제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $27^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2. $\log_3 18 - \log_3 2$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

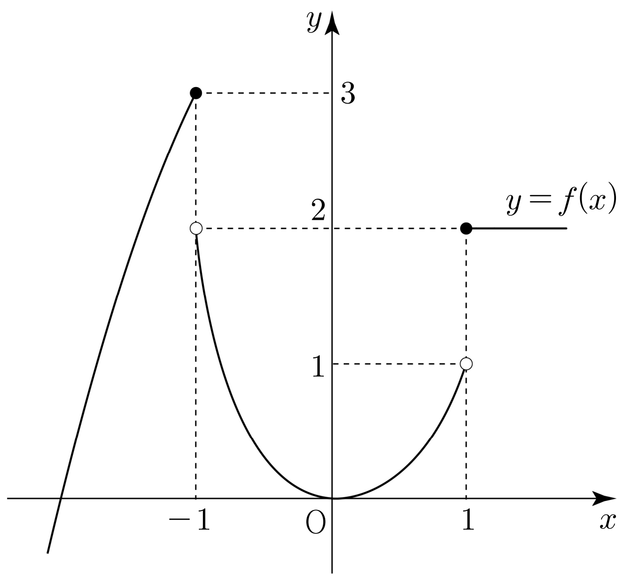
3. $12\cos\frac{4}{3}\pi$ 의 값은? [2점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

4. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 6$, $a_6 = 3a_4$ 일 때, a_9 의 값은? [3점]

① 153 ② 156 ③ 159 ④ 162 ⑤ 165

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{5} a_k = 30$일 때, $a_2 + a_4$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

7. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이고 호의 길이가 π인 부채꼴의 넓이는? [3점]

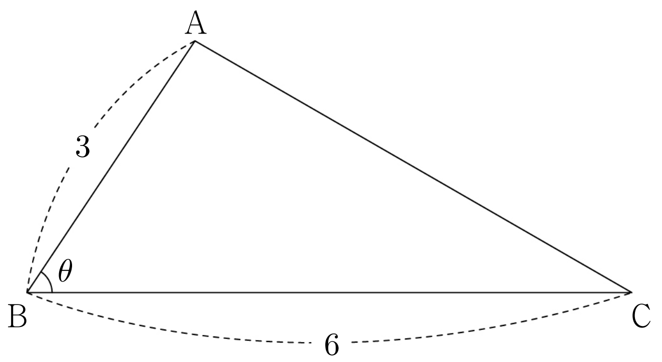
① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

8. 함수 $y=\log_3(2x+1)$ 의 역함수의 그래프가 점 $(4,\ a)$ 를 지날 때, a 의 값은? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

9. $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$ 인 삼각형 ABC 가 있다. $\angle \mathrm{ABC}=\theta$ 에 대하여 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{14}}{9}$ 일 때, 선분 AC 의 길이는? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [3점]

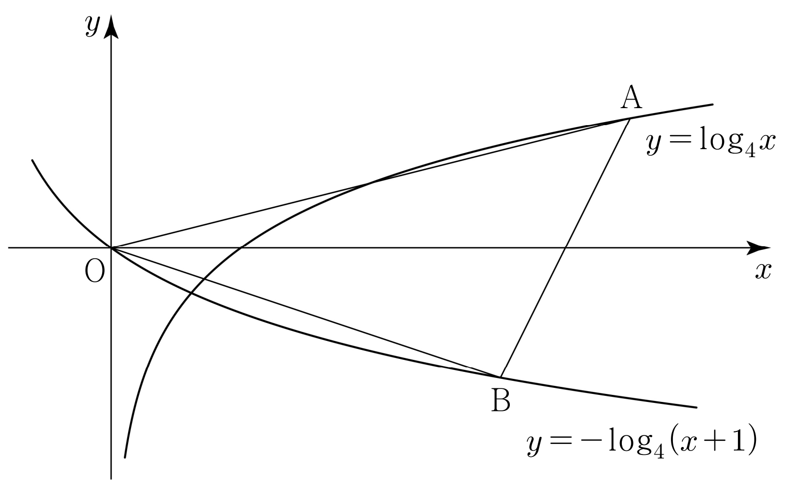
① 4 ② $\dfrac{13}{3}$ ③ $\dfrac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\dfrac{16}{3}$



10. 첫째항이 1 이고 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{10}{31}$ ② $\dfrac{11}{31}$ ③ $\dfrac{12}{31}$ ④ $\dfrac{13}{31}$ ⑤ $\dfrac{14}{31}$

11. 그림과 같이 곡선 $y=\log_4 x$ 위의 점 A와 곡선 $y=-\log_4(x+1)$ 위의 점 B가 있다. 점 A의 y좌표가 1이고, x축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분할 때, 선분 OB의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

12. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\frac{S_{12}}{S_6}$의 값은? [3점]

① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$

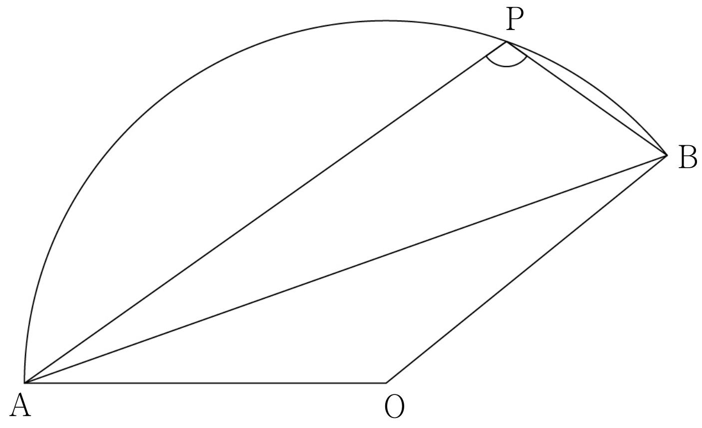
13. 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = -\frac{1}{a_n - 1}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_m = 11$을 만족시키는 자연수 m의 값은? [3점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

14. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다. $\overline{\mathrm{AB}} = 8\sqrt{2}$ 이고 부채꼴 OAB의 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BPA} > 90^\circ$, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 3 : 1$ 일 때, 선분 BP의 길이는? [4점]



① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

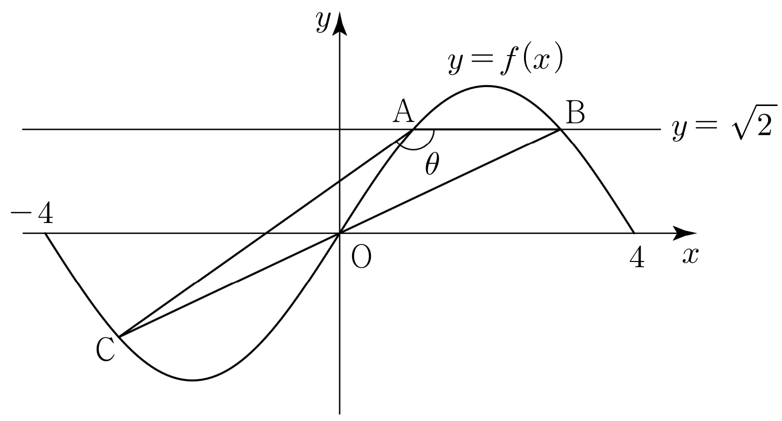
15. 첫째항이 양수이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_k = 31$, $S_{k+10} = 640$을 만족시키는 자연수 k에 대하여 S_k의 값은? [4점]

① 200 ② 205 ③ 210 ④ 215 ⑤ 220

16. 집합 $\{x \mid -4 \le x \le 4\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{4}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $y = \sqrt{2}$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 두 점 B, O를 지나는 직선이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 B와 O가 아닌 점을 C라 하자. $\angle \mathrm{BAC} = \theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값은? (단, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크고, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

17. 실수 $a\,(a>1)$과 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 함수

$$y=3a^x,\ y=3a^{x-1}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 l_n, 사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+2}$의 넓이를 S_n이라 하자. 두 실수 L, S에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} l_k=L$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} S_{4k-3}=S$일 때, 다음은 $\dfrac{S}{L}=\dfrac{2}{5}$를 만족시키는 a의 값을 구하는 과정이다.

> 두 점 P_n, Q_n의 좌표는 각각 $(n,\ 3a^n)$, $(n,\ 3a^{n-1})$
> 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이 l_n은
> $l_n=3(a-1)\times a^{n-1}$이므로
> $L=\displaystyle\sum_{k=1}^{20} l_k=3\times(\boxed{(가)})$이다.
> 사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+2}$의 넓이 S_n은
> $S_n=3(a-1)\times\left(a^{n-1}+a^{n+1}\right)$이므로
> $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{5} S_{4k-3}$
> $=S_1+S_5+S_9+S_{13}+S_{17}$
> $=\dfrac{3}{(\boxed{(나)})}\times(\boxed{(가)})$이다.
> 따라서
> $$\frac{S}{L}=\frac{\dfrac{3}{(\boxed{(나)})}\times(\boxed{(가)})}{3\times(\boxed{(가)})}=\frac{1}{(\boxed{(나)})}=\frac{2}{5}$$
> 이므로 $a=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\dfrac{f(\sqrt{2})}{g(20p)}$의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

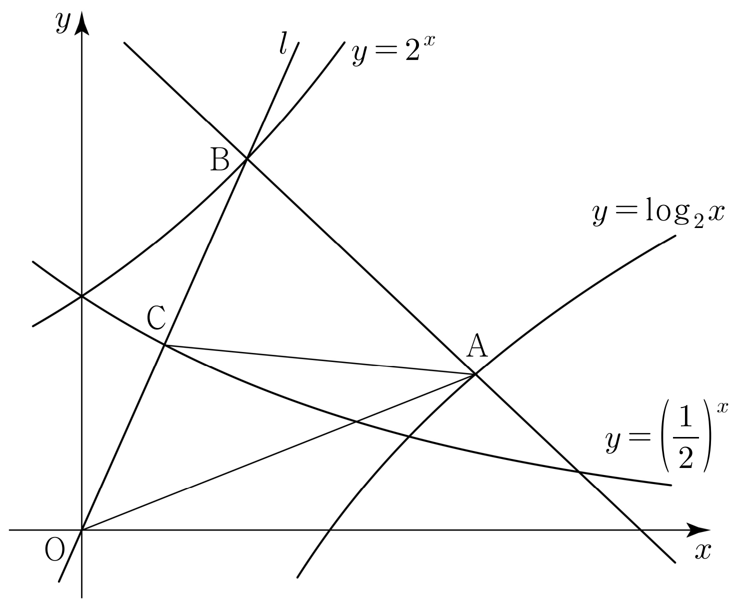
18. 집합 $\{x\mid -\pi\le x\le\pi\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\left|\sin 2x+\frac{2}{3}\right|$$

가 있다. 양수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=3k$, $y=k$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 각각 m, n이라 할 때, $|m-n|=3$을 만족시킨다. $-\pi\le x\le\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=k$의 모든 실근의 합은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\dfrac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\dfrac{7}{2}\pi$

19. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 한 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 $B(x_2,\ y_2)$라 하고, 두 점 B, O를 지나는 직선 l이 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 만나는 점을 $C(x_3,\ y_3)$이라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 2배일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1>1$이고, O는 원점이다.) [4점]



<보 기>

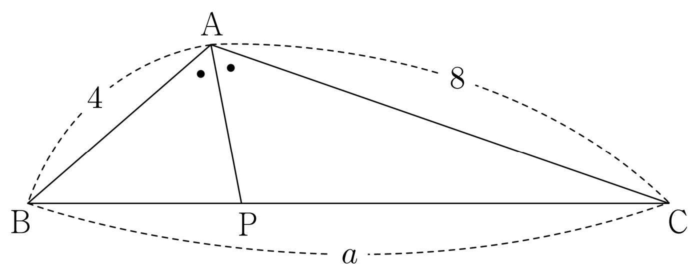
ㄱ. $\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{OA}$

ㄴ. $x_2+y_1=4x_3$

ㄷ. 직선 l의 기울기는 $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 양수 a에 대하여 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=8$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 하자. $a(\sin B+\sin C)=6\sqrt{3}$일 때, 선분 AP의 길이는? (단, $\angle BAC>90^\circ$) [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

21. 양수 a와 0이 아닌 실수 d에 대하여 첫째항이 모두 a이고, 공차가 각각 d, $-2d$인 두 등차수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1| = |b_7|$
>
> (나) $S_n = \sum_{k=1}^{n}(|a_k| - |b_k|)$라 할 때,
> 모든 자연수 n에 대하여 $S_n \leq 108$이고,
> $S_p = 108$인 자연수 p가 존재한다.

$S_n \geq 0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 m이라 할 때, a_m의 값은? [4점]

① 46 ② 50 ③ 54 ④ 58 ⑤ 62

단 답 형

22. $\cos\theta = \frac{1}{3}$일 때, $9\sin^2\theta$의 값을 구하시오. [3점]

23. 방정식 $4^x - 15 \times 2^{x+1} - 64 = 0$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

24. $\log_5 2 = a$, $\log_2 7 = b$ 일 때, 25^{ab} 의 값을 구하시오. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2 = 20,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2 = 50$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 8,\ \lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)f(x)}{g(x)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 두 함수

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a},\ g(x)=(x-1)(x-3)$$

에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$ 라 하자.
함수 $h(x)$ 가 $0 \le x \le 5$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$, 최댓값 M 을 갖는다. M 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

28. 2 이상의 자연수 n 과 상수 k 에 대하여 $n^2-17n+19k$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.
$\sum_{n=2}^{19} f(n)=19$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값을 구하시오. [4점]

29. 양수 m과 0이 아닌 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(a-1)x-a^2+2 & (x \le 2m) \\ -3x+4a & (x > 2m) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} ax-a & (x \le m+1) \\ x-a+1 & (x > m+1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\alpha-} f(x) \ne \lim_{x\to\alpha+} f(x)$, $\lim_{x\to\beta-} g(x) \ne \lim_{x\to\beta+} g(x)$ 인 실수 α, β가 존재한다.
>
> (나) 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 의 값이 존재한다.

$m+g(a^2)$의 값을 구하시오. [4점]

30. $\dfrac{12}{5} < k \le 4$인 상수 k와 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 짝수이면
> a_n은 $0 \le x \le 2$에서 직선 $y=-\dfrac{k}{2n}$ 와
> 곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$ 이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.
>
> (나) n이 홀수이면
> a_n은 $0 \le x \le 2$에서 직선 $y=\dfrac{k+1}{n}$ 과
> 곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$ 이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

$0 < a_2 < 6$일 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.