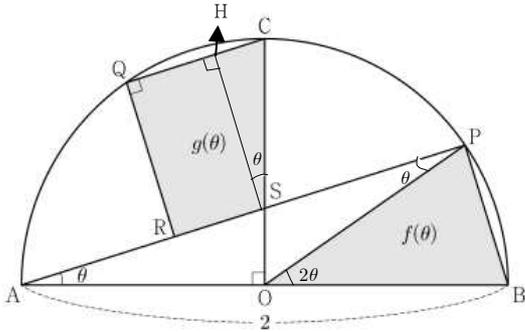
는 $1 : \frac{1}{5}$ 이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

정답 ②

28. 출제의도 : 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\angle OAP = \angle OPA = \theta$ 이므로

$\angle BOP = 2\theta$

따라서

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

또한, $\overline{OA} = 1$ 에서 $\overline{OS} = \tan \theta$ 이므로

$$\overline{CS} = 1 - \tan \theta$$

이때, $\angle BOP = \angle COQ = 2\theta$ 이고 삼각형 OCQ는 이등변삼각형이므로

$$\angle SCQ = \frac{\pi}{2} - \theta$$

또한, $\angle CSR = \theta + \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\angle QRS = \frac{\pi}{2}$$

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle CSH = \theta$$

이므로

$$\overline{SH} = \overline{RQ} = (1 - \tan \theta) \cos \theta$$

$$\overline{CH} = (1 - \tan \theta) \sin \theta$$

이고

$$\overline{CQ} = \overline{BP} = 2 \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \overline{RS} &= \overline{QH} = \overline{CQ} - \overline{CH} \\ &= 2 \sin \theta - (\sin \theta - \sin \theta \tan \theta) \end{aligned}$$

$$= \sin \theta + \sin \theta \tan \theta$$

따라서

$$g(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times (\overline{CQ} + \overline{RS}) \times \overline{QR}$$

$$= \frac{1}{2} \times (2 \sin \theta + \sin \theta + \sin \theta \tan \theta)$$

$$\times (1 - \tan \theta) \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times (3 \sin \theta + \sin \theta \tan \theta) (1 - \tan \theta) \cos \theta$$

이므로

$$3f(\theta) - 2g(\theta)$$

$$= \frac{3}{2} \sin 2\theta - (3 \sin \theta + \sin \theta \tan \theta) (1 - \tan \theta) \cos \theta$$

$$= 3 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta (3 + \tan \theta) (1 - \tan \theta)$$

$$= \sin \theta \cos \theta \tan \theta (\tan \theta + 2)$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta \cos \theta \tan \theta (\tan \theta + 2)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\tan \theta}{\theta} \times \cos \theta \times (\tan \theta + 2) \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 2$$

정답 ②

29. 출제의도 : 여러 가지 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 6}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ae^{2x} + be^x + c + 6}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(ae^x + b + \frac{c+6}{e^x} \right) = 1$$

따라서, $b = 1, c = -6$ 이므로

$$f(x) = ae^{2x} + e^x - 6$$

조건 (나)에서

$$f(\ln 2) = ae^{2\ln 2} + e^{\ln 2} - 6 = 4a + 2 - 6 = 0$$

$$a = 1$$

$$\text{즉, } f(x) = e^{2x} + e^x - 6$$

따라서,

$$f(\ln 4) = e^{2\ln 4} + e^{\ln 4} - 6 = 16 + 4 - 6 = 14$$

이므로

$$g(0) = \ln 2, g(14) = \ln 4$$

따라서, $\int_0^{14} g(x)dx$ 에서 $g(x) = t$ 로 놓으

$$\text{면 } g'(x) = \frac{dt}{dx} \text{ 이고}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(t)}$$

이므로

$$\int_0^{14} g(x)dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 4} tf'(t)dt$$

$$= [tf(t)]_{\ln 2}^{\ln 4} - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)dt$$

$$= 14\ln 4 - \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^{2t} + e^t - 6)dt$$

$$= 14\ln 4 - \left[\frac{1}{2}e^{2t} + e^t - 6t \right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$= 28\ln 2 - (8 - 6\ln 2)$$

$$= 34\ln 2 - 8$$

따라서 $p = -8, q = 34$ 이므로

$$p + q = 26$$

정답 26

30. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0, b, c, d$ 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

이므로

$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{\ominus}$$

$$f'(3) = 27a + 6b + c = 0 \cdots \textcircled{\omin�}$$

조건 (가)에서

$$h(0) = g(f(0)) = g(d) = e^{\sin \pi d} - 1 = 0$$

$$e^{\sin \pi d} = 1, \sin \pi d = 0$$

따라서, d 는 정수이다.

또한,

$$g'(x) = e^{\sin \pi x} \times \pi \cos \pi x$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

이므로

$$h'(0) = g'(f(0)) \times f'(0)$$

$$= g'(d) \times c$$

$$= e^{\sin \pi d} \times \pi \cos \pi d \times c$$

$$= \pi \cos \pi d \times c = 0$$

그런데, $\cos \pi d \neq 0$ 이므로 $c = 0$

따라서, $\textcircled{\ominus}, \textcircled{\omin�}$ 에서

$$27a + 9b + d = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{\omin�}, 9a + 2b = 0 \cdots \textcircled{\omin�}$$

이고 $a > 0$ 이므로 $b < 0$ 이고 $\textcircled{\omin�} - \textcircled{\omin�}$ 에서

$$3b + d = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } d > 0$$

즉, d 는 자연수이다.

따라서 $f'(0) = c = 0$ 이므로 함수 $f(x)$

는 $x = 0$ 에서 극댓값이 $f(0) = d, x = 3$ 에

서 극솟값이 $\frac{1}{2}$ 이다.

즉, $0 < x < 3$ 에서 $f(3) < f(x) < f(0)$

이므로

$$\frac{1}{2} < f(x) < d$$

그런데 조건 (나)에 의하여 열린구간

(0,3)에서 방정식

$$h(x) = g(f(x)) = e^{\sin \pi f(x)} - 1 = 1$$

즉, $e^{\sin \pi f(x)} = 2$, $\sin \pi f(x) = \ln 2$ 가 서로

다른 실근의 개수가 7이고 함수

$y = \sin \pi t$ 의 주기는 2이므로

$$d = 8$$

㉠, ㉡에서

$$a = \frac{5}{9}, b = -\frac{5}{2}$$

이므로

$$f(x) = \frac{5}{9}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8$$

따라서

$$f(2) = \frac{40}{9} - 10 + 8 = \frac{22}{9}$$

즉, $p = 9$, $q = 22$ 이므로

$$p + q = 31$$

정답 31

■ [선택: 기하]

23. ⑤ 24. ③ 25. ④ 26. ② 27. ①
28. ② 29. 12 30. 24

23. 출제의도 : 좌표공간의 점을 대칭이동한 점의 좌표와 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간의 점 $A(2, 2, -1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점 B 의 좌표는

$$B(2, -2, 1)$$

따라서 점 $C(-2, 1, 1)$ 에 대하여 선분 BC 의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{(-2-2)^2 + (1+2)^2 + (1-1)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

정답 ⑤

24. 출제의도 : 초점의 좌표와 준선의 방정식이 주어진 포물선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

초점이 점 $F\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ 이고 준선이 직선

$x = -\frac{1}{3}$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = \frac{4}{3}x$$

이 포물선 위에 점 $(a, 2)$ 가 있으므로

$$2^2 = \frac{4}{3} \times a$$

따라서 $a = 3$

정답 ③

[다른 풀이]

점 $(a, 2)$ 가 초점이 점 $F\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ 이고 준

선이 직선 $x = -\frac{1}{3}$ 인 포물선 위에 있으

므로 $A(a, 2)$ 라 하면 선분 AF 의 길이와

점 A 에서 직선 $x = -\frac{1}{3}$ 까지의 거리가

같다. 즉,

$$\sqrt{\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + (2-0)^2} = \left|a - \left(-\frac{1}{3}\right)\right|$$

$$\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + 4 = \left(a + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} + 4 = a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}$$

$$\frac{4}{3}a = 4$$

따라서 $a = 3$

25. 출제의도 : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 타원의 방정식에서 두 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $(2, 1)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위에 있으

므로

$$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의

접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$$

즉,

$$y = -\frac{2b^2}{a^2}x + b^2$$

이고, 주어진 조건에 의하여 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$-\frac{2b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 = 4b^2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

$$b^2 = 2$$

$$a^2 = 8$$

그러므로 주어진 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

타원의 두 초점을 각각 $F(c, 0)$, $F(c', 0)$ ($c > 0$)이라 하면

$$c^2 = 8 - 2 = 6$$

이므로

$$c = \sqrt{6}$$

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는

$$\overline{FF'} = 2\sqrt{6}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 위치벡터의 성분과 벡터의 내적, 벡터의 연산을 이용하여 좌표평면 위의 위치벡터의 종점이 그리는 도형의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{p} = (x, y)$, $\vec{q} = (x', y')$ 이라 하고

$A(2, 4)$, $B(2, 8)$, $C(1, 0)$, $P(x, y)$,

$Q(x', y')$ 이라 하자.

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

이므로

$$\overline{AP} \perp \overline{PB}$$

이다. 그러므로 점 P는 선분 AB을 지름

으로 하는 원 위를 움직인다. 즉, 점 P는 선분 AB의 중점인 점 $M(2, 6)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

한편,

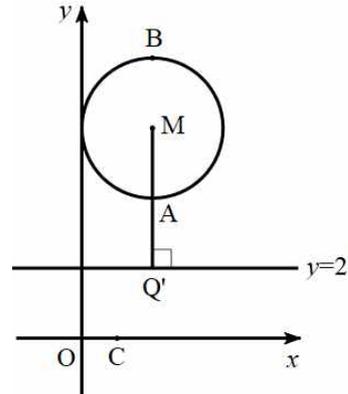
$$\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} + t\vec{c}$$

$$= \frac{1}{2}(2, 4) + t(1, 0)$$

$$= (1+t, 2)$$

이므로 점 Q는 직선 $y=2$ 위에 있다.

이때 $|\vec{p} - \vec{q}|$ 의 값은 두 점 P, Q 사이의 거리와 같고 다음 그림과 같이 점 M에서 직선 $y=2$ 에 내린 수선의 발을 Q'이라 하면 점 P가 점 A에 있고, 점 Q가 점 Q'에 있을 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 된다.



이때 $A(2, 4)$, $Q'(2, 2)$ 이므로

$$|\vec{p} - \vec{q}| = \overline{PQ} \geq \overline{AQ'} = 2$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

정답 ②

[참고]

$\vec{p} = (x, y)$ 라 하고 $A(2, 4)$, $B(2, 8)$,

$P(x, y)$ 라 하면

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

에서

$$(x-2, y-4) \cdot (x-2, y-8) = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-4)(y-8) = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$$

이므로 점 P는 중심이 (2, 6)이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

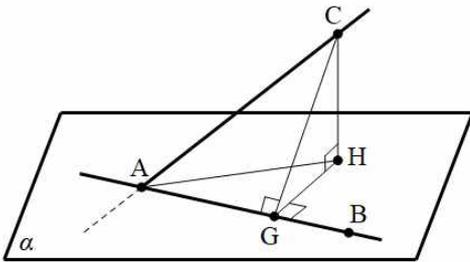
27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기, 직선과 평면이 이루는 각의 크기, 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 G, 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HG} \perp \overline{AB}$$

이다.



직각삼각형 AGC에서 $\angle CAG = \theta_1$ 이고,

$$\sin \theta_1 = \frac{4}{5} \text{ 이므로 양수 } k \text{ 에 대하여}$$

$$\overline{AC} = 5k \text{ 라 하면 } \overline{CG} = 4k \text{ 이고,}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{3}{5} \text{ 이다.}$$

또, 직각삼각형 AHC에서

$$\angle CAH = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \overline{AC} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) \\ &= 5k \times \cos \theta_1 \end{aligned}$$

$$= 5k \times \frac{3}{5} = 3k$$

이때 직각삼각형 CGH에서

$$\begin{aligned} \overline{GH} &= \sqrt{\overline{CG}^2 - \overline{CH}^2} \\ &= \sqrt{(4k)^2 - (3k)^2} \\ &= \sqrt{7}k \end{aligned}$$

이고, $\angle CGH = \theta_2$ 이므로

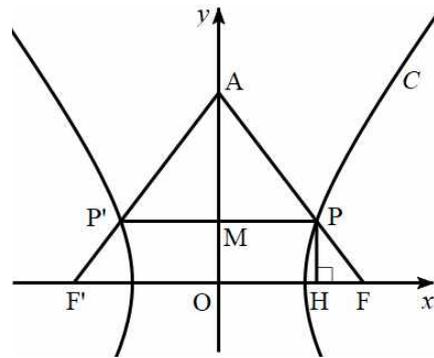
$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{\overline{GH}}{\overline{CG}} \\ &= \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구하고, 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PP'이 y축과 만나는 점을 M이라 하자.



$\overline{AP} : \overline{PP'} = 5 : 6$ 이고 점 M은 선분 PP'의 중점이므로

$$\overline{AP} : \overline{MP} = 5 : 3$$

이고, 직각삼각형 AMP에서

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MP}} = \frac{4}{3}$$

즉, 직선 AF의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이고 직선

AF'의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이므로 쌍곡선 C의

두 점근선의 기울기는 $\pm\frac{4}{3}$ 이다.

쌍곡선 C의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

으로 놓으면

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

이므로

$$a = 3k, b = 4k \quad (\text{단, } k > 0)$$

이라 하면 쌍곡선 C의 방정식은

$$\frac{x^2}{9k^2} - \frac{y^2}{16k^2} = 1 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

이다.

이때 점 F의 x좌표는

$$\sqrt{9k^2 + 16k^2} = \sqrt{25k^2} = 5k$$

이고, 직각삼각형 PHF에서 $\overline{PF} = 1$ 이므로

$$\overline{HF} = \frac{3}{5}, \overline{PH} = \frac{4}{5}$$

이다.

즉, 점 P의 좌표는

$$P\left(5k - \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

이고 이 점이 쌍곡선 C 위에 있으므로

⑦에 대입하면

$$\frac{\left(5k - \frac{3}{5}\right)^2}{9k^2} - \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{16k^2} = 1$$

$$25k^2 - 6k + \frac{9}{25} - \frac{9}{25} = 9k^2$$

$$16k^2 - 6k = 0$$

$$2k(8k - 3) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = \frac{3}{8}$$

따라서 구하는 쌍곡선 C의 주축의 길이는

$$2a = 2 \times 3k = 6k = 6 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{4}$$

정답 ②

29. 출제의도 : 벡터의 연산과 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 점의 위치를 찾고, 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{2BP} &= \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

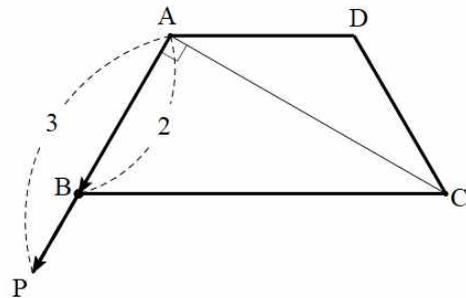
이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

따라서 점 P는 선분 BA를 1:3으로 외분하는 점이고,

$$\overline{AP} = \frac{3}{2}\overline{AB} = 3$$

이다.



한편, $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 4, \angle CBA = \frac{\pi}{3}$ 이므로

로 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}, \overline{AC} = 2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발이 A이다.

점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = 6$$

이어야 하므로 점 H는 선분 AC 위에 있고

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AH}| = 2\sqrt{3} \times \overrightarrow{AH} = 6$$

즉,

$$\overrightarrow{AH} = \sqrt{3}$$

이다.

따라서 점 H는 선분 AC의 중점이므로 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선인 직선 DH 위에 있다.

이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$$

이므로

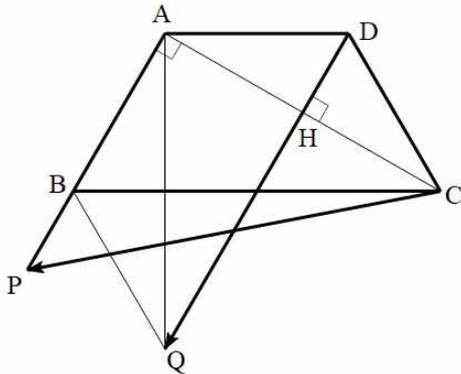
$$2 \times \angle BQA = \angle PBQ$$

를 만족시키려면

$$\angle BAQ = \angle BQA,$$

즉, $\overline{AB} = \overline{BQ}$ 이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 Q는 다음 그림과 같이 점 A를 지나고 직선 BC에 수직인 직선이 직선 DH와 만나는 점이어야 한다.



이때 직각삼각형 AQD에서

$$\overline{AD} = 2, \overline{AQ} = 2\sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{DQ} = \sqrt{4+12} = 4$$

따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{DQ}| \cos \frac{\pi}{2} + |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{DQ}| \cos 0 \\ &= 0 + 3 \times 4 \times 1 \\ &= 12 \end{aligned}$$

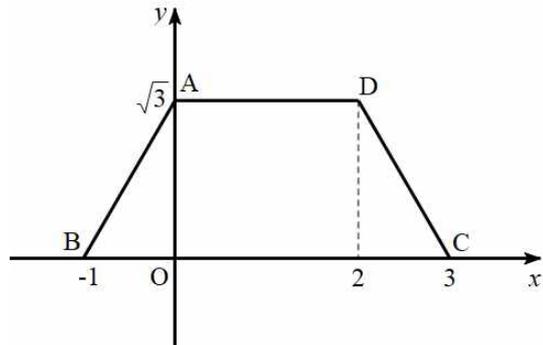
정답 12

[다른 풀이]

다음 그림과 같이 네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각

$$A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(3, 0), D(2, \sqrt{3})$$

이 되도록 좌표평면을 설정하자.



점 P의 좌표를 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$$

에서

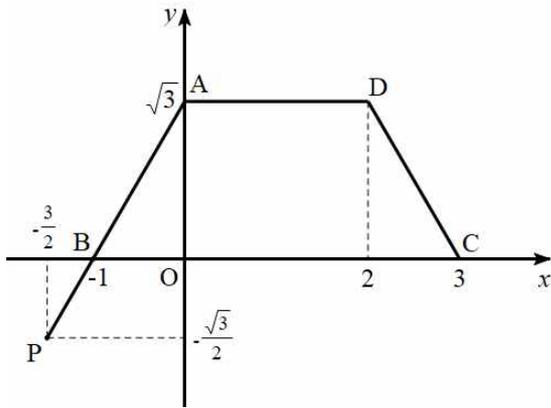
$$(3, -\sqrt{3}) = 2\{(2, 0) + (a+1, b)\}$$

$$3 = 2(a+3) \text{에서 } a = -\frac{3}{2}$$

$$-\sqrt{3} = 2b \text{에서 } b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로 다음 그림과

같이 세 점 A, B, P는 한 직선 위에 있고 $\overline{BP} = 1$ 이다.



또, 점 Q의 좌표를 $Q(x, y)$ 라 하면
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$

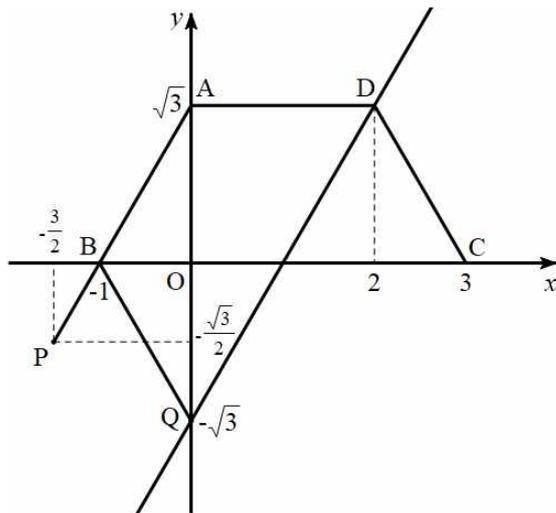
에서

$$(3, -\sqrt{3}) \cdot \left(x + \frac{3}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6$$

$$3x + \frac{9}{2} - \sqrt{3}y - \frac{3}{2} = 6$$

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

이므로 점 Q는 직선 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ 위에 있다.



이때 삼각형 ABQ에서
 $\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$
 이므로
 $2 \times \angle BQA = \angle PBQ$
 를 만족시키려면
 $\angle BAQ = \angle BQA$,
 즉 $\overline{AB} = \overline{BQ}$ 이어야 한다.

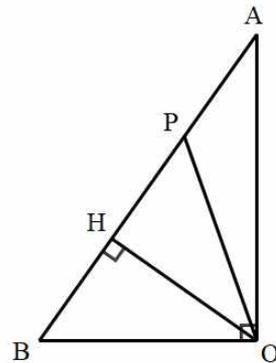
따라서 조건을 만족시키는 점 Q의 좌표는 $Q(0, -\sqrt{3})$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= \left(-\frac{9}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (-2, -2\sqrt{3}) \\ &= 9 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

30. 출제의도 : 공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구 S의 중심, 즉 삼각형 BCD의 외심을 O라 하면 직각삼각형 ABO에서 $\overline{AB} = 6\sqrt{3}$, $\overline{BO} = 6$, $\overline{AO} = 6\sqrt{2}$ 이다.



이때 점 P가 구 S 위에 있으므로

$$\overline{OP} = 6$$

즉, 삼각형 OBP가 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 BP의 중점이다.

한편, $\triangle ABO \sim \triangle OBH$ 이므로

$$6 : 6\sqrt{3} = \overline{BH} : 6$$

에서

$$\overline{BH} = 2\sqrt{3}$$

따라서

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{AB} - 2 \times \overline{BH} \\
 &= 6\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} \\
 &= 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

이므로 삼각형 PQR는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다.

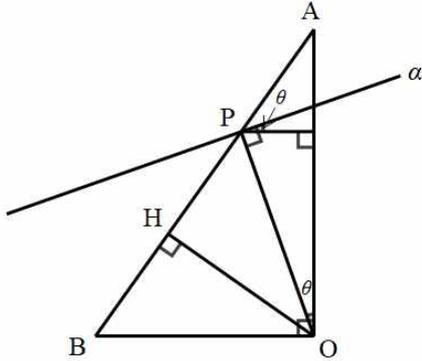
즉, 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

한편, 다음 그림과 같이 평면 α 와 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle AOP = \theta$$

이다.



이때 직각삼각형 OBG에서

$$\sin(\angle BOH) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos(\angle BOH) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

이고, $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\angle BOH$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \cos\theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\angle BOH\right) \\
 &= \sin(2\angle BOH) \\
 &= 2\sin(\angle BOH)\cos(\angle BOH) \\
 &= 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$k = 3\sqrt{3} \times \cos\theta$$

$$= 3\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

이므로

$$k^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24$$

정답 24