정답 및 해설

수학 영역

정 답

1	⑤	2	②	3	②	4	④	5	③
6	①	7	③	8	①	9	④	10	①
11	③	12	②	13	③	14	⑤	15	⑤
16	①	17	④	18	②	19	⑤	20	②
21	③	22	8	23	5	24	49	25	10
26	16	27	128	28	3	29	4	30	53

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = 2$

3. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$12\cos\frac{4}{3}\pi = 12\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -12\cos\frac{\pi}{3} = -6$

4. [출제의도] 등비수열 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a_6}{a_4} = r^2 = 3$, $a_3 = ar^2 = 6$, $a = 2$

따라서 $a_9 = ar^8 = a(r^2)^4 = 2\times 3^4 = 162$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x) + \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 2 + 1 = 3$

6. [출제의도] 등차중항 이해하기

등차중항의 성질에 의하여

$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$

$\sum\limits_{k=1}^{5} a_k = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 30$ 이므로 $a_3 = 6$

따라서 $a_2 + a_4 = 12$

7. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r,
중심각의 크기를 θ라 하자.

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 이므로 부채꼴의 호의 길이는

$r\theta = r\times\frac{\pi}{6} = \pi$, $r = 6$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}\times 36\times\frac{\pi}{6} = 3\pi$

8. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y = \log_3(2x+1)$의 그래프가
점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$4 = \log_3(2a+1)$, $2a+1 = 3^4$

따라서 $a = 40$

9. [출제의도] 코사인법칙 이해하기

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{14}}{9}$ 이므로

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{14}}{9}\right)^2 = 1 - \frac{56}{81} = \frac{25}{81}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos\theta = \frac{5}{9}$

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 3^2 + 6^2 - 2\times 3\times 6\times\frac{5}{9} = 25$

따라서 선분 AC의 길이는 5

10. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_n = 1 + (n-1)\times 3 = 3n - 2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{31}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{31}\right) = \frac{10}{31}\end{aligned}$$

11. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

곡선 $y = \log_4 x$ 위의 점 A의 y좌표가 1이므로
점 A의 좌표는 $(4,\ 1)$
선분 AB와 x축이 만나는 점을 C라 하면
x축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하므로
점 C는 선분 AB의 중점이다.
점 B의 y좌표는 -1이고
점 B는 곡선 $y = -\log_4(x+1)$ 위의 점이므로
점 B의 좌표는 $(3,\ -1)$
따라서 $\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10}$

12. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

$\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}\,a_n$

$a_1 = a$라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고
공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로

$S_n = \frac{a\{(\sqrt{2})^n - 1\}}{\sqrt{2} - 1}$

따라서 $\frac{S_{12}}{S_6} = \frac{(\sqrt{2})^{12} - 1}{(\sqrt{2})^6 - 1} = \frac{2^6 - 1}{2^3 - 1} = 9$

13. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{a_1 - 1} = 2$,

$a_3 = -\frac{1}{a_2 - 1} = -1$,

$a_4 = -\frac{1}{a_3 - 1} = \frac{1}{2} = a_1$,

$a_5 = -\frac{1}{a_4 - 1} = 2 = a_2$, $\cdots$

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+3} = a_n$, $a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = \frac{3}{2}$ 이므로

$S_{3n} = \frac{3}{2}n$,

$S_{3n+1} = S_{3n} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}$,

$S_{3n+2} = S_{3n} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$

$11 = \frac{3}{2}\times 7 + \frac{1}{2} = S_{3\times 7} + \frac{1}{2} = S_{3\times 7+1} = S_{22}$

따라서 $m = 22$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이 R는
부채꼴 OAB의 반지름의 길이와 같으므로
$R = 6$

$\angle\mathrm{BPA} = \theta\left(\theta > \frac{\pi}{2}\right)$라 할 때,

삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$\sin\theta = \frac{8\sqrt{2}}{2\times 6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$\theta > \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\cos\theta < 0$ 이므로 $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

$\overline{\mathrm{BP}} = k$라 하면, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 3:1$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = 3k$

삼각형 APB에서 코사인법칙에 의하여

$(3k)^2 + k^2 - 2\times 3k\times k\times\left(-\frac{1}{3}\right) = (8\sqrt{2})^2$

$9k^2 + k^2 + 2k^2 = 128$, $k^2 = \frac{32}{3}$

따라서 선분 BP의 길이는 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

15. [출제의도] 등차수열 이해하기

$S_{k+10} = S_k + (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10})$

수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$$\begin{aligned}640 &= S_k + \{(a_k + 2) + (a_k + 4) + \cdots + (a_k + 20)\}\\ &= S_k + \left\{10\times 31 + \frac{10\times(2+20)}{2}\right\}\end{aligned}$$

$S_k = 640 - (310 + 110)$

따라서 $S_k = 220$

[다른 풀이]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_k = a + (k-1)\times 2 = 31$

$S_{k+10} = \frac{(k+10)\{2a + (k+9)\times 2\}}{2} = 640$

위 두 식을 연립하면 $k^2 - 32k + 220 = 0$

$(k-10)(k-22) = 0$, $k = 10$ 또는 $k = 22$

$k = 10$일 때, $a = 13$

$k = 22$일 때, $a = -11$

$a > 0$이므로 $k = 10$, $a = 13$

따라서 $S_k = S_{10} = \frac{10(2\times 13 + 9\times 2)}{2} = 220$

16. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

방정식 $\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (-4\le x\le 4)$ 에서

$\frac{\pi x}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi x}{4}=\frac{3}{4}\pi$, $x=1$ 또는 $x=3$

점 A의 좌표는 $(1,\ \sqrt{2})$

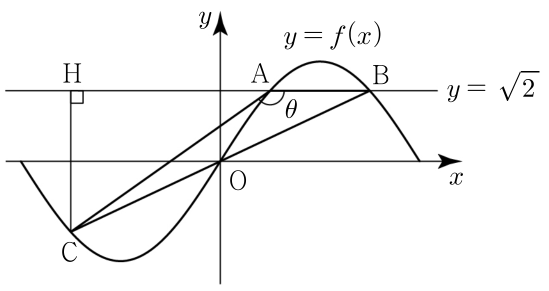
점 B의 좌표는 $(3,\ \sqrt{2})$

점 B와 점 C는 원점에 대하여 서로 대칭이므로

점 C의 좌표는 $(-3,\ -\sqrt{2})$

점 C에서 직선 $y=\sqrt{2}$ 에 내린 수선의 발을

H라 하면 점 H의 좌표는 $(-3,\ \sqrt{2})$



$\angle \mathrm{CAH}=\pi-\theta$, $\sin\theta=\sin(\pi-\theta)$,

$\overline{\mathrm{CH}}=2\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-3-1)^2+(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$

이므로 직각삼각형 ACH에서

$\sin(\pi-\theta)=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

17. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 추론하기

두 점 P_n, Q_n 의 좌표는 각각 $(n,\ 3a^n)$, $(n,\ 3a^{n-1})$

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 의 길이 l_n 은

$l_n=3(a-1)\times a^{n-1}$ 이므로

$L=\sum_{k=1}^{20} l_k=3(a-1)\sum_{k=1}^{20} a^{k-1}$

$=3(a-1)\times\frac{a^{20}-1}{a-1}=3\times(\boxed{a^{20}-1})$ 이다.

사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+2}$ 의 넓이 S_n 은

$S_n=3(a-1)\times(a^{n-1}+a^{n+1})$ 이므로

$S=\sum_{k=1}^{5} S_{4k-3}=S_1+S_5+S_9+S_{13}+S_{17}$

$=3(a-1)(1+a^2+a^4+\cdots+a^{18})$

$=3(a-1)\times\frac{(a^2)^{10}-1}{a^2-1}$

$=\frac{3}{(\boxed{a+1})}\times(\boxed{a^{20}-1})$ 이다.

따라서

$$\frac{S}{L}=\frac{\frac{3}{(\boxed{a+1})}\times(\boxed{a^{20}-1})}{3\times(\boxed{a^{20}-1})}$$

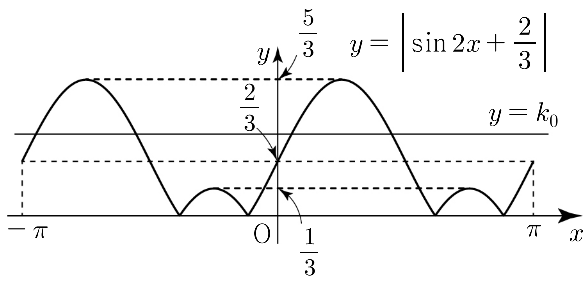
$$=\frac{1}{(\boxed{a+1})}=\frac{2}{5}$$

이므로 $a=\boxed{\frac{3}{2}}$ 이다.

따라서 $\frac{f(\sqrt{2})}{g(20p)}=\frac{1023}{31}=33$

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선

$y=k_0\ (k_0>0)$ 과 만나는 서로 다른 점의 개수는

$0<k_0<\frac{1}{3}$ 일 때 8, $k_0=\frac{1}{3}$ 일 때 6,

$\frac{1}{3}<k_0<\frac{2}{3}$ 일 때 4, $k_0=\frac{2}{3}$ 일 때 5,

$\frac{2}{3}<k_0<\frac{5}{3}$ 일 때 4, $k_0=\frac{5}{3}$ 일 때 2,

$k_0>\frac{5}{3}$ 일 때 0

$3k>k$ 이므로 $|m-n|=3$ 을 만족시키는

m 과 n 은 $m=2$, $n=5$ ⋯ ㉠

또는 $m=5$, $n=8$

$m=2$ 이면 $3k=\frac{5}{3}$, $k=\frac{5}{9}$

$\frac{1}{3}<\frac{5}{9}<\frac{2}{3}$ 에서 $n=4$ 이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

$m=5$ 이면 $3k=\frac{2}{3}$, $k=\frac{2}{9}$

$0<\frac{2}{9}<\frac{1}{3}$ 에서 $n=8$ 이다.

$-\pi\le x\le\pi$ 일 때, 방정식 $\left|\sin 2x+\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{9}$ 의

모든 실근을 크기순으로 나열한 것을

α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_8 이라 하자.

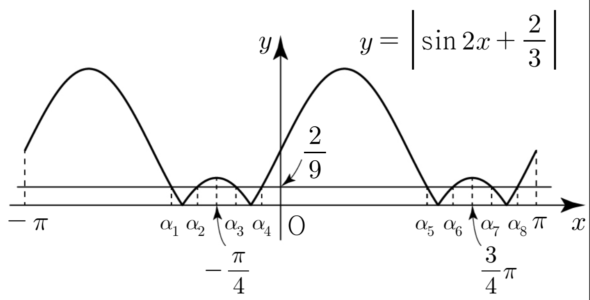
$\alpha_1+\alpha_4=\alpha_2+\alpha_3=2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$

$\alpha_5+\alpha_8=\alpha_6+\alpha_7=2\times\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

따라서

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_8=2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\times\frac{3}{2}\pi=2\pi$

(참고)



19. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

ㄱ. 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=\log_2 x$ 는

직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로

$x_1=y_2$, $y_1=x_2$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$

삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의

2배이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}$ (참)

ㄴ. 점 C는 선분 OB의 중점이므로

$x_3=\frac{1}{2}x_2$, $y_3=\frac{1}{2}y_2$

$x_2=y_1=2x_3$

$x_2+y_1=2y_1=4x_3$ (참)

ㄷ. $y_2=2^{x_2}$, $y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}$

세 점 O, B, C는 직선 l 위의 점이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}$, $\frac{2^{x_2}}{x_2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}}{x_3}$

ㄴ에서 $x_2=2x_3$ 이므로

$\frac{2^{2x_3}}{2x_3}=\frac{2^{-x_3}}{x_3}$, $2^{2x_3-1}=2^{-x_3}$

$2x_3-1=-x_3$ 이므로 $x_3=\frac{1}{3}$

직선 l 의 기울기는 $\frac{y_3}{x_3}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}}{x_3}=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$\sin(\angle\mathrm{BAC})=\sin A=\frac{a}{2R}$,

$\sin B=\frac{8}{2R}$, $\sin C=\frac{4}{2R}$

$a(\sin B+\sin C)=a\left(\frac{8}{2R}+\frac{4}{2R}\right)=\frac{6a}{R}=6\sqrt{3}$

$\frac{a}{R}=\sqrt{3}$, $\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle\mathrm{BAC}>90^\circ$ 이므로 $\angle\mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$

선분 AP가 $\angle\mathrm{BAC}$ 를 이등분하므로

$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PAC}=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PC}}=4:8=1:2$

삼각형 ABP의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 배

$\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{AP}}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times8\times\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

따라서 선분 AP의 길이는 $\frac{8}{3}$

21. [출제의도] 등차수열의 성질을 활용하여 문제 해결하기

$a_n=a+(n-1)d$, $b_n=a+(n-1)(-2d)$

조건 (가)에서 $|a|=|a-12d|$

$a=a-12d$ 또는 $a=-a+12d$

$d\ne0$ 이므로 $a=-a+12d$, $a=6d$

$a_n=6d+(n-1)d=(n+5)d$

$b_n=6d-2(n-1)d=(-2n+8)d$

a 는 양수이므로 $d>0$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n>0$

$1\le n\le3$ 일 때, $b_n>0$,

$n\ge4$ 일 때, $b_n\le0$ 이므로

수열 $\{c_n\}$ 을 $c_n = |a_n| - |b_n|$ 이라 하면

$$c_n = \begin{cases} (n+5)d-(-2n+8)d & (1 \le n \le 3) \\ (n+5)d-(2n-8)d & (n \ge 4) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 3(n-1)d & (1 \le n \le 3) \\ (13-n)d & (n \ge 4) \end{cases}$$

$1 \le n \le 13$ 일 때 $c_n \ge 0$ 이고 $c_{13} = 0$,

$n \ge 14$ 일 때 $c_n < 0$ 이므로

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(|a_k| - |b_k|) = \sum_{k=1}^{n} c_k$ 의 값이 최대가 되는 $n = 12$ 또는 $n = 13$

$$S_{12} = S_{13} = \sum_{n=1}^{13} c_n$$
$$= \sum_{n=1}^{3} 3(n-1)d + \sum_{n=4}^{13}(13-n)d$$
$$= 9d + 45d$$
$$= 54d = 108,\ d = 2$$

수열 $\{c_n\}$ 은

$$c_n = \begin{cases} 6(n-1) & (1 \le n \le 3) \\ 2(13-n) & (n \ge 4) \end{cases}$$

$c_1 = 0$, $c_2 = 6$, $c_3 = 12$

$c_4 = -c_{22}$, $c_5 = -c_{21}$, $c_6 = -c_{20}$, $\cdots$,

$c_{12} = -c_{14}$, $c_{13} = 0$,

$c_{23} = -20$,

$n \ge 24$ 에서 $c_n < 0$ 이므로

$$S_{22} = (c_1 + c_2 + c_3) + (c_4 + c_5 + c_6 + \cdots + c_{22})$$
$$= (0 + 6 + 12) + 0 = 18$$

$S_{23} = S_{22} + c_{23} = 18 + (-20) = -2$

$n \ge 23$ 일 때 $S_n < 0$

따라서 $S_n \ge 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값 $m = 22$ 이고 $a_{22} = (22+5) \times 2 = 54$

22. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

$9\sin^2\theta = 8$

23. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$(2^x)^2 - 30 \times 2^x - 64 = 0$

$(2^x + 2)(2^x - 32) = 0$, $2^x = -2$ 또는 $2^x = 32$

$2^x > 0$ 이므로 $2^x = 32$

따라서 $x = 5$

24. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

로그의 밑의 변환에 의하여 $b = \frac{\log_5 7}{\log_5 2}$

$ab = \log_5 2 \times \log_2 7 = \log_5 2 \times \frac{\log_5 7}{\log_5 2} = \log_5 7$

$25^{ab} = 25^{\log_5 7} = 5^{2\log_5 7} = 7^2 = 49$

25. [출제의도] 기호 $\sum$의 성질 이해하기

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2 = \sum_{k=1}^{10}(a_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{10} a_k + 10 = 50$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2 = 20$ 이므로 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10$

26. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질 이해하기

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{g(x)} = 2$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)}{x-1} \times \frac{x^2-1}{g(x)}\right\}$$
$$= 8 \times 2 = 16$$

27. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$0 \le x \le 5$ 에서 함수 $g(x) = (x-1)(x-3)$ 은

$x = 5$ 일 때, 최댓값 8,

$x = 2$ 일 때, 최솟값 -1 을 갖는다.

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}$ 의 그래프는

x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하므로

함수 $h(x)$ 는

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{4}$,

$x = 2$ 일 때, 최댓값 M 을 갖는다.

$h(5) = f(8) = \left(\frac{1}{2}\right)^{8-a} = \frac{1}{4}$

$2^{a-8} = 2^{-2}$, $a = 6$

$h(2) = f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-6} = 128$

따라서 $M = 128$

28. [출제의도] 거듭제곱근을 활용하여 문제 해결하기

$n \ge 2$ 에서 $n^2 - 17n + 19k$ 의 값을 $g(n)$ 이라 하자.

(ⅰ) n 이 홀수일 때, $n = 2m+1$ (m 은 자연수)

$g(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 1 이므로 $f(2m+1) = 1$

(ⅱ) n 이 짝수일 때, $n = 2m$ (m 은 자연수)

$g(2m) > 0$ 이면 $f(2m) = 2$

$g(2m) < 0$ 이면 $f(2m) = 0$

$g(2m) = 0$ 이라 하면 $19k = 2m(17-2m)$

이를 만족시키는 두 자연수 m 과 k 는 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ) 에 의하여

$\sum_{n=2}^{19} f(n) = \sum_{m=1}^{9} f(2m) + \sum_{m=1}^{9} f(2m+1)$

$\sum_{m=1}^{9} f(2m) = 19 - 1 \times 9 = 10$

$\sum_{m=1}^{9} f(2m) = 10$ 을 만족시키기 위해서는

$g(2m) > 0$ 인 m 의 개수가 5 이어야 한다. $\cdots$ ㉠

$2 \le n \le 7$ 이면 $g(n) > g(n+1)$

$n = 8$ 이면 $g(n) = g(n+1)$, 즉 $g(8) = g(9)$

$n \ge 9$ 이면 $g(n) < g(n+1)$

자연수 n 에 대하여 $g(n) = g(17-n)$ 이므로

$$g(18) > g(16) > g(15) = g(2) > g(14) > g(13) = g(4)$$
$$> g(12) > g(11) = g(6) > g(10) > g(9) = g(8)$$

㉠을 만족시키는 경우는

$g(18) > g(16) > g(2) > g(14) > g(4) > 0 > g(12)$

$g(4) = 4^2 - 17 \times 4 + 19k > 0$, $19k > 52$

$g(12) = g(5) = 5^2 - 17 \times 5 + 19k < 0$, $19k < 60$

$\frac{52}{19} < k < \frac{60}{19}$

따라서 자연수 k 는 3

29. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$ 는 $x = 2m$ 을 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로

$\lim_{x\to2m-} f(x) \ne \lim_{x\to2m+} f(x)$ $\cdots$ ㉠

조건 (가)에서 $\alpha = 2m$

$\lim_{x\to2m} g(x)$ 의 값이 존재한다고 가정하면

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to2m} f(x) = \lim_{x\to2m}\left\{\frac{f(x)}{g(x)} \times g(x)\right\}$$
$$= \lim_{x\to2m}\frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x\to2m} g(x)$$

$\lim_{x\to2m} f(x)$ 의 값이 존재하므로

㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 $\lim_{x\to2m} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

조건 (가)에 의하여 $\beta = 2m$

함수 $g(x)$ 는 $x = m+1$ 을 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로 $2m = m+1$, $m = 1$

$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}(ax-a) = 0$ 이고 조건 (나)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\{x^2 + (a-1)x - a^2 + 2\}$$
$$= -a^2 + a + 2 = -(a+1)(a-2) = 0$$

$a = -1$ 또는 $a = 2$

(ⅰ) $a = -1$ 인 경우

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to2-}\frac{x^2-2x+1}{-x+1} = -1$

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to2+}\frac{-3x-4}{x+2} = -\frac{5}{2}$

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)} \ne \lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)}$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a = 2$ 인 경우

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to2-}\frac{x^2+x-2}{2x-2} = 2$

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to2+}\frac{-3x+8}{x-1} = 2$

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)}$ 이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ) 에 의하여 $a = 2$, $m = 2 - 1 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & (x \le 2) \\ -3x + 8 & (x > 2) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 2 & (x \le 2) \\ x - 1 & (x > 2) \end{cases}$$

따라서 $m + g(a^2) = 1 + g(4) = 1 + 3 = 4$

30. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 추론하기

$y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$

$=2\cos(n\pi x)+\left|k\{1-\cos^2(n\pi x)\}-(k-1)\right|$

$=2\cos(n\pi x)+\left|1-k\cos^2(n\pi x)\right|$

$0\le x\le 2$ 에서 $t=\cos(n\pi x)$ 라 할 때,

함수 $f(t)=2t+\left|1-kt^2\right|\ (-1\le t\le 1)$이라 하자.

$1-kt^2=0$, $t=-\frac{1}{\sqrt{k}}$ 또는 $t=\frac{1}{\sqrt{k}}$

$$f(t)=\begin{cases}-kt^2+2t+1 & \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\le t\le\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\\ kt^2+2t-1 & \left(-1\le t<-\frac{1}{\sqrt{k}}\ \text{또는}\ \frac{1}{\sqrt{k}}<t\le 1\right)\end{cases}$$

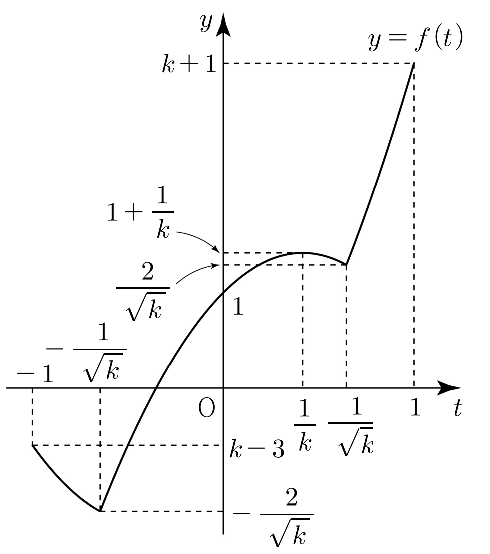
$$=\begin{cases}-k\left(t-\frac{1}{k}\right)^2+\left(1+\frac{1}{k}\right) & \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\le t\le\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\\ k\left(t+\frac{1}{k}\right)^2-\left(1+\frac{1}{k}\right) & \left(-1\le t<-\frac{1}{\sqrt{k}}\ \text{또는}\ \frac{1}{\sqrt{k}}<t\le 1\right)\end{cases}$$

$f(-1)=k-3$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{k}}$,

$f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\frac{2}{\sqrt{k}}$, $f(1)=k+1$

$k\le 4$ 이므로 $1\le\frac{2}{\sqrt{k}}$

함수 $y=f(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 a_2 는

$f(t_0)=-\frac{k}{4}$ 인 실수 $t_0\ (-1\le t_0\le 1)$에 대하여

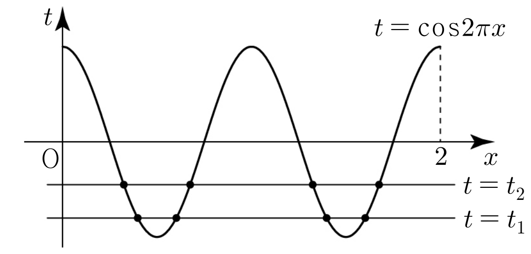
곡선 $t=\cos 2\pi x$ 와 직선 $t=t_0$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

$\frac{12}{5}<k\le 4$ 에서 $-\frac{2}{\sqrt{k}}\le-\frac{k}{4}<k-3$

(Ⅰ) $-\frac{2}{\sqrt{k}}<-\frac{k}{4}$ 인 경우

$f(t)=-\frac{k}{4}$ 인 실수 t 를

t_1, $t_2\ (-1<t_1<t_2<0)$ 이라 하면



$0\le x\le 2$ 에서

주기가 1인 곡선 $t=\cos 2\pi x$ 와

두 직선 $t=t_1$, $t=t_2$ 가 만나는

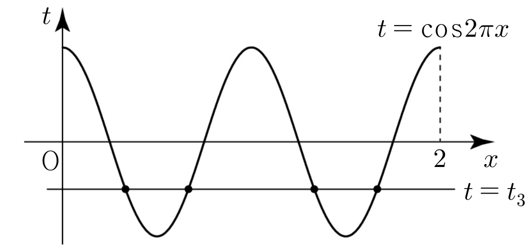
서로 다른 점의 개수 $a_2=(2+2)\times 2=8$

$0<a_2<6$ 을 만족시키지 않는다.

(Ⅱ) $-\frac{2}{\sqrt{k}}=-\frac{k}{4}$ 인 경우

$f(t)=-\frac{k}{4}$ 인 실수 t 를

$t_3=-\frac{1}{\sqrt{k}}\ (-1<t_3<0)$ 이라 하면



$0\le x\le 2$ 에서

주기가 1인 곡선 $t=\cos 2\pi x$ 와

직선 $t=t_3$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수

$a_2=2\times 2=4$ ⋯ ㉠

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여

$0<a_2<6$ 을 만족시키는 k 의 값은

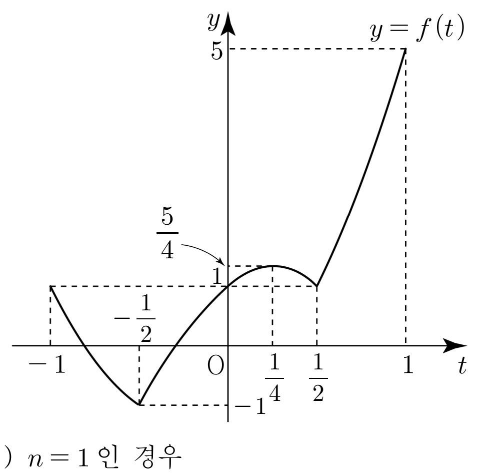
$-\frac{2}{\sqrt{k}}=-\frac{k}{4}$, $k=4$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여

$0\le x\le 2$ 에서 $t=\cos(n\pi x)\ (-1\le t\le 1)$ 일 때,

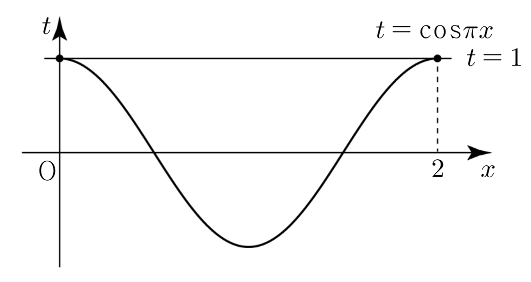
$$f(t)=\begin{cases}-4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4} & \left(-\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}\right)\\ 4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{4} & \left(-1\le t<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<t\le 1\right)\end{cases}$$

함수 $y=f(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(ⅰ) $n=1$ 인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(t)=5$ 인 실수 t 는 1



$0\le x\le 2$ 에서

주기가 2인 곡선 $t=\cos\pi x$ 와

직선 $t=1$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수

$a_1=2$

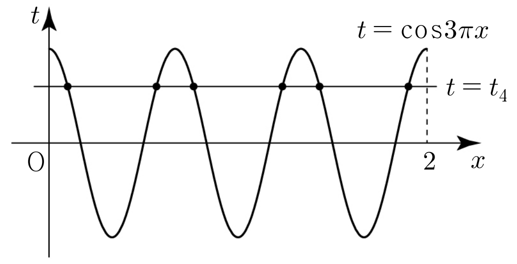
(ⅱ) $n=2$ 인 경우

㉠에 의하여 $a_2=4$

(ⅲ) $n=3$ 인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(t)=\frac{5}{3}$ 인 실수 t 를

$t_4\ (0<t_4<1)$ 이라 하면



$0\le x\le 2$ 에서

주기가 $\frac{2}{3}$ 인 곡선 $t=\cos 3\pi x$ 와

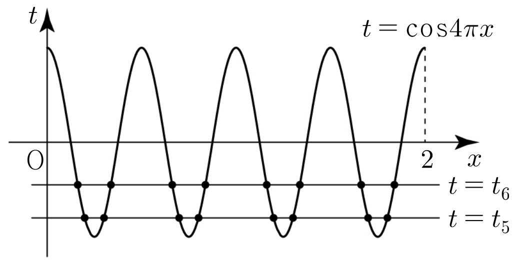
직선 $t=t_4$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수

$a_3=2\times 3=6$

(ⅳ) $n=4$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 $f(t)=-\frac{1}{2}$ 인 실수 t 를

t_5, $t_6\ (-1<t_5<t_6<0)$ 이라 하면



$0\le x\le 2$ 에서

주기가 $\frac{1}{2}$ 인 곡선 $t=\cos 4\pi x$ 와

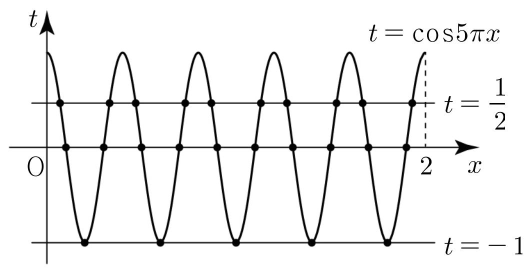
두 직선 $t=t_5$, $t=t_6$ 이 만나는

서로 다른 점의 개수 $a_4=(2\times 4)\times 2=16$

(ⅴ) $n=5$ 인 경우

조건 (나)에 의하여

$f(t)=1$ 인 실수 t 는 -1, 0, $\frac{1}{2}$



$0\le x\le 2$ 에서

주기가 $\frac{2}{5}$ 인 곡선 $t=\cos 5\pi x$ 와

세 직선 $t=-1$, $t=0$, $t=\frac{1}{2}$ 이 만나는

서로 다른 점의 개수 $a_5=5+(2\times 5)\times 2=25$

(ⅰ) ~ (ⅴ)에 의하여

$\sum_{n=1}^{5}a_n=2+4+6+16+25=53$