• 수학 영역 •

수학 정답

1	③	*2*	②	*3*	④	*4*	⑤	*5*	①
6	④	*7*	⑤	*8*	③	*9*	②	*10*	④
11	①	*12*	③	*13*	②	*14*	②	*15*	④
16	⑤	*17*	①	*18*	①	*19*	⑤	*20*	③
21	②	*22*	8	*23*	24	*24*	5	*25*	1
26	17	*27*	12	*28*	130	*29*	33	*30*	50

해 설

1. [출제의도] 다항식의 뺄셈을 계산한다.

$A-B=(3x^2-2xy+y^2)-(x^2+xy-y^2)$
$\quad=(3x^2-x^2)+(-2xy-xy)+(y^2+y^2)$
$\quad=2x^2-3xy+2y^2$

2. [출제의도] 조건의 부정을 이해한다.

실수 x에 대한 조건 'x는 1보다 크다.'의 부정은 'x는 1보다 크지 않다.', 즉 '$x \le 1$'이다.

3. [출제의도] 조합과 순열의 수를 계산한다.

${}_5\mathrm{C}_3\times 3!=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times(3\times2\times1)=5\times4\times3=60$

4. [출제의도] 합성함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$(g\circ f)(2)=g(f(2))$
$\quad=g(3)$
$\quad=5$

5. [출제의도] 두 직선의 평행 조건을 이해하여 직선의 y절편을 구한다.

직선 $3x+2y-5=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다. 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 점 $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{2}(x-2)+3$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+6$

이므로 구하는 y절편은 6이다.

[다른 풀이]

직선 $3x+2y-5=0$과 평행한 직선의 방정식은
$3x+2y+a=0$ (단, a는 상수)로 놓을 수 있다.
이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로
$3\times2+2\times3+a=0$, $a=-12$
따라서 직선 $3x+2y-12=0$의 y절편은 6이다.

6. [출제의도] 복소수의 실수부분과 허수부분을 이해하여 실수의 값을 구한다.

$\frac{a+3i}{2-i}=\frac{(a+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$\quad=\frac{2a+ai+6i+3i^2}{4-i^2}$
$\quad=\frac{(2a-3)+(a+6)i}{5}$
$\quad=\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}i$

이므로 복소수 $\frac{a+3i}{2-i}$의 실수부분은 $\frac{2a-3}{5}$이고 허수부분은 $\frac{a+6}{5}$이다.

실수부분과 허수부분의 합이 3이므로
$\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}=\frac{3a+3}{5}=3$
따라서 $a=4$

7. [출제의도] 순열을 이해하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

먼저 1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
이 각각에 대하여 1, 3, 5가 적혀 있는 세 장의 카드의 사이사이와 양끝의 네 곳 중에서 두 곳을 선택하여 2, 4가 적혀 있는 카드를 하나씩 나열하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times12=72$

[다른 풀이]

5장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
2, 4가 적혀 있는 두 장의 카드를 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$이고 이 각각에 대하여 2, 4가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는 $2!$이므로 짝수가 적혀 있는 카드끼리 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는
$4!\times2!=48$
따라서 짝수가 적혀 있는 카드끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는
$120-48=72$

8. [출제의도] 선분의 내분을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(2, -4)$에 대하여
선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{3\times2+1\times a}{3+1}, \frac{3\times(-4)+1\times0}{3+1}\right)$
즉, $\left(\frac{6+a}{4}, -3\right)$
이 점이 y축 위에 있으므로 $\frac{6+a}{4}=0$에서
$a=-6$
따라서 점 A의 좌표는 $(-6, 0)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{2-(-6)\}^2+(-4-0)^2}$
$\quad=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

9. [출제의도] 곱셈 공식을 이해하여 식의 값을 구한다.

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로
$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}$
$\quad=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$
$\quad=\frac{(\sqrt{2})^3-3\times(-2)\times\sqrt{2}}{-2}$
$\quad=\frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{-2}$
$\quad=-4\sqrt{2}$

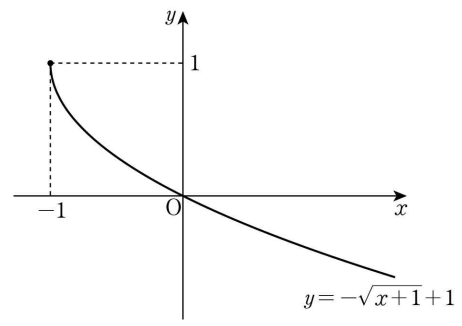
10. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하여 직선의 기울기를 구한다.

점 $(-1, 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=m\{x-(-1)\}$
즉, $y=mx+m$
$y=mx+m$을 $y=x^2+x+4$에 대입하면
$mx+m=x^2+x+4$
$x^2+(1-m)x+4-m=0$
직선 $y=mx+m$이 곡선 $y=x^2+x+4$에 접하므로 이차방정식 $x^2+(1-m)x+4-m=0$의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이다.
$D=(1-m)^2-4(4-m)$
$\quad=m^2+2m-15$
$\quad=(m+5)(m-3)=0$
에서 $m=-5$ 또는 $m=3$
$m>0$이므로 $m=3$

11. [출제의도] 무리함수를 이해하여 함수의 치역을 구한다.

함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a, -a)$를 지나므로
$-a=-\sqrt{a-a}+a+2$
$2a=-2$, $a=-1$
함수 $y=-\sqrt{x}$의 치역은 $\{y \mid y\le0\}$이고
함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 치역은 $\{y \mid y\le1\}$이다.

[참고]



12. [출제의도] 근과 계수의 관계를 이해하여 이차방정식의 계수를 구한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고, 한 근이 $\frac{b}{2}+i$로 허수이므로 다른 근은 $\frac{b}{2}+i$의 켤레복소수인 $\frac{b}{2}-i$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 합은 $-a$이고 두 근의 곱은 b이다.
$\left(\frac{b}{2}+i\right)+\left(\frac{b}{2}-i\right)=-a$에서
$b=-a$ …… ㉠
$\left(\frac{b}{2}+i\right)\left(\frac{b}{2}-i\right)=b$에서
$\frac{b^2}{4}+1=b$, $b^2-4b+4=(b-2)^2=0$
$b=2$
㉠에서 $a=-2$
따라서 $ab=(-2)\times2=-4$

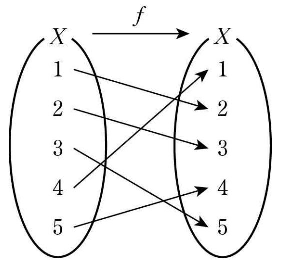
13. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 부분집합의 개수를 구한다.

$A\cup X=A$에서 $X\subset A$이고 $B\cap X=\varnothing$이므로
집합 X는 집합 $A-B$의 부분집합이다.
집합 $A-B$는 50 이하의 6의 배수 중 4의 배수가 아닌 수의 집합이므로 $A-B=\{6, 18, 30, 42\}$
따라서 집합 X의 개수는 집합 $A-B$의 부분집합의 개수인 $2^4=16$이다.

14. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 추론한다.

함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.
$f(1)+2f(3)=12$이고 f는 일대일대응이므로
$f(1)=2$, $f(3)=5$ …… ㉠
$f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$에서 $f^{-1}(1)\in X$, $f^{-1}(3)\in X$이므로
$f^{-1}(1)=3$, $f^{-1}(3)=1$
또는 $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$
또는 $f^{-1}(1)=5$, $f^{-1}(3)=3$이다.
㉠에서 $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(5)=3$이고 함수 f^{-1}도 일대일대응이므로 $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$이다.
즉, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=1$이고
함수 f는 일대일대응이므로 $f(5)=4$이다.
즉, $f^{-1}(4)=5$
따라서 $f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$

[참고]



15. **[출제의도] 연립부등식을 이해하여 조건을 만족시키는 미지수를 구한다.**

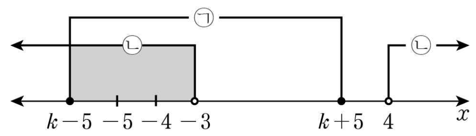
$|x-k| \le 5$에서 $-5 \le x-k \le 5$

$k-5 \le x \le k+5$ …… ㉠

$x^2-x-12>0$에서 $(x+3)(x-4)>0$

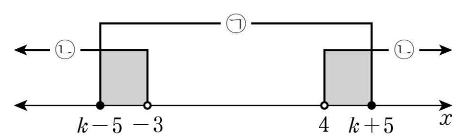
$x<-3$ 또는 $x>4$ …… ㉡

(ⅰ) $k+5 \le 4$, 즉 $k \le -1$일 때



㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 모두 -3보다 작으므로 그 합은 7보다 작게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

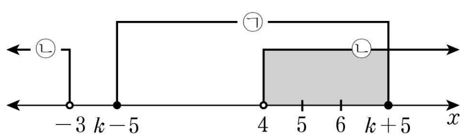
(ⅱ) $k-5<-3$이고 $k+5>4$, 즉 $-1<k<2$일 때



$k=0$이면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -5, -4, 5이고 그 합은 -4가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$k=1$이면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -4, 5, 6이고 그 합은 7이 되어 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $k-5 \ge -3$, 즉 $k \ge 2$일 때



㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 두 개 이상이고 모두 4보다 크므로 그 합은 7보다 크게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $k=1$이다.

16. **[출제의도] 삼차방정식의 근에 대한 조건을 이용하여 문제를 해결한다.**

$x^3-x^2-kx+k=0$에서

$x^2(x-1)-k(x-1)=0$

$(x-1)(x^2-k)=0$

$x=1$ 또는 $x^2=k$

0이 아닌 실수 k에 대하여 $k>0$이면 주어진 방정식의 모든 근이 실수이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$k<0$이면 주어진 방정식의 실근은 $x=1$뿐이고, α, β 중에서 실수가 존재하므로 $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$이다.

(ⅰ) $\alpha=1$일 때

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\beta=-\frac{1}{2}\alpha^2=-\frac{1}{2}$이므로

α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\beta=1$일 때

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\alpha^2=-2$

이때 α, γ는 방정식 $x^2=k$의 근이므로

$k=\alpha^2=-2$이고 $\gamma^2=k=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\beta=1$, $\gamma^2=-2$

따라서 $\beta^2+\gamma^2=1^2+(-2)=-1$

17. **[출제의도] 이차부등식을 포함한 문장이 참인 명제가 되도록 하는 문제를 해결한다.**

실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

'모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참인 명제가 되려면 $P=U$이어야 한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1 \ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-1 \le 0$

$(a+1)(a-1) \le 0$, $-1 \le a \le 1$

그러므로 정수 a는 -1, 0, 1이다.

이때 'p는 $simq$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P \subset Q^C$이어야 하고 $P=U$이므로 $Q^C=U$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$

$(b+3)(b-3)<0$, $-3<b<3$

그러므로 정수 b는 -2, -1, 0, 1, 2이다.

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3 \times 5=15$이다.

18. **[출제의도] 유리함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.**

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합은 1이다.

곡선 $y=f(x)$가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=2$, $y=-2$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $y=b$이므로

$b=2$ 또는 $b=-2$ …… ㉠

$f(x)=\frac{a}{x}+b$, 즉 $y=\frac{a}{x}+b$에서

$\frac{a}{x}=y-b$, $x=\frac{a}{y-b}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{a}{x-b}$

그러므로 $f^{-1}(x)=\frac{a}{x-b}$이다.

조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$이므로

$\frac{a}{2-b}=\frac{a}{2}+b-1$ …… ㉡

㉡에서 $b \ne 2$이므로 ㉠에서 $b=-2$이다.

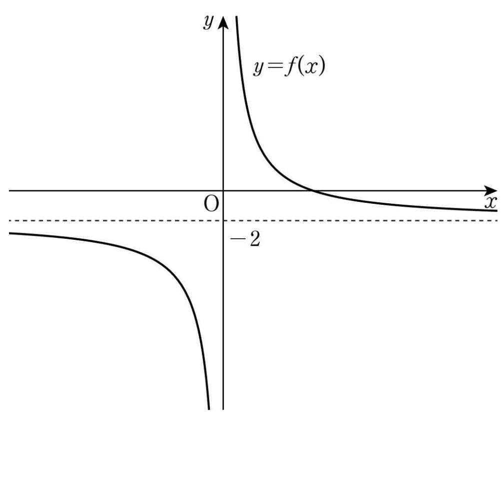
㉡에 $b=-2$를 대입하면

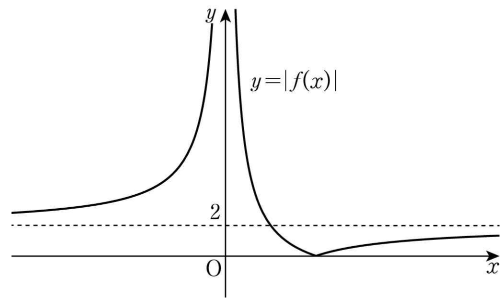
$\frac{a}{4}=\frac{a}{2}-3$, $a=12$

따라서 $f(x)=\frac{12}{x}-2$이므로

$f(8)=\frac{12}{8}-2=-\frac{1}{2}$

[참고]





19. **[출제의도] 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.**

드모르간의 법칙에 의하여

$A \cup B^C=(A^C \cap B)^C=(B-A)^C$이므로 조건 (가)에서

$n(A \cup B^C)=n((B-A)^C)=7$

$B-A=\{4, 7\}$에서 $n(B-A)=2$

$(B-A) \cup (B-A)^C=U$, $(B-A) \cap (B-A)^C=\varnothing$

이므로

$n(U)=n(B-A)+n((B-A)^C)$

$=n(B-A)+n(A \cup B^C)$

$=2+7=9$

그러므로 $k=9$이고 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

조건 (가)에서 $B-A=\{4, 7\}$이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A=\{4, 7\}$의 모든 원소의 합인 11이다.

따라서 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로 m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

(ⅰ) $m=6$일 때

집합 A는 $\{1, 2, 3, 6\}$이다.

이때 $A-B=\{2, 3, 6\}$이면 집합 $A-B$의 원소의 합이 11이므로 조건을 만족시킨다.

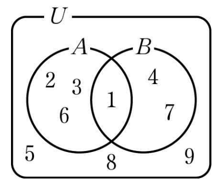
(ⅱ) $m=9$일 때

집합 A는 $\{1, 3, 9\}$이다.

이때 집합 $A-B$의 원소의 합이 11인 경우는 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $m=6$이고 이때 $B=\{1, 4, 7\}$이다.

즉, $A \cup B=\{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 4, 7\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$



$A^C \cap B^C=(A \cup B)^C=\{5, 8, 9\}$이므로

집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은

$5+8+9=22$

20. **[출제의도] 두 직선의 위치 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 점을 구하는 문제를 해결한다.**

두 식 $2x+y+2=0$, $x-2y-4=0$을 연립하면

$x=0$, $y=-2$이므로

두 직선 l_1, l_2의 교점 A는

A$(0, -2)$

직선 l_1이 x축과 만나는 점 B는

$2x+0+2=0$, $x=-1$

에서 B$(-1, 0)$

직선 l_2가 x축과 만나는 점 C는

$x-0-4=0$, $x=4$

에서 C$(4, 0)$

ㄱ. 두 직선 l_1, l_2의 기울기는 각각 -2, $\frac{1}{2}$이다.

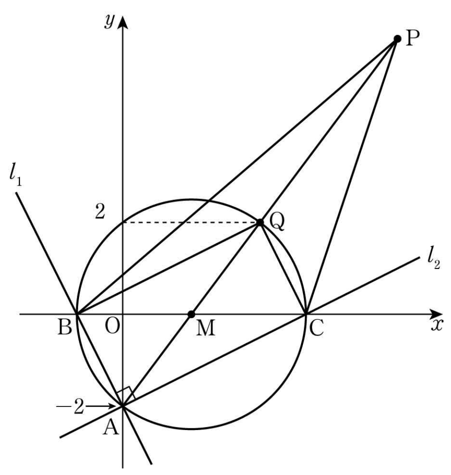
두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다. (참)

ㄴ. 점 Q가 삼각형 PBC의 무게중심이므로 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 QBC의 넓이의 3배이다.

조건 (나)에서 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 3배이므로 두 삼각형 QBC, ABC

의 넓이는 서로 같다.
두 삼각형 QBC, ABC에서 선분 BC가 공통이므로 점 Q와 직선 BC 사이의 거리는 점 A와 직선 BC 사이의 거리인 2이다. 즉, 점 Q의 y좌표는 2 또는 -2이다. 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 점 P, B, C의 x좌표의 합과 y좌표의 합은 모두 양수이므로 점 Q도 제1사분면에 있는 점이다. 따라서 점 Q의 y좌표는 2이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 삼각형 ABC의 외접원의 지름은 선분 BC이다. 원의 중심은 선분 BC의 중점 M이므로 그 좌표는
$\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$



점 A의 y좌표는 -2, 점 Q의 y좌표는 2이고, 점 Q는 제1사분면에 있으므로 두 점 Q, A는 점 M에 대하여 서로 대칭이다. 따라서 세 점 A, M, Q는 한 직선 위에 있다.
점 Q는 삼각형 PBC의 무게중심이므로 세 점 M, Q, P도 한 직선 위에 있다. 그러므로 네 점 A, M, Q, P는 모두 한 직선 위에 있다. $\overline{AM}=\overline{MQ}$이고 $\overline{MQ}:\overline{QP}=1:2$이므로 $\overline{AP}:\overline{MP}=4:3$이다.
점 P는 선분 AM을 $4:3$으로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는
$\left(\frac{4\times\frac{3}{2}-3\times 0}{4-3}, \frac{4\times 0-3\times(-2)}{4-3}\right)$, 즉 $(6, 6)$
따라서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은 12이다. (거짓)

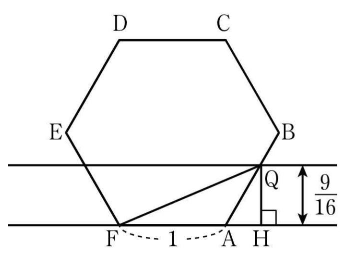
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

ㄴ. 세 점 $A(0, -2)$, $B(-1, 0)$, $C(4, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발이 원점 O이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OA}=\frac{1}{2}\times 5\times 2=5$
이다. 그러므로 조건 (나)에서 삼각형 PBC의 넓이는 15이다.
점 P의 좌표를 $(a, b)(a>0,\ b>0)$이라 하고 점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PBC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times 5\times b=\frac{5}{2}b$
이다.
$\frac{5}{2}b=15$에서 $b=6$이고 점 P의 좌표는 $(a, 6)$이다.
이때 삼각형 PBC의 무게중심 Q의 좌표는
$\left(\frac{a+(-1)+4}{3}, \frac{6+0+0}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{3}+1, 2\right)$이다.
따라서 점 Q의 y좌표는 2이다. (참)

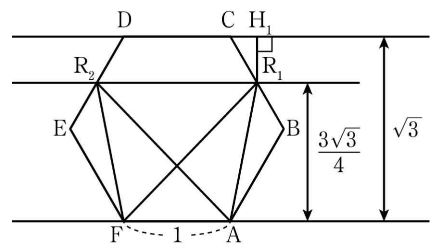
ㄷ. ㄱ에서 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 삼각형 ABC의 외접원의 지름은 선분 BC이다. 원의 중심은 선분 BC의 중점 M이므로 그 좌표는
$\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
$\overline{BC}=|4-(-1)|=5$이므로 원의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다. 즉, 삼각형 ABC의 외접원의 방정식은
$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$
점 Q가 이 원 위의 점이므로
$\left(\frac{a}{3}+1-\frac{3}{2}\right)^2+2^2=\frac{25}{4}$
$\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$
$\frac{a}{3}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{a}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$
$a=6$ 또는 $a=-3$
$a>0$이므로 $a=6$이고 점 P의 좌표는 $(6, 6)$이다.
따라서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은 $6+6=12$이다. (거짓)

21. **[출제의도] 합성함수의 성질을 이용하여 정육각형 위를 움직이는 점의 위치를 추론한다.**
$(f\circ f)(a)=f(f(a))=\frac{9}{32}$에서 $f(a)=b$라 하면
$f(b)=\frac{9}{32}$
이다. 함수 $f(x)$가 삼각형 PFA의 넓이이므로 함수 $f(x)$는 점 P가 선분 CD에 있을 때 최댓값을 갖는다. 선분 AC의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 MAB에서 $\angle MAB=30°$이므로
$\overline{AC}=2\overline{AM}$
$=2\times\overline{AB}\cos 30°$
$=2\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$
함수 $f(x)$의 최댓값은
$\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
이므로 $0<b\le\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.
점 P가 점 A로부터 움직인 거리가 b인 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AB 위에 있고, 삼각형 QFA의 넓이는 $\frac{9}{32}$이다.
점 Q에서 직선 FA에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 QFA의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{QH}=\frac{1}{2}\times 1\times\overline{QH}=\frac{9}{32}$
이므로 $\overline{QH}=\frac{9}{16}$



[그림 1]

[그림 1]의 직각삼각형 QAH에서 $\angle QAH=60°$이므로
$b=\overline{AQ}=\overline{QH}\times\frac{1}{\sin 60°}$
$=\frac{9}{16}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$
같은 방법으로 $f(a)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$을 만족시키는 a의 값을 구하자.
점 P가 점 A로부터 움직인 거리가 a인 점을 R라 하고, 점 R에서 직선 FA에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 RFA의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{RI}$이므로
$f(a)=\frac{1}{2}\times 1\times\overline{RI}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$에서 $\overline{RI}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.
$\overline{RI}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이 되는 점 R의 위치는 [그림 2]의 R_1, R_2이다.



[그림 2]

점 R의 위치가 R_1일 때, $a=\overline{AB}+\overline{BR_1}$이다.
점 R_1에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 직각삼각형 R_1CH_1에서 $\angle R_1CH_1=60°$이므로
$a=\overline{AB}+\overline{BR_1}$
$=\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{R_1C}$
$=1+1-\overline{R_1H_1}\times\frac{1}{\sin 60°}$
$=2-\left(\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\times\frac{2}{\sqrt{3}}$
$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
$0<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(5-x)$가 성립하므로 점 R의 위치가 R_2일 때의 실수 a의 값은 $5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$이다.
즉, $a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=\frac{7}{2}$
따라서 $(f\circ f)(a)=\frac{9}{32}$를 만족시키는 모든 실수 a $(0<a<5)$의 값의 곱은
$\frac{3}{2}\times\frac{7}{2}=\boxed{\frac{21}{4}}$
이다.
따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $r=\frac{21}{4}$이므로
$\frac{r}{p\times q}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}}=\frac{28}{3}$

22. **[출제의도] 합집합의 성질을 이용하여 미지수를 계산한다.**
$10\notin A$이고 $A\cup B=\{6, 8, 10\}$이므로 $10\in B$이다.
$a=10$이면 $B=\{10, 12\}$이고 $A\cup B=\{6, 8, 10, 12\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
$a+2=10$이면 $B=\{8, 10\}$이고 $A\cup B=\{6, 8, 10\}$이므로 조건을 만족시킨다.
따라서 $a+2=10$, $a=8$

23. **[출제의도] 점의 대칭이동과 평행이동의 성질을 이용하여 점의 좌표를 계산한다.**
점 $(5, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, 5)$이다. 점 $(4, 5)$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(4, 6)$이다.
따라서 $a=4$, $b=6$이므로 $ab=24$

24. **[출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 미지수를 계산한다.**
주어진 등식에서 좌변의 이차항은 $2x^2$, 우변의 이차항은 ax^2이므로 이차항의 계수를 비교하면
$a=2$
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$3\times(-2)+8=0-2b+0$, $b=-1$
주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$0+8=0+0+2c$, $c=4$
따라서 $a+b+c=2+(-1)+4=5$

[다른 풀이]
좌변을 전개하면
$(2x+3)(x-2)+8=2x^2+3x-4x-6+8$
$=2x^2-x+2$ …… ㉠
우변을 전개하면

$$ax(x-2)+b(x-2)+cx=ax^2-2ax+bx-2b+cx$$
$$=ax^2+(-2a+b+c)x-2b \text{ ······ ㉡}$$
㉠, ㉡에서 $a=2$, $-2a+b+c=-1$, $-2b=2$
따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=4$이고 $a+b+c=5$

25. [출제의도] 원과 좌표축의 위치 관계를 이해하여 원의 방정식을 구한다.

원의 중심이 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.
원의 중심이 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로
$r=r^2+r-1$, $r^2=1$
$r>0$이므로 $r=1$
중심이 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
즉, $x^2+y^2+2x-2y+1=0$
$a=2$, $b=-2$, $c=1$
따라서 $a+b+c=2+(-2)+1=1$

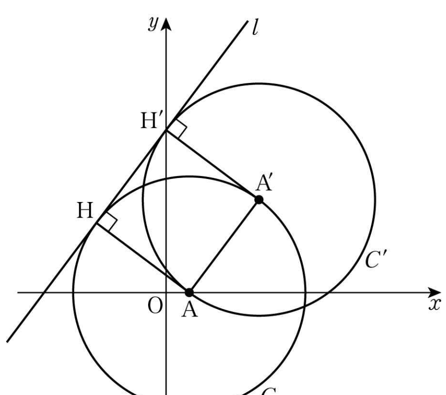
[다른 풀이]

원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$의 중심을 A라 하면 점 A는 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 점 A는 직선 $y=-x$ 위에 있다.
또, 점 A는 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로
$x^2-x-1=-x$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$
점 A의 x좌표는 음수이므로 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$이다.
따라서 주어진 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
즉, $x^2+y^2+2x-2y+1=0$
$a=2$, $b=-2$, $c=1$
따라서 $a+b+c=2+(-2)+1=1$

26. [출제의도] 일대일대응을 이해하여 식의 최댓값을 구한다.

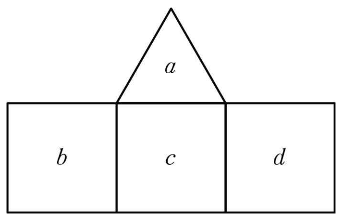
$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$에서 이 함수가 일대일대응이 되기 위해서는 $a\ge 2$이어야 한다.
$a\ge 2$일 때, 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y \mid y\ge f(a)\}$이고 치역이 집합 $Y=\{y \mid y\ge b\}$와 같아야 하므로 $b=f(a)$이다.
$$a-b=a-f(a)$$
$$=-a^2+5a-3$$
$$=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$
$a\ge 2$에서 $a-b$의 최댓값은 $a=\frac{5}{2}$일 때 $\frac{13}{4}$이다.
따라서 $p=4$, $q=13$이므로 $p+q=17$

27. [출제의도] 도형의 이동을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 합을 구하는 문제를 해결한다.



두 원 C, C'의 중심을 각각 A, A′이라 하자.
원 C의 중심은 $\mathrm{A}(1,\ 0)$이므로 조건 (나)에서
$$r=\frac{|4\times1-3\times0+21|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$$
원 C'의 방정식은 $(x-a-1)^2+(y-b)^2=25$이고 조건 (가)에서 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나므로
$(1-a-1)^2+(0-b)^2=25$
$a^2+b^2=25$ ······ ㉠
직선 $4x-3y+21=0$을 l이라 하고 두 점 A, A′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{A'H'}}$이고 $\overline{\mathrm{AH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{A'H'}}\perp l$이므로 직선 AA′은 직선 l과 평행하다.
직선 l의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로
$\frac{b-0}{(1+a)-1}=\frac{4}{3}$, $b=\frac{4}{3}a$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $a^2+b^2=a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2=\frac{25}{9}a^2=25$
$a>0$, $b>0$이므로 $a=3$, $b=4$
따라서 $a+b+r=3+4+5=12$

28. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.



그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례로 b, c, d라 하자.
조건 (가)에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$이다.
조건 (나)에서 $b\ne c$, $c\ne d$이다.
(ⅰ) $b\ne d$일 때
a, b, c, d가 서로 다르다.
6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_4=15$
이 각각에 대하여 택한 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1\times3!=6$
따라서 $b\ne d$인 경우의 수는 $15\times6=90$
(ⅱ) $b=d$일 때
$a>b=d$, $a>c$이므로 a, b, c, d 중 서로 다른 수의 개수는 3이다.
6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$
이 각각에 대하여 택한 3개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1\times2!=2$
따라서 $b=d$인 경우의 수는 $20\times2=40$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $90+40=130$

[다른 풀이]

조건 (가), (나)에서 a보다 작은 수가 적어도 2개 존재해야 하므로 $a\ge3$
(ⅰ) $a=3$일 때
c는 1, 2 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 1, 2 중 c가 아닌 수이면 되므로 $1\times1=1^2$
따라서 $a=3$인 경우의 수는 $2\times1^2=2$
(ⅱ) $a=4$일 때
c는 1, 2, 3 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3 중 c가 아닌 수이면 되므로 $2\times2=2^2$
따라서 $a=4$인 경우의 수는 $3\times2^2=12$
(ⅲ) $a=5$일 때
c는 1, 2, 3, 4 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4 중 c가 아닌 수이면 되므로 $3\times3=3^2$
따라서 $a=5$인 경우의 수는 $4\times3^2=36$
(ⅳ) $a=6$일 때
c는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4, 5 중 c가 아닌 수이면 되므로 $4\times4=4^2$
따라서 $a=6$인 경우의 수는 $5\times4^2=80$
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는
$2+12+36+80=130$

29. [출제의도] 다항식의 나눗셈과 항등식을 이용하여 다항식을 구하는 문제를 해결한다.

다항식 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나눈 몫은 $x+2$이고 나머지는 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로
$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2$ ······ ㉠
이고 이때 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수는 $x^2+g(x)$의 차수보다 작다.
$g(x)$의 차수가 $n\ (n\ge2)$이면 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $2n$으로 $x^2+g(x)$의 차수인 n보다 크게 되어 조건을 만족시키지 않는다. $g(x)$가 상수이면 $x^2+g(x)$의 차수와 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 2로 같게 되어 조건을 만족시키지 않는다. 그러므로 $g(x)$의 차수는 1이다.
이때 $x^2+g(x)$는 이차식이므로 $\{g(x)\}^2-x^2$은 일차식 또는 상수이어야 한다. $g(x)$의 일차항의 계수가 양수이므로 $g(x)=x+a$(단, a는 상수)로 놓을 수 있다.
㉠에서
$$f(x)=(x^2+x+a)(x+2)+(x+a)^2-x^2$$
$$=(x^2+x+a)(x+2)+2ax+a^2$$
조건 (나)에서 $f(x)$가 $g(x)=x+a$로 나누어떨어지므로 $f(-a)=0$이다.
$$f(-a)=(a^2-a+a)(-a+2)-2a^2+a^2$$
$$=-a^3+a^2=0$$
$a^2(a-1)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=1$
$a=0$이면 $f(x)=(x^2+x)(x+2)$에서 $f(0)=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.
$a=1$이면 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$에서
$f(0)\ne0$이므로 조건을 만족시킨다.
따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$이고
$f(2)=7\times4+4+1=33$

[다른 풀이]

다항식 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나눈 몫이 $x+2$이고 나머지가 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로
$$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2$$
$$=x^2(x+2)+(x+2)g(x)+\{g(x)\}^2-x^2$$
$$=(x+2)g(x)+\{g(x)\}^2+x^2(x+2)-x^2$$
$$=g(x)\{x+2+g(x)\}+x^3+x^2$$
$$=g(x)\{x+2+g(x)\}+x^2(x+1)$$
이때 $f(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어지므로 $x^2(x+1)$도 $g(x)$로 나누어떨어져야 한다. ······ ㉠
$f(0)=g(0)\{2+g(0)\}\ne0$에서
$g(0)\ne0$이고 $g(0)\ne-2$이다. ······ ㉡
$g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 ㉠, ㉡에 의하여
$g(x)=k(x+1)\ (k>0)$
한편, $x^2+g(x)$로 나눈 나머지가 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 작아야 한다.
$$x^2+g(x)=x^2+k(x+1)$$
$$=x^2+kx+k$$
$$\{g(x)\}^2-x^2=\{k(x+1)\}^2-x^2$$
$$=(k^2-1)x^2+2k^2x+k^2$$
즉, $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 작으려면 $k^2-1=0$이어야 한다.
$k>0$이므로 $k=1$
$$f(x)=(x+1)\{x+2+(x+1)\}+x^2(x+1)$$
$$=(x+1)(2x+3)+x^2(x+1)$$
따라서
$$f(2)=(2+1)(2\times2+3)+2^2\times(2+1)$$
$$=3\times7+4\times3=33$$

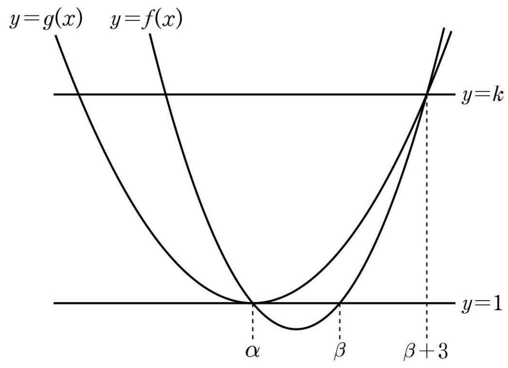
30. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 함수를 추론한다.

$\alpha\in A$, $\alpha\in B$이므로 $f(\alpha)=g(\alpha)=1$이다.
또한 $\beta\in A$, $\beta\notin B$이므로
$f(\beta)=1$, $g(\beta)\ne1$ 또는 $f(\beta)\ne1$, $g(\beta)=1$이다.
즉, 방정식 $f(x)=1$의 모든 실근의 집합을 C, 방정식

$g(x)=1$ 의 모든 실근의 집합을 D 라 하면
$C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$ 또는 $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$ 이다.

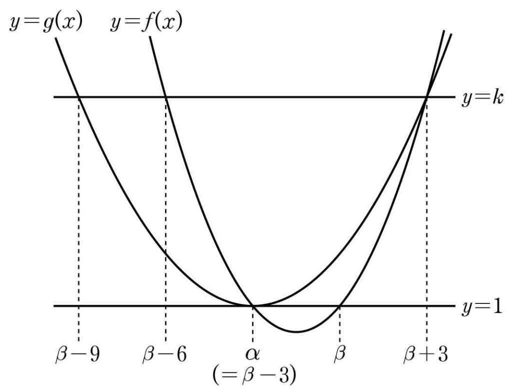
(i) $C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$ 일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 식은
$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+1$, $g(x)=(x-\alpha)^2+1$ …… ㉠
이때 $\beta+3 \in B$ 에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$ 이므로
$2(\beta+3-\alpha)\times 3+1=(\beta+3-\alpha)^2+1$
$\beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=6$
즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=3$
$\alpha<\beta$ 이므로 $\beta-\alpha=3$ …… ㉡
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $y=1$ 은
[그림 1]과 같다.



[그림 1]

[그림 1]에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 k 의 값은 $k=g(\beta+3)$ 이다. …… ㉢
곡선 $y=f(x)$ 의 축의 방정식은 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 이므로
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표는
$\alpha-3$, $\beta+3$ 이다.
이때 $\alpha-3=(\beta-3)-3=\beta-6$ 이다.
또한, 곡선 $y=g(x)$ 의 축의 방정식은 $x=\alpha$ 이므로
곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표는
$2\alpha-\beta-3$, $\beta+3$ 이다.
이때 $2\alpha-\beta-3=2(\beta-3)-\beta-3=\beta-9$ 이다.



[그림 2]

[그림 2]에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$ 의 서로 다른 실근은 $\beta-9$, $\beta-6$, $\beta+3$ 이고 그 합이 12 이므로
$(\beta-9)+(\beta-6)+(\beta+3)=12$, $\beta=8$
㉡에서 $\alpha=5$
㉠에서 $f(x)=2(x-5)(x-8)+1$, $g(x)=(x-5)^2+1$
㉢에서 $k=g(\beta+3)=g(11)=(11-5)^2+1=37$

(ii) $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$ 일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 식은
$f(x)=2(x-\alpha)^2+1$, $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+1$ 이다.
이때 $\beta+3 \in B$ 에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$ 이므로
$2(\beta+3-\alpha)^2+1=(\beta+3-\alpha)\times 3+1$
$\beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=\dfrac{3}{2}$
즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=-\dfrac{3}{2}$
이때 두 경우 모두 $\alpha<\beta$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=5$, $\beta=8$, $k=37$
따라서 $\alpha+\beta+k=5+8+37=50$