2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

[공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ④	02. ⑤	03. ①	04. ①	05. ③
06. ④	07. ②	08. ④	09. ⑤	10. ②
11. ②	12. ③	13. ⑤	14. ③	15. ②
16. 2	17. 11	18. 4	19. 6	20. 8
21. 24	22. 61			

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$

$= 2^{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})}$

$= 2^2$

$= 4$

정답 ④

2. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = \int (3x^2 - 2x)dx$

$= x^3 - x^2 + C$ (C는 적분상수)

$f(1) = 1^3 - 1^2 + C = 1$에서

$C = 1$

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$이므로

$f(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 삼각함수의 정의를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\tan\theta = \frac{12}{5}$이고 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로

각 θ가 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 어떤 원의 교점이

$\mathrm{P}(-5,\ -12)$이다.

따라서 원점 O에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$

이므로

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{-12}{13} + \frac{-5}{13} = -\frac{17}{13}$$

정답 ①

4. 출제의도 : 함수의 그래프에서 좌극한의 값과 우극한의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -2$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = 0$

따라서

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$

$= -2 + 0 = -2$

정답 ①

5. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x) = (x^2+3)f(x)$에서

$g'(x) = 2xf(x) + (x^2+3)f'(x)$

따라서

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$
$=2\times2+4\times1$
$=8$

정답 ③

6. 출제의도 : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$의 교점의 x좌표는
$3x^2-x=5x$
$3x^2-6x=0$
$3x(x-2)=0$
$x=0$ 또는 $x=2$
구간 $[0, 2]$에서 직선 $y=5x$가 곡선 $y=3x^2-x$보다 위쪽에 있거나 만나므로 구하는 넓이는

$$S=\int_0^2\{5x-(3x^2-x)\}dx$$
$$=\int_0^2(6x-3x^2)dx$$
$$=\left[3x^2-x^3\right]_0^2$$
$$=3(4-0)-(8-0)$$
$$=4$$

정답 ④

7. 출제의도 : 등차수열에서 주어진 조건을 만족시키는 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$S_3-S_2=a_3$이므로
$a_6=2a_3$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$2+5d=2(2+2d)$
$2+5d=4+4d$에서
$d=2$
따라서 $a_{10}=2+9\times2=20$이므로

$$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}$$
$$=\frac{10\times(2+20)}{2}$$
$$=110$$

정답 ②

8. 출제의도 : 함수의 연속의 성질을 이용하여 주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $f(x)$가 $x=a$를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$$

이어야 한다.
이때,

$$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a+}(2x-a)^2=a^2$$
$$\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}(-2x+6)^2=(-2a+6)^2$$
$$\{f(a)\}^2=(2a-a)^2=a^2$$

이므로

$a^2=(-2a+6)^2$에서

$3(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$2+6=8$

정답 ④

9. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$a_{12}=\frac{1}{2}$이고 $a_{12}=\frac{1}{a_{11}}$이므로

$a_{11}=2$

또, $a_{11}=8a_{10}$이므로

$a_{10}=\frac{1}{4}$

또, $a_{10}=\frac{1}{a_9}$이므로

$a_9=4$

또, $a_9=8a_8$이므로

$a_8=\frac{1}{2}$

또, $a_8=\frac{1}{a_7}$이므로

$a_7=2$

또, $a_7=8a_6$이므로

$a_6=\frac{1}{4}$

또, $a_6=\frac{1}{a_5}$이므로

$a_5=4$

또, $a_5=8a_4$이므로

$a_4=\frac{1}{2}$

또, $a_4=\frac{1}{a_3}$이므로

$a_3=2$

또, $a_3=8a_2$이므로

$a_2=\frac{1}{4}$

또, $a_2=\frac{1}{a_1}$이므로

$a_1=4$

따라서

$a_1+a_4=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 로그함수의 그래프가 만나는 점이 조건을 만족하도록 하는 n의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에서 $x>0$

$-\log_n(x+3)+1=\log_n\frac{n}{x+3}$이므로

$\log_n x=\log_n\frac{n}{x+3}$에서

$x=\frac{n}{x+3}$

$x^2+3x-n=0$

$f(x)=x^2+3x-n$이라 하면

$f(1)<0$, $f(2)>0$이어야 한다.

$f(1)=4-n<0$에서 $n>4$

$f(2)=10-n>0$에서 $n<10$

따라서 $4<n<10$이므로

n의 값은 $5, 6, 7, 8, 9$이고, 그 합은

$5+6+7+8+9=35$

정답 ②

11. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$

이므로

조건 (가)에서

$$\int_{-1}^0 g(x)dx = \int_{-1}^0 \{-f(x+1)+1\}dx$$
$$=1-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x)dx$$
$$=\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$$
$$=1$$

조건 (나)에서

$g(x+2)=g(x)$

이므로

$$\int_{-3}^2 g(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$$
$$=2\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_{-1}^0 g(x)dx$$
$$=2\times1+\frac{5}{6}$$
$$=\frac{17}{6}$$

정답 ②

12. **출제의도** : 코사인법칙과 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABD에서

$\angle BAC=\angle BDA$이고 $\overline{AB}=4$이므로

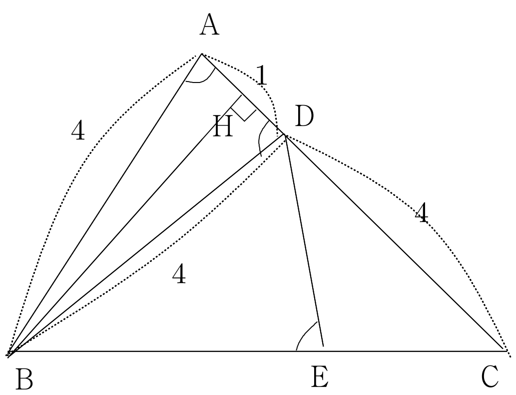
$\overline{BD}=4$ ……㉠

이때, 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH}=\overline{AB}\cos(\angle BAC)=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

그러므로

$\overline{AD}=1$

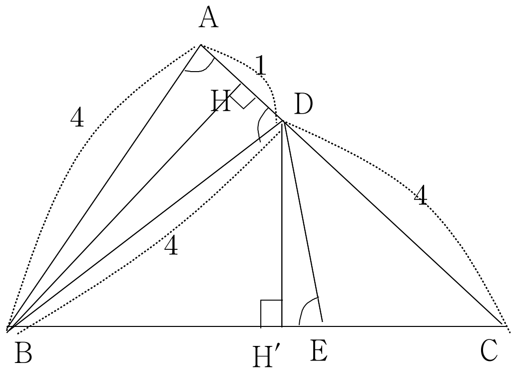


삼각형 BCD는 $\overline{DB}=\overline{DC}=4$인 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H′, $\overline{DE}=x$라 하면

$$\overline{DH'}=x\sin(\angle H'ED)$$
$$=x\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{63}}{8}x \quad \cdots\cdots \text{ ㉡}$$



한편, 삼각형 ABC에서

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$
$$-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$$
$$= 4^2 + 5^2 - 2\times4\times5\times\frac{1}{8}$$
$$= 36$$

이므로

$\overline{BC} = 6$

이때,

$$\overline{BH'} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3 \quad \cdots\cdots \text{ ㉢}$$

직각삼각형 DBH′에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면

$$4^2 = \left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2 + 3^2$$

$$\frac{63}{64}x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{64}{9}$$

$\overline{DE} = x$이므로 $x > 0$

따라서 $\overline{DE} = \dfrac{8}{3}$

정답 ③

13. **출제의도** : 주기함수에서 함숫값을 구하고, 그 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $k = 1, 4, 9, 16$일 때

$f(1) = 1$이고 $f(x+1) = f(x)$이므로

$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$에서

$f(\sqrt{k}) = 1$

(ⅱ) $k \neq 1, 4, 9, 16$일 때

$f(\sqrt{k}) = 3$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k = 210$이고, $1+4+9+16 = 30$이므로

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{20}\left\{k\times\frac{f(\sqrt{k})}{3}\right\}$$
$$= 30\times\frac{1}{3} + (210-30)\times\frac{3}{3}$$
$$= 10 + 180 = 190$$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
$$= 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$에서

$x = -1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

EBS

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

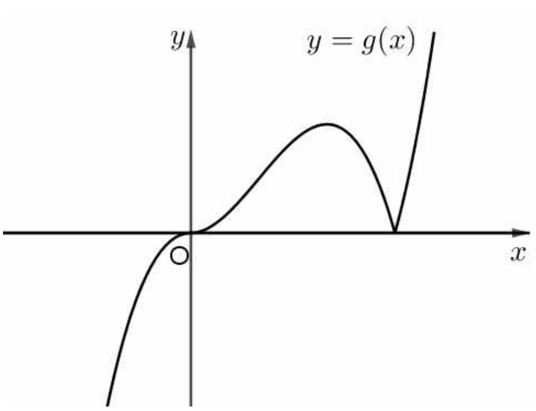
즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다.

이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로

$p=1$, $q=7$이어야 한다.

따라서 $p+q=1+7=8$



정답 ③

15. 출제의도 :

삼각함수의 그래프를 이해하고 이를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식의 근에 관련된 문제를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

에서

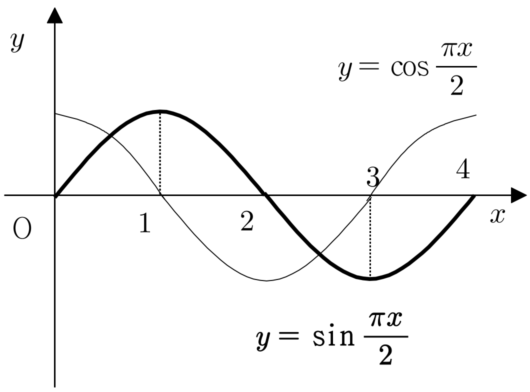
$\sin\frac{\pi x}{2}=t$ 또는 $\cos\frac{\pi x}{2}=t$

이 방정식의 실근은 두 함수

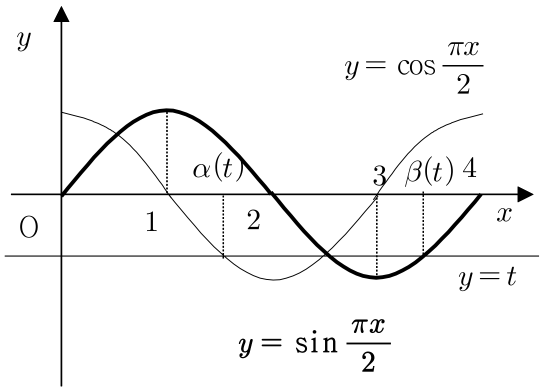
$y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프와

$y=t$와의 교점의 x좌표이다.

한편, 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 주기가 모두 4이므로 다음과 같다.



$-1\le t<0$이면 직선 $y=t$와 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프를 평행이동시키면 겹쳐질 수 있고 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 직선 $x=1$, $x=3$에 대하여 대칭이고 점 $(2, 0)$에 대하여 대칭이다.

그러므로

$\alpha(t)=1+k\ (0<k\le 1)$

로 놓으면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

$\alpha(t)+\beta(t)=5$ <참>

ㄴ.

실근 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 집합 $\{x|0\le x<4\}$의 원소이므로

$\beta(0)=3$, $\alpha(0)=0$

그러므로 주어진 식은

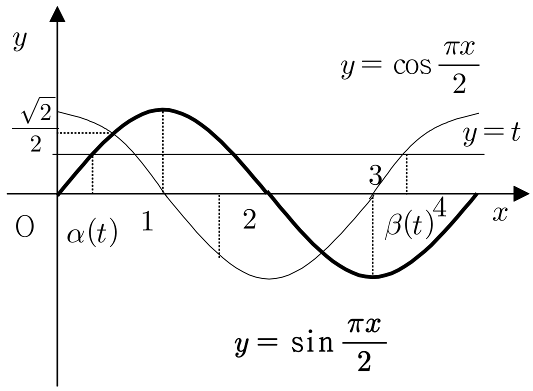
$\{t|\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}$

$=\{t|\beta(t)-\alpha(t)=3\}$

(ⅰ) $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$t=0$이면 $\beta(0)-\alpha(0)=3-0=3$

$t\ne 0$이면 다음 그림과 같다.



이때,

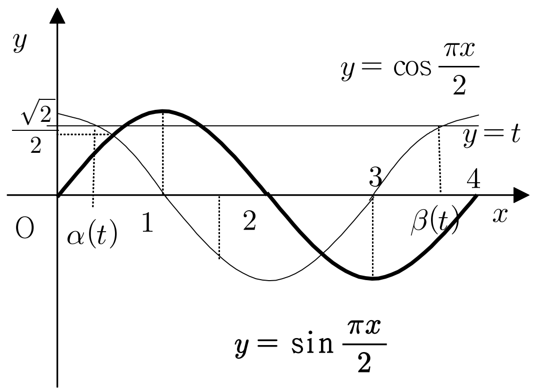
$\alpha(t)=k\ \left(0<k\le\frac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=3+k$

그러므로 $\beta(t)-\alpha(t)=3$

(ⅱ) $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,



이때,

$\alpha(t)=k\ \left(0<k<\frac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

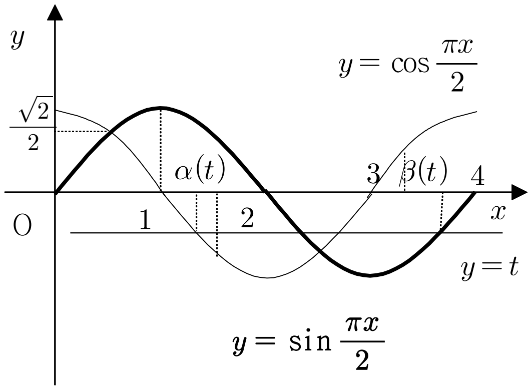
$\beta(t)-\alpha(t)=4-2k\ (0<2k<1)$

(ⅲ) $t=1$일 때,

$\alpha(1)=0$, $\beta(1)=1$이므로

$\beta(1)-\alpha(1)=1$

(iv) $-1 \le t < 0$일 때,



$1 < \alpha(t) \le 2$, $3 \le \beta(t) < 4$이므로

$\beta(t)-\alpha(t) < 3$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서

$\{t|\beta(t)-\alpha(t)=3\}$

$=\left\{t \middle| 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ <참>

ㄷ, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$이기 위해서는

$$0 < t_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < t_2$$

이때, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\alpha$라 하면

$t_1=\sin\frac{\pi}{2}\alpha$, $t_2=\cos\frac{\pi}{2}\alpha$

이때, $t_2=t_1+\frac{1}{2}$이므로

$\cos\frac{\pi}{2}\alpha=\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{2}$

이 식을 $\cos^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha=1$에 대입하면

$2\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{4}=1$

$8\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+4\sin\frac{\pi}{2}\alpha-3=0$

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{8}$

이때, $\sin\frac{\pi}{2}\alpha>0$이므로

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$

그러므로

$t_1=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$,

$t_2=t_1+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

따라서

$t_1 \times t_2=\frac{(-1+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}{16}=\frac{3}{8}$ <거짓>

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24$

$=\log_4\left(\frac{2}{3}\times 24\right)$

$=\log_4 16$

$=\log_4 4^2$

$=2$

정답 2

17. 출제의도 : 다항함수의 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

따라서 $a=1$

$f(a)=f(1)=1^3-3\times1+12=10$

이므로

$a+f(a)=1+f(1)=1+10=11$

정답 11

18. **출제의도** : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, $a_1=a$라 하면 $a_2=36$에서

$ar=36$ …… ㉠

또, $a_7=\dfrac{1}{3}a_5$에서

$ar^6=\dfrac{1}{3}ar^4$

$r^2=\dfrac{1}{3}$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$a_6=ar^5$

$=ar\times r^4$

$=36\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$=4$

정답 4

19. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 점의 위치의 변화량을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 0이므로

$v(t)=3t^2-4t+k$에서

$x(t)=t^3-2t^2+kt$

이때 $x(1)=-3$에서

$-1+k=-3$, $k=-2$

따라서 $x(t)=t^3-2t^2-2t$이고,

$x(3)=27-18-6=3$이다.

그러므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$x(3)-x(1)=3-(-3)=6$

정답 6

20. **출제의도** : 정적분으로 나타내어진 함수가 극값을 하나만 갖도록 하는 상수 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45$

$=3(x-3)(x-5)$

$g(x)=\displaystyle\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$

$$=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \{f(x)\}^5 - \{f(x)\}^5$$

$$=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(i) $a \neq 3$, $a \neq 5$일 때,

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$는 $x=3$, $x=5$, $x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a=3$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a=5$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+5=8$

정답 8

21. **출제의도** : a의 n제곱근의 의미를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 근이 모두 중근일 수 없다.

(ii) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근은

$x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$

즉,

$x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$

이때, 조건 (가)를 만족하기 위해서는

$$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 조건 (나)에서 함수$f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다. ㉠에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖고 그 값은

$-2^{\frac{6}{n}}\times 2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$

이 값이 음의 정수이기 위해서는 n의 값은

2, 4, 6, 12

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 n의 모든 값의 합은

$2+4+6+12=24$

정답 24

22. **출제의도** : 방정식의 실근의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 그래프를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$

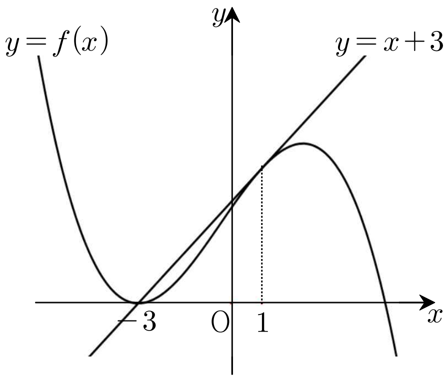
를 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수가 3이어야 한다.

즉 $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$에서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

접선의 방정식은 $y=x+3$

그런데 $f(0)>0$, $f'(0)>1$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+3$는 그림과 같다.



$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2$이므로

$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$

$f'(x)=k(x-1)^2+k(x+3)\times 2(x-1)+1$

…… ㉠

이때, $f'(-3)=0$이므로

㉠에 $x=-3$을 대입하면

$0=k\times 16+1$에서 $k=-\dfrac{1}{16}$

따라서

$f(x)=-\dfrac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3$이므로

$f(0)=-\dfrac{1}{16}\times 3\times 1+3=\dfrac{45}{16}$

즉 $p=16$, $q=45$이므로

$p+q=16+45=61$

정답 61

[선택: 확률과 통계]
23. ④ 24. ② 25. ③ 26. ③ 27. ①
28. ⑤ 29. 48 30. 47

23. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(2x+1)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r(2\mathrm{x})^{5-\mathrm{r}}(1)^{\mathrm{r}}={}_5\mathrm{C}_r\times 2^{5-\mathrm{r}}\times \mathrm{x}^{5-\mathrm{r}}$$

$(r=0, 1, 2, \cdots, 5)$

x^3항은 $5-r=3$, 즉 $r=2$일 때이므로

x^3의 계수는

$${}_5\mathrm{C}_2\times 2^{5-2}=10\times 8=80$$

정답 ④

24. 출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 조사에 참여한 학생 중에서 한 명을 선택하는 경우의 수는 20

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생인 사건을 B, 1학년 학생인 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E|B)$이다.

이때 $\mathrm{P}(B)=\frac{9}{20}$이고, 사건 $E\cap B$는 진로활동 B를 선택한 1학년 학생을 선택하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(E\cap B)=\frac{5}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E|B)=\frac{\mathrm{P}(E\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$$

정답 ②

25. 출제의도 : 중복순열의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_4=5^4$$

이 중에서 3500보다 큰 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 천의 자리의 숫자가 3, 백의 자리의 숫자가 5인 경우

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_2=5^2$$

(ⅱ) 천의 자리의 숫자가 4 또는 5인 경우

천의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 나머지 세 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_3=5^3$$

이므로 이 경우의 수는

2×5^3

(i), (ii)에 의하여 3500보다 큰 자연수의 개수는

$5^2+2\times5^3$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5^2+2\times5^3}{5^4}=\frac{11}{25}$$

정답 ③

26. **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생에게는 노란색 카드 1장을 반드시 주어야 한다.

노란색 카드 1장을 받을 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이 각각에 대하여 이 학생에게 파란색 카드 1장을 먼저 준 후 나머지 파란색 카드 1장을 줄 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이 각각에 대하여 노란색 카드를 받은 학생에게 빨간색 카드 1장도 먼저 준 후 나머지 빨간색 카드 3장을 나누어 줄 학생을 선택하는 경우의 수는

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3$$
$$={}_5C_3$$
$$={}_5C_2$$
$$=\frac{5\times4}{2}=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3\times10=90$

정답 ③

27. **출제의도** : 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하고 이를 이용하여 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6^2\times2^4$

(i) 앞면이 나온 동전의 개수가 1인 경우의 수는

${}_4C_1=4$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1, 1)$이어야 하므로 이 경우의 수는

$4\times1=4$

(ii) 앞면이 나온 동전의 개수가 2인 경우의 수는

$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2}=6$$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1, 2)$ 또는 $(2, 1)$이어야 하므로 이 경우의 수는

$6\times2=12$

(iii) 앞면이 나온 동전의 개수가 3인 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1, 3)$, 또는 $(3, 1)$이어야 하므로 이

경우의 수는

$4 \times 2 = 8$

(ⅳ) 앞면이 나온 동전의 개수가 4인 경우의 수는

${}_4C_4 = 1$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1, 4)$ 또는 $(2, 2)$ 또는 $(4, 1)$이어야 하므로 이 경우의 수는

$1 \times 3 = 3$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4 + 12 + 8 + 3 = 27$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{27}{6^2 \times 2^4} = \frac{3}{64}$$

정답 ①

28. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 주사위를 네 번 던질 때 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 0인 경우

1의 눈만 네 번 나와야 하므로 이 경우의 수는

1

(ⅱ) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 1인 경우

1의 눈이 두 번, 2의 눈이 한 번 나와야 하므로 점수 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

이 각각에 대하여 4 이상의 눈이 한 번 나오는 경우의 수는 3이므로 이 경우의 수는

$12 \times 3 = 36$

(ⅲ) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 2인 경우

㉠ 1의 눈이 한 번, 3의 눈이 한 번 나올 때, 점수 0, 0, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

㉡ 2의 눈이 두 번 나올 때, 점수 0, 0, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

㉠, ㉡ 각각에 대하여 4이상의 눈이 두 번 나오는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$이므로 이 경우의 수는

$(12 + 6) \times 9 = 162$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$1 + 36 + 162 = 199$

정답 ⑤

29. **출제의도** : 원순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우는 다음과 같이 생각할 수 있다.

(ⅰ) 2, 6이 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

그러므로 이 경우의 수는

$24\times2=48$

(ⅱ) 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

그러므로 이 경우의 수는

$24\times2=48$

(ⅲ) 2, 6이 각각 적힌 두 의자와 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 모두 이웃하게 배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

그러므로 이 경우의 수는

$6\times4=24$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우의 수는

$48+48-24=72$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-72=48$

정답 48

30. **출제의도** : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

3개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 5번 반복할 때 나오는 모든 경우의 수는

3^5

이때 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 한 개의 숫자만 나오는 경우

이 경우의 수는 3

(ⅱ) 두 개의 숫자가 나오는 경우

1, 2가 적혀 있는 공이 나오는 경우의 수는

$2^5-2=30$

1, 3이 적혀 있는 공이 나오는 경우

$2^5-2=30$

그러므로 이 경우의 수는

$30+30=60$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우의 수는

$3+60=63$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{63}{3^5}=1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$$

이므로

$p+q=27+20=47$

정답 47

[선택: 미적분]

23. ②	24. ②	25. ④	26. ③	27. ④
28. ①	29. 17	30. 11		

23. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1+1}{1}=2$$

정답 ②

24. 출제의도 : 매개변수로 나타낸 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=e^t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}$$

따라서 $t=0$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{1-0}=1$$

정답 ②

25. 출제의도 : 두 접선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\tan\theta$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=e^{|x|}$는 y축에 대하여 대칭이다.

$x\ge 0$일 때 $y=e^x$이고 접점을 (t, e^t)이라 하면 $y'=e^x$이므로 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-e^t=e^t(-t)$, $t=1$

따라서 접선의 기울기는 e이고 이 접선과 y축에 대하여 대칭인 접선의 기울기는 $-e$이다.

$$\tan\theta=\frac{-e-e}{1+(-e)\times e}=\frac{-2e}{1-e^2}=\frac{2e}{e^2-1}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 한없이 반복되는 도형에서 넓이의 합을 등비급수를 활용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

$\angle O_1A_2O_2=\frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}},\quad \frac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\overline{O_2A_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이의

비는 $1:\frac{1}{2}$이다.

즉, 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$e^x=k\sin x$ 에서 $\frac{1}{k}=\frac{\sin x}{e^x}\cdots$ ㉠이므로

$h(x)=\frac{\sin x}{e^x}$라 하면

$$h'(x)=\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

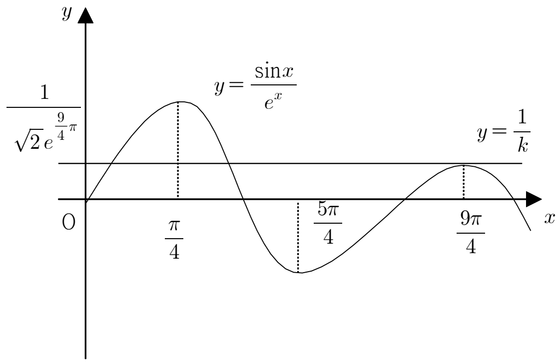
따라서 $x>0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \cdots$$

이므로 함수 $y=h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	1	+	0	-	0	+
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	↗

x	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$	↗



이때 ㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{k}$이 $x=\frac{9}{4}\pi$에서 곡선 $y=\frac{\sin x}{e^x}$와 접해야 하므로

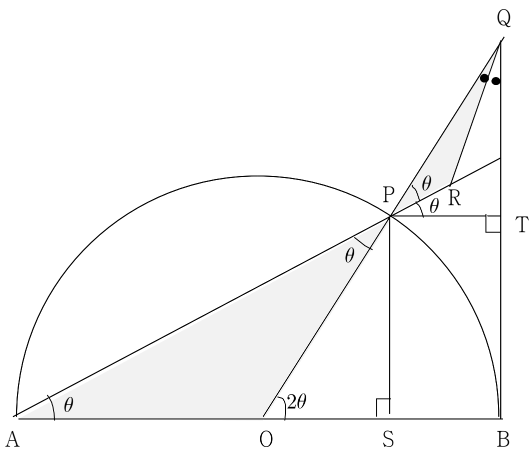
$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

따라서 $k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

정답 ④

28. 출제의도 : 도형에서 여러 가지 조건을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{\sin2\theta}{2}$$

또한, $\angle\mathrm{APO} = \angle\mathrm{QPR} = \theta$이므로

점 P에서 두 선분 AB, BQ에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면

$\angle\mathrm{QPT} = 2\theta$

즉, 점 R는 삼각형 PTQ의 내심이다.

이때,

$\overline{\mathrm{OS}} = \cos 2\theta$, $\overline{\mathrm{PS}} = \sin 2\theta$, $\overline{\mathrm{BQ}} = \tan 2\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{PT}} = 1 - \cos 2\theta$

$\overline{\mathrm{QT}} = \tan 2\theta - \sin 2\theta = \tan 2\theta(1 - \cos 2\theta)$

이고

$\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{1}{\cos 2\theta} - 1 = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta}$

따라서 삼각형 PTQ의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{1}{2} \times (1 - \cos 2\theta) \times \tan 2\theta(1 - \cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times r \times \left\{ \frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} + 1 - \cos 2\theta + \tan 2\theta(1 - \cos 2\theta) \right\}$$

에서

$$r = \frac{(1 - \cos 2\theta)\sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta}$$

이다.

그러므로

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} \times \frac{(1 - \cos 2\theta)\sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(1 - \cos 2\theta)^2 \sin 2\theta}{\cos 2\theta(1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin^4 2\theta \times \sin 2\theta}{\cos 2\theta(1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)^2}$$

따라서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)^4 \times 16 \times \frac{1}{\cos 2\theta(1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)^2} \right\}$$

$$= 1^4 \times 16 \times \frac{1}{8} = 2$$

정답 ①

29. **출제의도** : 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = \frac{2t\ln x}{x} - 2x = \frac{2t\ln x - 2x^2}{x}$$

이고 $f(x)$는 $x = k$에서 극대이므로

$2t\ln k - 2k^2 = 0$

$t\ln k = k^2$

이때 실수 k의 값을 $g(t)$라 했으므로

$t\ln g(t) = \{g(t)\}^2 \cdots\cdots$ ㉠

그런데 $g(\alpha) = e^2$ 이므로

㉠에 $t = \alpha$를 대입하면

$\alpha \ln g(\alpha) = \{g(\alpha)\}^2$

$2\alpha = e^4$, $\alpha = \dfrac{e^4}{2}$

또한, ㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\ln g(t) + t \times \frac{g'(t)}{g(t)} = 2g(t) \times g'(t)$$

이 식에 $t = \alpha$를 대입하면

$$\ln g(\alpha) + \alpha \times \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} = 2g(\alpha) \times g'(\alpha)$$

$$2 + \frac{e^4}{2} \times \frac{g'(\alpha)}{e^2} = 2e^2 \times g'(\alpha)$$

$$\frac{3}{2}e^2 \times g'(\alpha) = 2$$

$g'(\alpha)=\dfrac{4}{3e^2}$

$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{16}{9e^4}=\dfrac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$ 이므로

$p+q=17$

정답 17

30. **출제의도** : 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 두 점을

$\mathrm{P}(\alpha,\alpha+\mathrm{t})$, $\mathrm{Q}(\beta,\beta+\mathrm{t})$ $(\alpha<\beta)$

로 놓으면

$$f(t)=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$$

이때, α, β는 방정식

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

의 서로 다른 두 실근이므로

$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$

$e^{2x}-e^t\times e^x+1-e^{-2t}=0$

$e^x=k(k>0)$로 놓으면

$k^2-e^tk+1-e^{-2t}=0$

따라서,

$$k=\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

이므로

$$e^\alpha=\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

$$e^\beta=\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

즉

$$\alpha=\ln\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

$$\beta=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

이므로

$\beta-\alpha$

$$=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}$$

$$=\ln\frac{(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})^2}{4(1-e^{-2t})}$$

$$=2\ln(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})-\ln4-\ln(1-e^{-2t})$$

따라서

$$g(t)=2\ln(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})-\ln4-\ln(1-e^{-2t})$$

라 하면

$$g'(t)=2\times\frac{e^t+\dfrac{2e^{2t}-8e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}}{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}-\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-2t}}$$

이므로

$$g'(\ln2)=2\times\frac{2+\dfrac{8-2}{2}}{2+1}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

즉, $f(t)=\sqrt{2}g(t)$에서

$f'(\ln2)=\sqrt{2}g'(\ln2)=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$

이므로 $p=3$, $q=8$

따라서 $p+q=11$

정답 11

[선택: 기하]
23. ② 24. ⑤ 25. ① 26. ② 27. ③
28. ③ 29. 80 30. 48

23. **출제의도** : 두 벡터의 평행 조건을 이용하여 주어진 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행하므로 적당한 실수 m에 대하여

$\vec{a}=m\vec{b}$

가 성립한다.

$(k+3,\ 3k-1)=m(1,\ 1)$에서

$k+3=m,\ 3k-1=m$

따라서 $k=2,\ m=5$

정답 ②

24. **출제의도** : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{8}+\dfrac{\sqrt{2}y}{4}=1$

이므로 이 직선의 x절편은 4이다.

정답 ⑤

25. **출제의도** : 벡터로 나타내어진 식을 이용하여 주어진 점이 나타내는 도형을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$에서

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}|$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(5-2)^2}=5$

이므로

$|\overrightarrow{AP}|=5$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이므로 그 길이는 10π이다.

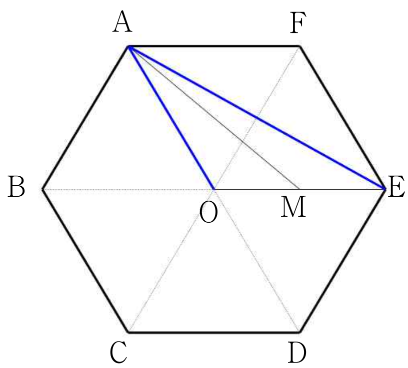
정답 ①

26. **출제의도** : 도형에서 두 벡터의 합의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 선분 AD와 BE의 교점을 O라 하고 선분 OE의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$이므로



$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AM}$ ⋯ ㉠

삼각형 AOM에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= \overline{AO}^2+\overline{OM}^2-2\times\overline{AO}\times\overline{OM}\times\cos 120^\circ \\ &= 1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$이므로 ㉠에서

$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2\overline{\mathrm{AM}}=2\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

정답 ②

27. 출제의도 : 쌍곡선 위의 점에서의 접선을 구하여 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $\mathrm{P}(4, k)$는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{k^2}{b^2}=1$ ⋯ ㉠

점 P에서 쌍곡선에 그은 접선의 방정식은

$\dfrac{4x}{a^2}-\dfrac{ky}{b^2}=1$

이므로 두 점 Q와 R의 좌표는 각각 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{a^2}{4}, 0\right)$, $\mathrm{R}\left(0, -\dfrac{b^2}{k}\right)$

따라서 삼각형 QOR의 넓이는

$A_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a^2}{4}\times\left|-\dfrac{b^2}{k}\right|=\dfrac{a^2b^2}{8k}$

삼각형 PRS의 넓이는

$A_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PS}}\times\overline{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{2}\times k\times 4=2k$

이므로

$A_1 : A_2=9 : 4$에서

$\dfrac{a^2b^2}{8k} : 2k=9 : 4$

$36k^2=a^2b^2$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{k^2}{\dfrac{36k^2}{a^2}}=1$, 즉 $\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{a^2}{36}=1$

$a^4+36a^2-16\times 36=0$

$(a^2-12)(a^2+48)=0$

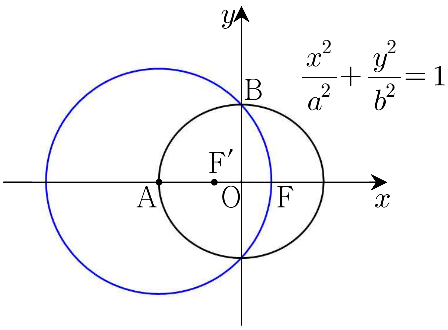
$a^2=12$에서 $a=2\sqrt{3}$이므로 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=4\sqrt{3}$이다.

정답 ③

28. 출제의도 : 타원의 방정식에서 꼭짓점과 초점을 이용하여 장축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 타원의 중심을 원점으로 하고 장축이 x축 위에 놓이도록 좌표축을 설정하자.



이때 타원의 장축의 길이가 $2a$이므로 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$라 하면 두 초점의 좌표는

$\mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

이다.

주어진 타원이 음의 x축과 만나는 점을 A, 양의 y축과 만나는 점을 B라 하면 두 점 A와 B의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-a, 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$이다.

점 A를 중심으로 하고 두 점 B와 F를

지나는 원의 반지름의 길이는 1이므로

$\overline{AB}=1$에서 $\sqrt{a^2+b^2}=1$

$b^2=1-a^2$ ⋯ ㉠

$\overline{AF}=1$에서 $\sqrt{a^2-b^2}+a=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\sqrt{a^2-(1-a^2)}=1-a$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$2a^2-1=1-2a+a^2$

$a^2+2a-2=0$

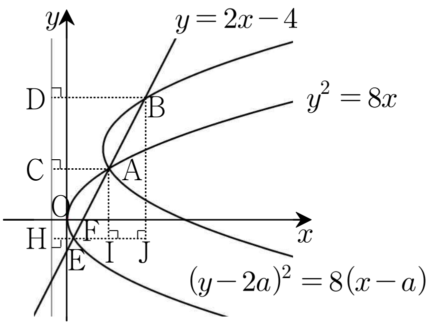
따라서 $a=-1+\sqrt{3}$ $(a>0)$

정답 ③

29. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 포물선 위의 점에서 준선까지의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

[풀이]



직선 $y=2x-4$가 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

점 F의 좌표는 $(2, 0)$이므로 포물선 $y^2=8x$의 초점과 일치한다.

따라서 $\overline{AF}=p$, $\overline{EF}=q$라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AC}=p$, $\overline{EH}=q$

이때 포물선의 준선의 방정식이 $x=-2$이므로 두 점 A, E의 x좌표는 각각 $p-2$, $q-2$이다.

선분 AI와 x축의 교점을 P, 점 E에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$\overline{FP}=p-4$, $\overline{FQ}=4-q$

이므로 두 직각삼각형 AFP, EFQ에서

$p=\sqrt{5}(p-4)$, $q=\sqrt{5}(4-q)$

따라서

$p=\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)=5+\sqrt{5}$,

$q=\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)=5-\sqrt{5}$

이므로

$\overline{EI}=p-q=2\sqrt{5}$

한편, 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이므로 두 점 A, B는 각각 두 점 E, A를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{AE}$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AE}$

$=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AF}+\overline{EF})$

$=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AC}+\overline{EH})$

$=\overline{BD}-\overline{EH}$

$=\overline{EJ}$

$=2\times\overline{EI}$

$=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

따라서 $k=4\sqrt{5}$이므로

$k^2=80$

[다른 풀이]

직선 $y=2x-4$가 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

점 F의 좌표는 $(2, 0)$이므로 포물선 $y^2=8x$의 초점과 일치한다.

이때 연립방정식

$$\begin{cases} y^2=8x \\ y=2x-4 \end{cases}$$

의 해는 $y^2=4(y+4)$ 즉, $y^2-4y-16=0$에서 $y=2\pm2\sqrt{5}$

$y=2+2\sqrt{5}$이면 $x=3+\sqrt{5}$

$y=2-2\sqrt{5}$이면 $x=3-\sqrt{5}$

이므로 두 점 A와 E의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(3+\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5})$, $\mathrm{E}(3-\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5})$이다.

포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}$

따라서 포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{AB}}$

$=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{AE}}$

$=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-(\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{EF}})$

$=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{EH}})$

$=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{EH}}$

$=\overline{\mathrm{EJ}}$

$=2\times\overline{\mathrm{EI}}$

$=2\times\{(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})\}$

$=4\sqrt{5}$

$k=4\sqrt{5}$이므로 $k^2=80$

정답 80

30. **출제의도** : 벡터로 표현된 식을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ 또는 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$

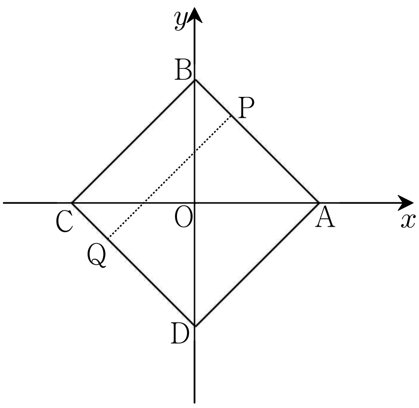
이므로 다음과 같이 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$인 경우

두 조건 (나)와 (다)에서

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leq 0$

이므로 점 P는 선분 AB 위의 점이고 점 Q는 선분 CD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, 2-a)$ $(0\leq a\leq 2)$라 하면 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(a-2, -a)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq-2$에서

$(2, 0)\cdot(a, 2-a)=2a\geq-2$

이므로

$a\geq-1$ ⋯ ㉠

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq 0$에서

$(0, 2)\cdot(a, 2-a)=2(2-a)\geq 0$

이므로

$a\leq 2$ ⋯ ㉡

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geq-2$에서

$(2, 0)\cdot(a-2, -a)=2(a-2)\geq-2$

이므로

$a \geq 1$ ⋯ ㉢

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$에서

$(0, 2) \cdot (a-2, -a) = -2a \leq 0$

이므로

$a \geq 0$ ⋯ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$1 \leq a \leq 2$ ⋯ ㉤

한편, 점 $\mathrm{R}(4, 4)$에 대하여

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$

$= (a, 2-a) - (4, 4)$

$= (a-4, -a-2)$

$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$

$= (a-2, -a) - (4, 4)$

$= (a-6, -a-4)$

이므로

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$

$= (a-4, -a-2) \cdot (a-6, -a-4)$

$= (a-4)(a-6) + (a+2)(a+4)$

$= 2a^2 - 4a + 32$

$= 2(a-1)^2 + 30$

㉤에서

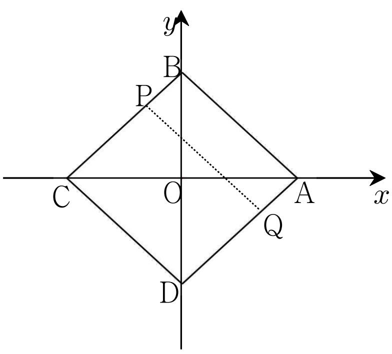
$30 \leq \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \leq 32$

(ii) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 즉 $\overline{PQ} \perp \overline{AD}$인 경우

두 조건 (나)와 (다)에서

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$

이므로 점 P는 선분 BC 위의 점이고 점 Q는 선분 AD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, a+2)$ $(-2 \leq a \leq 0)$

라 하면 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(a+2, a)$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq -2$에서

$(2, 0) \cdot (a, a+2) = 2a \geq -2$

이므로

$a \geq -1$ ⋯ ㉥

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$에서

$(0, 2) \cdot (a, a+2) = 2(a+2) \geq 0$

이므로

$a \geq -2$ ⋯ ㉦

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq -2$에서

$(2, 0) \cdot (a+2, a) = 2(a+2) \geq -2$

이므로

$a \geq -3$ ⋯ ㉧

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$에서

$(0, 2) \cdot (a+2, a) = 2a \leq 0$

이므로

$a \leq 0$ ⋯ ㉨

㉥, ㉦, ㉧, ㉨에서

$-1 \leq a \leq 0$ ⋯ ㉩

한편, 점 $\mathrm{R}(4, 4)$에 대하여

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$

$= (a, a+2) - (4, 4)$

$= (a-4, a-2)$

$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$

$= (a+2, a) - (4, 4)$

$= (a-2, a-4)$

이므로

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$

$= (a-4, a-2) \cdot (a-2, a-4)$

$= 2(a-4)(a-2)$

$= 2(a^2 - 6a + 8)$

$= 2(a-3)^2 - 2$

㉩에서

$16 \leq \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \leq 30$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$16 \le \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \le 32$

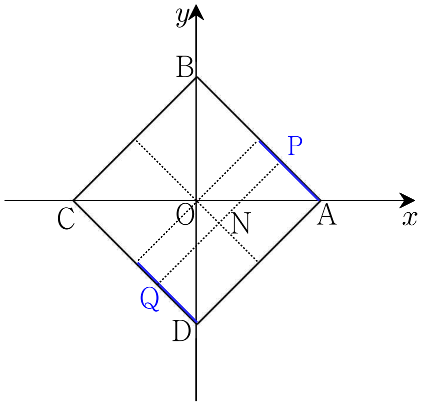
따라서 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값은 $M=32$, 최솟값은 $m=16$이므로

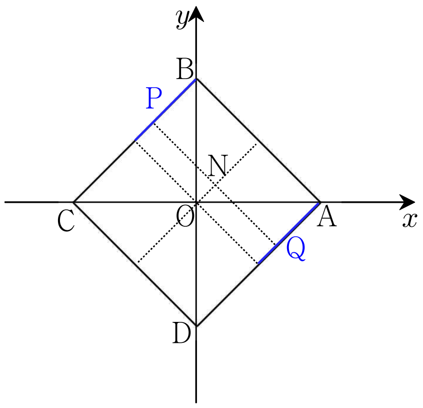
$M+m=48$

정답 48

[다른 풀이]

위의 풀이에서 두 점 P, Q가 지나는 영역은 다음 그림의 굵은 선분 위이다.





선분 PQ의 중점을 N이라 하면 조건 (가)에 의하여

$\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{NQ}=0$,

$\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ}=|\overrightarrow{NP}||\overrightarrow{NQ}|\cos\pi=-\overline{NP}^{\,2}$

이므로

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$

$=(\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}) \cdot (\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NQ})$

$=\overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{RN}+\overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ}$

$=|\overrightarrow{RN}|^2+\overrightarrow{RN} \cdot (\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{NP})+\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ}$

$=\overline{RN}^{\,2}+0-\overline{NP}^{\,2}$

이때 항상 $\overline{PQ}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{NP}=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\sqrt{2}$

따라서

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}=\overline{RN}^{\,2}-2$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값과 최솟값은 $\overline{RN}$의 최댓값과 최솟값에 의하여 결정된다.

$\overline{RN}$이 최대일 때의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2,0)$, $(0,-2)$이므로

$N(1,-1)$

따라서

$\overline{RN}=\sqrt{(4-1)^2+(4+1)^2}=\sqrt{34}$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값은

$M=(\sqrt{34})^2-2=32$

$\overline{RN}$이 최소일 때의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(0,2)$, $(2,0)$이므로

$N(1,1)$

따라서

$\overline{RN}=\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{18}$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최솟값은

$m=(\sqrt{18})^2-2=16$

이상에서

$M+m=32+16=48$