정답 및 해설

수학 영역

수학 정답

1	④	2	④	3	⑤	4	③	5	⑤
6	④	7	①	8	②	9	①	10	③
11	②	12	①	13	③	14	②	15	③
16	⑤	17	②	18	⑤	19	③	20	②
21	④	22	5	23	82	24	100	25	221
26	9	27	4	28	513	29	36	30	28

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$3^{-2}\times 9^{\frac{3}{2}}=3^{-2}\times(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^{-2}\times 3^3=3^{-2+3}=3$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 48-\log_2 3=\log_2\frac{48}{3}=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$

3. [출제의도] 삼각함수의 주기 계산하기

함수 $y=\cos ax$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$ 이므로

함수 $y=\cos\frac{x}{3}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$

4. [출제의도] 등비중항 계산하기

등비중항의 성질에 의하여 $a_4\times a_6={a_5}^2=64$

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 양수이므로 $a_5=8$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=2+1=3$

6. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

$\cos\theta\times\tan\theta=\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=\frac{3}{5}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 일 때, $\cos\theta>0$ 이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$

7. [출제의도] 등차수열의 성질 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a_3+a_6=(a+2d)+(a+5d)=2a+7d=25$

$a_8=a+7d=23$

이므로 $a=2$, $d=3$

따라서 $a_4=a+3d=2+3\times 3=11$

8. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

함수 $y=3^{x-m}+n$ 의 그래프와 일치하고

점근선의 방정식이 $y=2$ 이므로 $n=2$

점 $(7,\ 5)$ 를 지나므로 $5=3^{7-m}+2$

$3^{7-m}=3$, $m=6$

따라서 $m+n=6+2=8$

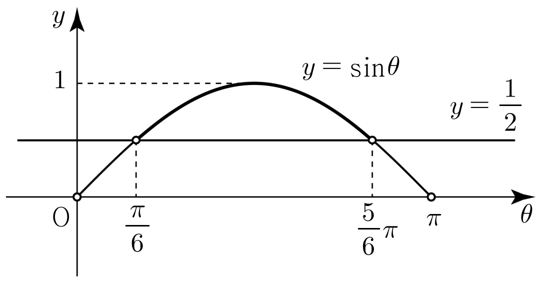
9. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각형 ABC 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\theta=2\sin\theta$

삼각형 ABC 의 넓이가 1 보다 크므로 $\sin\theta>\frac{1}{2}$

곡선 $y=\sin\theta\,(0<\theta<\pi)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 의

개형은 다음과 같다.



$0<\theta<\pi$ 에서 $\sin\theta>\frac{1}{2}$ 의 해는 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $2\alpha+\beta=2\times\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$

10. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$x^2=\sqrt{n}\,x$, $x(x-\sqrt{n})=0$

$x=0$ 또는 $x=\sqrt{n}$

곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=\sqrt{n}\,x$ 가 만나는

서로 다른 두 점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(\sqrt{n},\ n)$

$\{f(n)\}^2=(\sqrt{n}-0)^2+(n-0)^2$

$=n+n^2=n(n+1)$

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{\{f(n)\}^2}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

11. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 점근선의 방정식은

각각 $x=p$, $y=1$ 이므로

$\mathrm{A}(p,\ 2^p+1)$, $\mathrm{B}(p,\ 0)$, $\mathrm{C}(p+2,\ 1)$

(삼각형 ABC 의 넓이) $=\frac{1}{2}\times(2^p+1)\times 2=2^p+1$

삼각형 ABC 의 넓이가 6 이므로

$2^p+1=6$, $2^p=5$

따라서 $p=\log_2 5$

12. [출제의도] 수열 이해하기

$a_8=\log_2 a_7=5$, $a_7=2^5=32$

$a_7=2^{a_6+1}=2^5$, $a_6=4$

따라서 $a_6+a_7=4+32=36$

13. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

$8\theta-\theta=2n\pi$ (n 은 정수), $\theta=\frac{2n}{7}\pi$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $0<\frac{2n}{7}\pi<\frac{\pi}{2}$, $0<n<\frac{7}{4}$

n 은 정수이므로 $n=1$, $\theta=\frac{2}{7}\pi$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{2}{7}\pi=\frac{4}{7}\pi$

14. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$0\le x\le 5$ 에서

함수 $f(x)=\log_3\{(x-3)^2+k-9\}$ 는

$x=0$ 일 때, 최댓값 $\log_3 k$,

$x=3$ 일 때, 최솟값 $\log_3(k-9)$ 를 갖는다.

$\log_3 k+\log_3(k-9)=2+\log_3 4$

$\log_3 k(k-9)=\log_3 36$

$k^2-9k-36=0$, $(k-12)(k+3)=0$

$k>9$ 이므로 $k=12$

15. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

2 이상의 자연수 n 에 대하여

$(2n-5)(2n-9)$ 의 n 제곱근 중에서

실수인 것을 x 라 하면

(i) n 이 홀수인 경우

$x=\sqrt[n]{(2n-5)(2n-9)}$ 이므로 $f(n)=1$

(ii) n 이 짝수인 경우

$(2n-5)(2n-9)<0$ 이면

실수 x 는 존재하지 않으므로

$\frac{5}{2}<n<\frac{9}{2}$ 인 짝수 n 에 대하여 $f(n)=0$

$(2n-5)(2n-9)>0$ 이면

$x=\sqrt[n]{(2n-5)(2n-9)}$ 또는

$x=-\sqrt[n]{(2n-5)(2n-9)}$ 이므로

$n<\frac{5}{2}$ 또는 $n>\frac{9}{2}$ 인 짝수 n 에 대하여 $f(n)=2$

(i), (ii) 에 의하여

$2\le n\le 8$ 인 자연수 n 에 대하여

$$f(n)=\begin{cases}0 & (n=4)\\ 1 & (n=3,\ 5,\ 7)\\ 2 & (n=2,\ 6,\ 8)\end{cases}$$

따라서 $\sum_{n=2}^{8}f(n)=0\times 1+1\times 3+2\times 3=9$

16. [출제의도] 수학적 귀납법을 활용하여 추론하기

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) $=a_1$,

(우변) $=a_2-\boxed{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\boxed{\frac{1}{2}}=1=a_1$

이므로 (★) 이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 (★) 이 성립한다고 가정하면

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m$

$=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)$ 이다.

$n=m+1$ 일 때 (★) 이 성립함을 보이자.

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m+(m+1)a_{m+1}$

$=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)+(m+1)a_{m+1}$

$=(m+1)a_{m+1}\left(\boxed{\frac{m}{2}}+1\right)-\frac{m(m+1)}{4}$

$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}a_{m+1}-\frac{m(m+1)}{4}$

$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(a_{m+2}-\boxed{\frac{1}{m+2}}\right)-\frac{m(m+1)}{4}$

$=\frac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 (★)이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)$$

이 성립한다.

$p=\frac{1}{2}$, $f(m)=\frac{m}{2}$, $g(m)=\frac{1}{m+2}$

따라서 $p+\frac{f(5)}{g(3)}=13$

17. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}x\right)$라 하자.

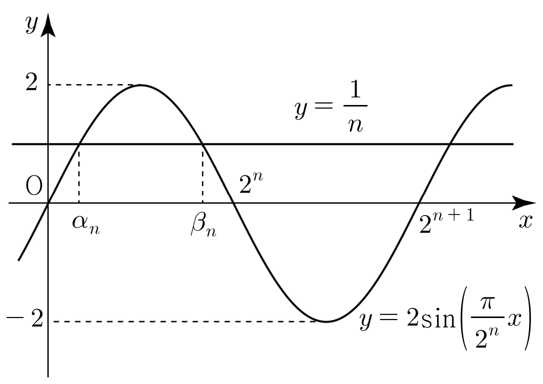
함수 $y=f(x)$의 그래프의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2^n}}=2^{n+1}$,

최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

자연수 n에 대하여 $0<\frac{1}{n}<2$이므로

$0\le x\le 2^{n+1}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

직선 $y=\frac{1}{n}$은 서로 다른 두 점에서 만난다.



만나는 두 점의 x좌표를 각각 α_n, β_n이라 하면

$\beta_n=2^n-\alpha_n$이므로 $x_n=\alpha_n+\beta_n=2^n$

따라서 $\sum_{n=1}^{6}x_n=\sum_{n=1}^{6}2^n=\frac{2\times(2^6-1)}{2-1}=126$

18. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

$a_1=1$, $b_1=-1$이므로

$a_2=1+(-1)=0$, $b_2=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

$a_3=0+1=1$, $b_3=2\cos 0=2$

$a_4=1+2=3$, $b_4=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

$a_5=3+1=4$, $b_5=2\cos\pi=-2$

$a_6=4+(-2)=2$, $b_6=2\cos\frac{4}{3}\pi=-1$

$a_7=2+(-1)=1$, $b_7=2\cos\frac{2}{3}\pi=-1$

$a_8=1+(-1)=0$, $b_8=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

⋮

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$, $b_{n+6}=b_n$이 성립한다.

$2021=6\times 336+5$이므로

$a_{2021}-b_{2021}=a_5-b_5=4-(-2)=6$

19. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\angle OAP=\angle OPA=\theta$

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle CPD=\frac{\pi}{2}-\theta$

$4\sin\theta=3\cos\theta$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\frac{16}{9}\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{9}{25}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\overline{AB}=10$, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{PA}=10\cos\theta=8$, $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}=8$

(삼각형 ADC의 넓이)
=(삼각형 PAD의 넓이)+(삼각형 PDC의 넓이)
−(삼각형 PAC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 8\times 8\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times 8\times 8\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\quad-\frac{1}{2}\times 8\times 8$

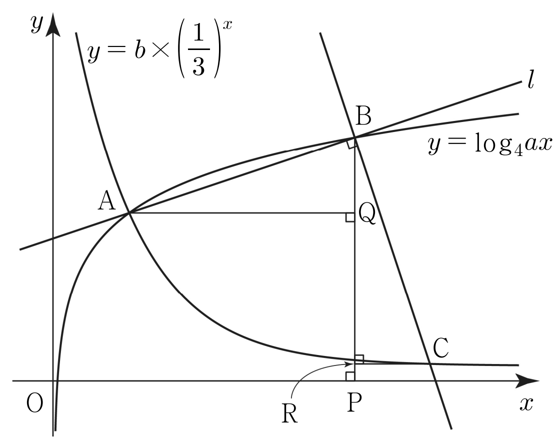
$=32\sin\theta+32\cos\theta-32$

$=32\times\frac{3}{5}+32\times\frac{4}{5}-32$

$=\frac{64}{5}$

20. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 활용하여 문제 해결하기

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 P,
점 A에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 Q,
점 C에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 R라 하자.



ㄱ. 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{\overline{BQ}}{\overline{AQ}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{3}$, $y_2-y_1=\frac{1}{3}(x_2-x_1)$

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{10}$

$\frac{10}{9}(x_2-x_1)^2=10$, $(x_2-x_1)^2=9$

$x_1<x_2$이므로 $x_2-x_1=3$ (참)

ㄴ. $\angle AQB=\angle BRC=\frac{\pi}{2}$이고

$\angle ABQ+\angle CBR=\angle CBR+\angle BCR=\frac{\pi}{2}$

이므로 $\angle ABQ=\angle BCR$

$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{10}$이므로

두 삼각형 ABQ와 BCR는 합동이다.

$\overline{AQ}=\overline{BR}=3$, $\overline{BQ}=\overline{CR}=1$

$x_3-x_1=\overline{AQ}+\overline{CR}=3+1=4$

$y_1-y_3=\overline{QR}=\overline{BR}-\overline{BQ}=3-1=2$

$x_3-x_1=2(y_1-y_3)=4$ (참)

ㄷ. ㄱ에 의하여 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_1+3,\ y_1+1)$

두 점 A, B는 곡선 $y=\log_4 ax$ 위에 있으므로

$y_1=\log_4 ax_1$ ⋯ ㉠

$y_1+1=\log_4 a(x_1+3)$ ⋯ ㉡

점 A는 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위에 있으므로

$y_1=\frac{b}{3^{x_1}}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡을 연립하면 $1=\log_4\frac{x_1+3}{x_1}$, $x_1=1$

㉠, ㉢에 의하여 $\log_4 a=\frac{b}{3}$, $a=4^{\frac{b}{3}}$

$a^2=4^{\frac{2}{3}b}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

[참고]

점 $C(x_1+4,\ y_1-2)$는 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위에

있고 $x_1=1$, $y_1=\frac{b}{3}$이므로

$\frac{b}{3}-2=b\times 3^{-5}$에서 $b=\frac{243}{40}$

$a=4^{\frac{b}{3}}=4^{\frac{81}{40}}=2^{\frac{81}{20}}$

21. [출제의도] 등차수열의 성질을 활용하여 문제 해결하기

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

모든 자연수 n에 대하여 $|S_n|\ge 14$이므로

$|S_1|=|b|\ge 14$

b가 자연수이므로 $b\ge 14$

$S_n=\frac{n\{2b+(n-1)\times(-4)\}}{2}$

$\quad=-n(2n-b-2)$

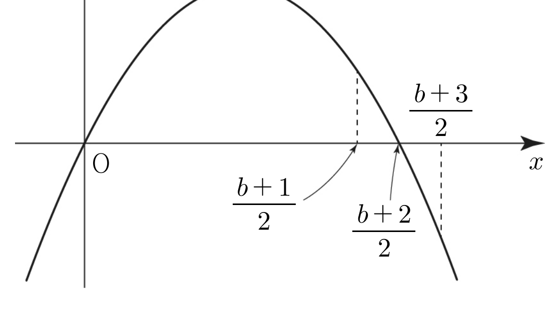
$\quad=-2n\left(n-\frac{b+2}{2}\right)$

(ⅰ) b가 짝수인 경우

$S_{\frac{b+2}{2}}=0$이 되어 조건 $|S_n|\ge 14$를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) b가 홀수인 경우

함수 $y=-2x\left(x-\frac{b+2}{2}\right)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$|S_n|\ge 14$이므로 $S_{\frac{b+1}{2}}\ge 14$, $S_{\frac{b+3}{2}}\le -14$를 동시에 만족시켜야 한다.

$$S_{\frac{b+1}{2}} = -2\times\frac{b+1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) \ge 14$$

$b \ge 27$ ⋯ ㉠

$$S_{\frac{b+3}{2}} = -2\times\frac{b+3}{2}\times\frac{1}{2} \le -14$$

$b \ge 25$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $b \ge 27$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$b_1 = 27$, $b_2 = 29$, $b_3 = 31$, ⋯

이므로 $b_m = 2m+25$ (m은 자연수)

따라서 $\displaystyle\sum_{m=1}^{10} b_m = \sum_{m=1}^{10}(2m+25)$

$$= 2\times\frac{10\times 11}{2}+250 = 360$$

22. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$$\cos\frac{5}{3}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

따라서 $10\cos\frac{5}{3}\pi = 10\times\frac{1}{2} = 5$

23. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$이라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$$f(-4) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} + 1 = 82$$

24. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_9\sqrt{a} = \log_{3^2}a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\log_3 a = \log_3 b$, $a = b^4$

따라서 $50\times\log_b\sqrt{a} = 50\times\log_b b^2 = 100$

25. [출제의도] 기호 $\sum$의 뜻과 성질 이해하기

$$\sum_{n=1}^{10} a_n(2b_n - 3a_n) = 2\sum_{n=1}^{10} a_n b_n - 3\sum_{n=1}^{10} a_n^2$$

$$= 2\sum_{n=1}^{10} a_n b_n - 3\times 10 = 16$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n b_n = 23$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n(6a_n + 7b_n) = 6\sum_{n=1}^{10} a_n^2 + 7\sum_{n=1}^{10} a_n b_n$$

$$= 6\times 10 + 7\times 23 = 221$$

26. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 문제 해결하기

$f(x)$가 다항함수이고 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2} = 1$이므로

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b는 실수)

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{(x-1)(x-2)} = 4$이고

$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)(x-2) = 0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\{f(x)-3\} = 0$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}[\{f(x)-3\}+3]$$

$$= \lim_{x\to 1}\{f(x)-3\} + \lim_{x\to 1}3$$

$$= 0 + 3 = 3$$

$\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 2+a+b = 3$, $b = -a+1$

$$f(x) - 3 = 2x^2 + ax - a - 2$$

$$= (x-1)(2x+a+2)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+a+2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{2+a+2}{-1} = 4$$

$a = -8$, $b = 9$이므로 $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$

따라서 $f(4) = 9$

27. [출제의도] 로그의 정의와 성질 이해하기

$|x-1|$과 $x+2$는 로그의 진수이므로

$|x-1| > 0$, $x+2 > 0$

$x \ne 1$, $x > -2$

(ⅰ) $-2 < x < 1$인 경우

$\log(-x+1) + \log(x+2) \le 1$

$(-x+1)(x+2) \le 10$, $x^2 + x - 2 \ge -10$

$x^2 + x + 8 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} \ge 0$

$-2 < x < 1$인 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

x는 정수이므로 $x = -1$ 또는 $x = 0$

(ⅱ) $x > 1$인 경우

$\log(x-1) + \log(x+2) \le 1$

$(x-1)(x+2) \le 10$, $(x+4)(x-3) \le 0$

$-4 \le x \le 3$

$x > 1$이므로 $1 < x \le 3$

x는 정수이므로 $x = 2$ 또는 $x = 3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

모든 정수 x의 값의 합은 $(-1)+0+2+3 = 4$

28. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에서 $S_1 = a_1 = 1$

수열 $\{b_n\}$을 $b_n = a_n a_{n+1}$이라 하자.

조건 (나)에서 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를

r라 하면 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = r$, $a_{n+2} = ra_n$

$S_{10} = S_{11} - a_{11} = 1 - r^5 = 33$

$r^5 = -32$, $r = -2$

$S_{18} = S_{19} - a_{19} = 1 - r^9 = 513$

29. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle\mathrm{BAC} = \theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = 3^2 + 4^2 - 2\times 3\times 4\times\cos\theta = 25 - 24\cos\theta$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{25 - 24\cos\theta}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R_1이라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta} = 2R_1$, $R_1 = \dfrac{\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}$

직각삼각형 ABD에서 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta = 3\cos\theta$

직각삼각형 ACE에서 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AC}}\cos\theta = 4\cos\theta$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{DE}}^2 = (3\cos\theta)^2 + (4\cos\theta)^2 - 2\times 3\cos\theta\times 4\cos\theta\times\cos\theta$$

$$= 25\cos^2\theta - 24\cos^3\theta$$

$$= \cos^2\theta(25 - 24\cos\theta)$$

$\overline{\mathrm{DE}} = \cos\theta\sqrt{25 - 24\cos\theta}$

삼각형 ADE의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta} = 2R_2$, $R_2 = \dfrac{\cos\theta\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이와

삼각형 ADE의 외접원의 넓이의 차가 4π이므로

$4\pi = \pi{R_1}^2 - \pi{R_2}^2$

$$= \pi\times\frac{(1-\cos^2\theta)(25-24\cos\theta)}{4\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\pi(25-24\cos\theta)}{4}$$

$\cos\theta = \frac{3}{8}$, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{55}}{8}$

사각형 AEPD에서 $\angle\mathrm{AEP} = \angle\mathrm{ADP} = \frac{\pi}{2}$

이므로 네 점 A, E, P, D는 선분 AP를 지름으로 하는 한 원 위에 있고

삼각형 PDE의 외접원은 삼각형 ADE의 외접원과 일치한다.

삼각형 PDE의 외접원의 넓이는 $\pi{R_2}^2$

$$R_2 = \frac{\frac{3}{8}\times\sqrt{25 - 24\times\frac{3}{8}}}{2\times\frac{\sqrt{55}}{8}} = \frac{6}{\sqrt{55}}$$

$$\pi{R_2}^2 = \pi\left(\frac{6}{\sqrt{55}}\right)^2 = \frac{36}{55}\pi$$

따라서 $a = \frac{36}{55}$, $55a = 36$

[참고]

두 삼각형 ABC, ADE는 서로 닮음이고

닮음비가 $1 : \cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{BC}}\times\cos\theta$, $R_2 = R_1\times\cos\theta$

30. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수 추론하기

$f_1(x) = ax^2 + (2b-3)x + a^2 - 3$,

$f_2(x) = -\frac{1}{3}ax^2 + (b+5)x + a^2 - 1$이라 하면

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & (x < k) \\ f_2(x) & (x \ge k)\end{cases}$$

$f(x) > 0$이면 $\dfrac{|f(x)|}{f(x)} = 1$,

$f(x) < 0$이면 $\dfrac{|f(x)|}{f(x)} = -1$

임의의 실수 α에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x)$가 존재하므로

(ⅰ) $x_1 < x < x_2$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$일 때

$x_1 < \alpha < x_2$인 임의의 α에 대하여

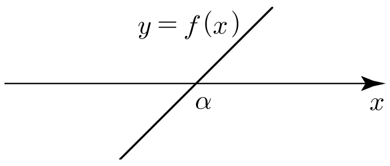
$$\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)} = \lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)} = 1,\ g(\alpha) = 0$$

(ⅱ) $x_3 < x < x_4$인 모든 x에 대하여 $f(x) \le 0$일 때

$x_3 < \alpha < x_4$인 임의의 α에 대하여

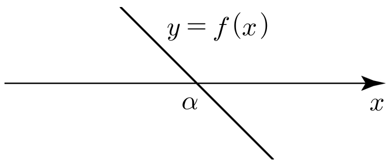
$$\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)} = \lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)} = -1,\ g(\alpha) = 0$$

(iii) $f(\alpha)=0$ 이고 $x=\alpha$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 함숫값의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 변하는 경우



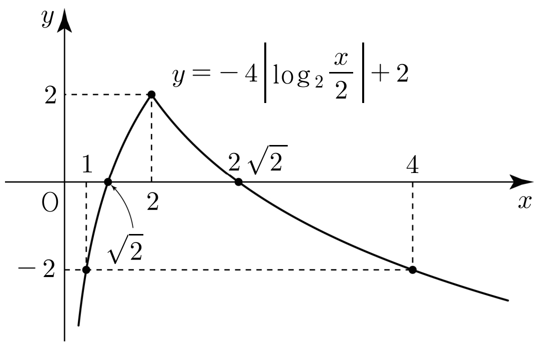
$\lim\limits_{t\to\alpha+}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=1$, $\lim\limits_{t\to\alpha-}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=-1$ 이므로
$g(\alpha)=2$

(iv) $f(\alpha)=0$ 이고 $x=\alpha$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 함숫값의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 변하는 경우

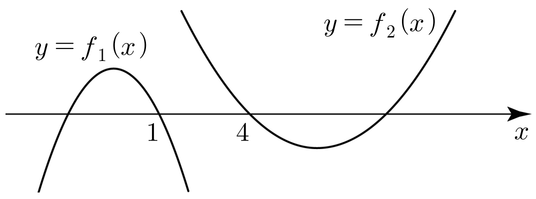


$\lim\limits_{t\to\alpha+}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=-1$, $\lim\limits_{t\to\alpha-}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=1$ 이므로
$g(\alpha)=-2$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여
함수 $g(x)$ 의 함숫값이 될 수 있는 것은 -2, 0, 2
함수 $y=-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$ 의 그래프와
함수 $y=-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2$ 의 그래프의 교점의 y 좌표는 -2, 0, 2 만 가능하다.
방정식 $-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2=-2$ 의 해는
$x=1$ 또는 $x=4$
방정식 $-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2=0$ 의 해는
$x=\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$
방정식 $-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2=2$ 의 해는
$x=2$
함수 $y=g(x)$ 의 그래프와
함수 $y=-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2$ 의 그래프의
교점의 개수가 5 이므로 교점은
$(1,\,-2)$, $(\sqrt{2},\,0)$, $(2,\,2)$, $(2\sqrt{2},\,0)$,
$(4,\,-2)$ 이고
$g(1)=g(4)=-2$, $g(2)=2$
$f(1)=f(2)=f(4)=0$
$k\le 1$ 이면 $x\ge k$ 에서
$f(x)=f_2(x)=-\dfrac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1$ 이므로
$f(1)=f(2)=f(4)=0$ 이 성립하지 않는다.
$k>4$ 이면 $x<k$ 에서
$f(x)=f_1(x)=ax^2+(2b-3)x+a^2-3$ 이므로
$f(1)=f(2)=f(4)=0$ 이 성립하지 않는다.
그러므로 $1<k\le 4$ 이고
$f(1)=f_1(1)$, $f(4)=f_2(4)$ $\cdots$ ㉠
$a<0$ 이면
함수 $f_1(x)$ 의 그래프는 위로 볼록,
함수 $f_2(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록이고
$g(1)=g(4)=-2$, $f_1(1)=f_2(4)=0$ 을
만족시키는 두 곡선 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ 의
개형은 다음과 같다.



이때, $f_1(2)\neq 0$ 이고 $f_2(2)\neq 0$ 이므로
$f(2)=0$ 이 성립하지 않는다.
그러므로 $a>0$
㉠에 의하여
$f(1)=f_1(1)=a+(2b-3)+a^2-3=0$
$f(4)=f_2(4)=-\dfrac{16}{3}a+(4b+20)+a^2-1=0$
에서 $a=-\dfrac{31}{3}$ 또는 $a=3$
$a>0$ 이므로 $a=3$, $b=-3$

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-9x+6 & (x<k)\\ -x^2+2x+8 & (x\ge k)\end{cases}$$

조건 (가)에 의하여
$\lim\limits_{x\to k-}f(x)=\lim\limits_{x\to k+}f(x)$
$\lim\limits_{x\to k-}(3x^2-9x+6)=\lim\limits_{x\to k+}(-x^2+2x+8)$
$4k^2-11k-2=0$, $k=\dfrac{11\pm3\sqrt{17}}{8}$
$1<k\le 4$ 이므로 $k=\dfrac{11+3\sqrt{17}}{8}$
따라서 $p=\dfrac{11}{8}$, $q=\dfrac{3}{8}$
$16(p+q)=16\times\dfrac{14}{8}=28$

[참고]
함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.